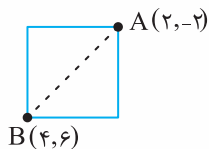


متوسط

-۴

حواستون باشه! برای به دست آوردن فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ استفاده می‌کنیم پس: ۲ رأس مقابل در مربع به صورت شکل مقابل است:



فاصله AB قطر مربع را می‌دهد و می‌دانیم (طول ضلع) $(\sqrt{2})$ قطر

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

پس طول ضلع مربع $\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ خواهد بود در نتیجه مساحت مربع:

$$S = \left(\frac{2\sqrt{17}}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{17}{2} = 34 \quad \text{یا} \quad S = \frac{(\text{قطر})^2}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

آسان

-۵

فاصله نقطه‌ای روی دایره تا مرکز دایره را شعاع دایره می‌نامند پس:

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

دشوار

-۶

حواستون باشه! نقاط روی نیمساز ربع اول و سوم از رابطه $y = x$ پیروی می‌کنند پس نقاط به صورت (α, α) .

فاصله (α, α) تا $(0, 3)$ را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(\alpha-0)^2 + (\alpha-3)^2} = 4$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 16 \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha - 7 = 0$$

مجموع طول‌های خواسته شده بنا به معادلات درجه ۲ از رابطه $\frac{-b}{a}$ به دست

$$\frac{-(-6)}{2} = 3 \quad \text{می‌آید. پس}$$

آسان

-۷

حواستون باشه! بنا به فرمول یافتن نقطه وسط پاره خط اگر:

$$\begin{array}{l} \text{A}(x_A, y_A) \quad \text{M} \quad \text{B}(x_B, y_B) \\ \text{A}(x_A, y_A) \quad (e, f) \quad ?(x_B, y_B) \end{array} \quad \begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{array}$$

$$x_B = 2e - x_A$$

$$y_B = 2f - y_A$$

پس بنا به فرمول داریم:

$$x = 2(2) - 3 = 1$$

$$y = 2(1) - (-1) = 3$$

پس نقطه تصویر $(1, 3)$ است.



آسان

-۱

حواستون باشه!

(۱) فرمول معادله به صورت $y = ax + b$ و یا $y - y_0 = m(x - x_0)$ است.

(۲) محل تلاقی به معنای حل دستگاه و یا جایگذاری است.

(۳) شرط موازی بودن دو خط برابر بودن شیب‌ها و شرط عمود بودن دو خط قرینه و معکوس بودن شیب‌هاست.

ابتدا محل تلاقی خط $y = x - 2$ و محور x را به دست می‌آوریم.

$$y = 0 \Rightarrow 2(0) = x - 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ در معادله خط جدید صدق می‌کند و با خط $3y = x + 2$

موازی است پس شیب‌های برابر دارند و شیب خط $3y = x + 2$ برابر $\frac{1}{3}$

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

است پس:

آسان

-۲

ابتدا فرمول معادله خط $y - y_1 = m(x - x_1)$ را می‌نویسیم. شرط عمود بودن قرینه و معکوس بودن شیب‌هاست پس:

$$\frac{-2}{3} = \text{شیب} \rightarrow \text{عمود} = \frac{3}{2} = \frac{-(-3)}{2} = \text{شیب} \Rightarrow \frac{-(-3)}{2} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{-2}{3}$$

نقطه مورد نظر با $x = 2$ را در معادله خط $y + 2x = 3$ جایگذاری می‌کنیم تا $y = -1$ به دست آید.

$$y - (-1) = \frac{-2}{3}(x - 2) \xrightarrow{\times 3} 3y + 3 = -2x + 4 \Rightarrow 3y = -2x + 1$$

دشوار

-۳

(آ) برای مشخص کردن نوع مثلث داریم: [طول اضلاع و شیب‌ها را بیابید]

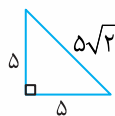
$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(2+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چون $5\sqrt{2}$ از بقیه ضلع‌ها بزرگ‌تر است و رابطه فیثاغورس بین اضلاع برقرار است پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

(پ) چون مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس:



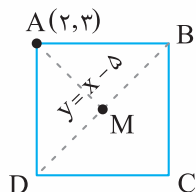
$$\text{محیط} = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$$

دشوار

-۱۱

با توجه به اینکه نقطه در خط صدق نمی‌کند پس:



ابتدا معادله خط AM را به دست می‌آوریم چون شیب AM قرینه و معکوس

قطر است پس شیب AM (-1) است.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -1(x - 2)$$

$$y - 3 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 5$$

محل برخورد AM و قطر BD جواب مسئله است.

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ y - x = -5 \end{cases} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 5$$

$$M(5, 0)$$

متوسط

-۱۲

با استفاده از فاصله نقطه از خط داریم:

$$ax + 4y - 1 = 0 \text{ و } A(1, 2)$$

$$\frac{|a + 8 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow \frac{|a + 7|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow |a + 7| = 2\sqrt{a^2 + 16}$$

$$a^2 + 14a + 49 = 4(a^2 + 16) \Rightarrow a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 64$$

$$3a^2 - 14a + 15 = 0 \Rightarrow (3a - 5)(a - 3) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}, a = 3$$

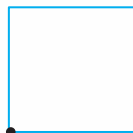
آسان

-۱۳

چون نقطه A در ضلع داده شده صدق نمی‌کند سپس فاصله A تا خط

$$3x - 4y = 9 \text{ طول ضلع مربع را می‌دهد پس:}$$

$$3x - 4y = 9$$



$$A(2, 3)$$

$$3x - 4y - 9 = 0$$

$$\text{طول ضلع} = \frac{|3(2) - 4(3) - 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|6 - 12 - 9|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S = 3^2 = 9 \text{ پس مساحت مربع}$$

دشوار

-۸

اگر نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ باشد یعنی نقاطی به صورت $(\alpha, 2\alpha)$ خواهد

بود. حالا فاصله این نقطه از مبدا مختصات و نقطه $A(2, 4)$ می‌یابیم:

$$\sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} + \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 4)^2} = 5$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 16\alpha + 16} = 5$$

$$\sqrt{5\alpha^2} + \sqrt{5\alpha^2 - 20\alpha + 20} = 5 \Rightarrow \sqrt{5}|\alpha| + \sqrt{5}|\alpha - 2| = 5$$

باتوجه به بسط قدر مطلقها داریم:

$$\alpha < 0: -\sqrt{5}\alpha - \sqrt{5}\alpha + 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow -2\sqrt{5}\alpha = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$0 \leq \alpha \leq 2: \sqrt{5}\alpha - \sqrt{5}\alpha + 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5} \neq 5$$

$$\alpha > 2: \sqrt{5}\alpha + \sqrt{5}\alpha - 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5}\alpha = 5 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \alpha = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

آسان

-۹

حواستون باشه! باتوجه به تمرین کتاب درسی اگر A, B, C, D چهار رأس

متوازی الاضلاع باشد داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

ابتدا رأس پیدا می‌کنیم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 3 + 4 = 2 + x_D \Rightarrow 5 = x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + (-2) = 0 + y_D \Rightarrow y_D = -1$$

حالا فاصله نقطه B و D را پیدا می‌کنیم:

$$BD = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 + 1)^2} \Rightarrow BD = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

متوسط

-۱۰

چون نقطه داده شده در خط صدق نمی‌کند پس روی ضلع قرار ندارد در نتیجه:

$$2x + y = 3$$



$$A(2, 1)$$

فاصله نقطه A تا خط $2x + y - 3 = 0$ طول ضلع مربع است پس:

$$\text{طول ضلع} = \frac{|2(2) + 1 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

دشواری

-۱۷

ابتدا برای یافتن H معادله خط AH و معادله خط BC را به دست می‌آوریم تا دستگاه حل کنیم:
معادله خط BC :

$$BC \text{ شیب} = \frac{-2 - (-1)}{8 - 1} = \frac{-1}{7} p$$

$$y + 1 = \frac{-1}{7}(x - 1) \Rightarrow y + 1 = \frac{-1}{7}x + \frac{1}{7} \Rightarrow y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7}$$

معادله خط AH :

$$AH \text{ شیب} = 7$$

$$y - 2 = 7(x - 4) \Rightarrow y = 7x - 28 + 2 \Rightarrow y = 7x - 26$$

دستگاه حل می‌کنیم. تا محل برخورد AH و BC را بیابیم که همان نقطه H است.

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7} \\ -y = -7x + 26 \end{cases}$$

$$0 = -\frac{50}{7}x + \frac{176}{7} \Rightarrow 176 = 50x \Rightarrow x = \frac{176}{50} = \frac{88}{25}, y = \frac{34}{25}$$

$$H\left(\frac{88}{25}, \frac{34}{25}\right)$$

برای یافتن M نقطه وسط BC را می‌یابیم: $M\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$MH = \sqrt{\left(\frac{88}{25} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{34}{25} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{49}{50}\right)^2 + \left(\frac{143}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{22850}{2500}} = \sqrt{9.14}$$

متوسط

-۱۸

$$\text{وسط } AB = O = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = (4, 1)$$

$$r = OA = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

ب) اگر اندازه OC به اندازه شعاع دایره باشد یعنی C روی محیط دایره قرار دارد.

$$OC = \sqrt{(4-7)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} = r$$

پس C روی محیط دایره قرار دارد.

متوسط

-۱۹

ابتدا با توجه به شیب دو ضلع متوجه می‌شویم چون قرینه و معکوس یکدیگر هستند پس حتماً دو ضلع مجاور هم هستند سپس با حل کردن دستگاه مختصات C را می‌یابیم.

$$\begin{matrix} A(5, 2) & B \\ & 3x + y = 3 \\ D & x - 3y = 1 & C \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3x + y = 3 \\ -3x + 9y = -3 \end{matrix}$$

$$10y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 1$$

$$c(1, 0)$$

مختصات محل برخورد قطرها، نقطه وسط قطر AC است پس:

$$M = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow M = (3, 1)$$

متوسط

-۱۴

حواستون باشه! عمود منصف دارای ویژگی عمود بودن (شیب‌های قرینه و معکوس) و میانه بودن پاره خط است. $AB = \frac{-3-15}{0-6} = \frac{-18}{-6} = 3$
پس شیب عمود منصف $-\frac{1}{3}$ خواهد بود.

$$AB \text{ وسط پاره خط } M(3, 6) = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{-3+15}{2}\right)$$

پس معادله عمود منصف:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{3}x + 1$$

از صدق دادن نقطه p در معادله متوجه می‌شویم:

$$y = -\frac{1}{3}x + 7 \Rightarrow 11 = -\frac{1}{3}(-12) + 7 = 4 + 7 = 11$$

نقطه p روی خط قرار دارد.

متوسط

-۱۵

حواستون باشه! وقتی حرف از میانه باشه به نقطه وسط پاره خط احتیاج داریم. (آ) چون طول میانه خواسته شده ابتدا نقطه M پیدا می‌کنیم سپس از فاصله دو نقطه طول AM را پیدا می‌کنیم: $M = \frac{BC \text{ وسط}}{\rightarrow} \left(\frac{3+7}{2}, \frac{11+1}{2}\right) = (5, 6)$

$$AM = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

ب) معادله میانه به معنای نوشتن معادله خط است پس:

$$\text{شیب } AM = \frac{6-9}{5-1} = \frac{-3}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{4}(x - 5) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

متوسط

-۱۶

(آ) مثلث متساوی الساقین دو ضلع برابر دارد پس طول اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(-6+1)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$AC = \sqrt{(3+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3+6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$$

پس چون $BC = AB$ ، مثلث متساوی الساقین است.

ب) حواستون باشه! عمود منصف و ارتفاع به فاصله نقطه از خط، شیب‌های قرینه و معکوس مربوط است.

عمود منصف BC شیبی قرینه معکوس BC خواهد داشت پس:

$$BC \text{ شیب} = \frac{-2-3}{-6-3} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9} \xrightarrow[\text{شیب عمود منصف}]{\text{قرینه معکوس}} \frac{-9}{5}$$

عمود منصف از وسط ضلع BC نیز می‌گذرد پس:

$$BC \text{ وسط} = \left(\frac{-6+3}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$BC \text{ معادله: } y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\times 10} 10y - 5 = -18x - 27$$

$$18x + 10y + 22 = 0$$

ت) فاصله نقطه A تا خط BC را به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|18(-1) + 10(7) + 22|}{\sqrt{18^2 + 10^2}} = \frac{74}{\sqrt{424}}$$

متوسط

-۲۴

فاصله مرکز دایره از خطوط مماس برابر شعاع دایره است پس در نتیجه این دو فاصله با یکدیگر برابر است.

فاصله $(-1, 4)$ تا خط $3x + 4y + 2 = 0$:

$$\frac{|3(-1) + 4(4) + 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-3+16+2|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

فاصله $(-1, 4)$ تا خط $5x - 12y - k = 0$:

$$\frac{|5(-1) - 12(4) - k|}{\sqrt{25+144}} = \frac{|-5-48-k|}{\sqrt{169}} = \frac{|-53-k|}{13}$$

$$\frac{|-53-k|}{13} = 3 \Rightarrow |-53-k| = 39 \Rightarrow -53-k = 39$$

$$-53-39 = k \Rightarrow k = -92$$

$$-53-k = -39 \Rightarrow -53+39 = k \Rightarrow k = -14$$

متوسط

-۲۵

(آ) محل برخورد سهمی با محور x ها یعنی $y = 0$

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+2) = 0$$

$$x = 10, x = -2$$

(ب) طول AB فاصله x های به دست آمده:

$$|x_B - x_A| = |10 - (-2)| = 12$$

(پ) بیشترین ضخامت در y رأس به دست می آید:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[-64 - 4(-20)]}{4} = \frac{-[-64 + 80]}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

پس بیشترین ضخامت ۳۶ است.

دشوار

-۲۶

مختصات محل تلاقی سه خط در هر سه آن ها صدق می کند.

با قرار دادن رو خط معلوم در دستگاه دو معادله و دو مجهول، مختصات محل تلاقی را مشخص می کنیم.

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2x - 2y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ و } x = -2$$

نقطه $(-2, 1)$ در خط $mx + 7y = 5$ صدق می کند:

$$m(-2) + 7(1) = 5 \Rightarrow -2m = -2 \Rightarrow m = 1$$

دشوار

-۲۷

$$r = OS = \sqrt{x^2 + 64} = 10$$

$$x^2 + 64 = 100 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

(ب)

$$P(-10, 0) \Rightarrow \text{شیب } PS = \frac{8-0}{6-(-10)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$Q(10, 0) \Rightarrow \text{شیب } SQ = \frac{8-0}{6-10} = \frac{8}{-4} = -2$$

(پ) چون شیب های قرینه و معکوس یکدیگرند سپس در رأس S قائمه است.

متوسط

-۲۰

حواسون باشه ها! این فرمول را حتما بخاطر بسپارید.

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اثبات: (۱) ابتدا نقطه ای از خط $ax + by + c = 0$ در نظر می گیریم.

$$\left(\alpha, -\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}\right)$$

(۲) فاصله این نقطه را از خط $ax + by + c' = 0$ به دست می آوریم:

$$\frac{|a\alpha + b(-\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}) + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a\alpha - a\alpha - c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

متوسط

-۲۱

با توجه به فرمول به دست آمده در سوال قبل:

$$\sqrt{3}y - 3x + 5 = 0$$

$$y - \sqrt{3}x + 1 = 0 \xrightarrow{\times\sqrt{3}} \sqrt{3}y - 3x + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2}} = \frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

آسان

-۲۲

نقطه روی خط $y = x + 1$ به صورت $(\alpha, \alpha + 1)$ است.

$$\frac{|2\alpha - \alpha - 1 + 3|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |\alpha + 2| = 5$$

$$\alpha + 2 = 5 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\alpha + 2 = -5 \Rightarrow \alpha = -7$$

متوسط

-۲۳

باتوجه به شیب های خط خطوط داریم:

$$\begin{array}{ccc} A & 2x+3y+5=0 & B \\ x-2y-1=0 & \square & x-2y-3=0 \\ D & 2x+3y-1=0 & C \end{array}$$

ابتدا فاصله دو ضلع موازی AB و DC را می یابیم:

$$BC = AD = \frac{|5 - (-1)|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

سپس فاصله دو ضلع موازی AD و BC را می یابیم:

$$AB = DC = \frac{|-1 - (-3)|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{محیط} = 2\left(\frac{6}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$



آسان

۱- گزینه «۳»

$$x_A = 2n - 3, \quad y_A = \frac{1}{2} - 3n$$

$$x_A = 3y_A + 1 \Rightarrow 2n - 3 = 3\left(\frac{1}{2} - 3n\right) + 1$$

$$\Rightarrow 2n - 3 = \frac{3}{2} - 9n + 1 \Rightarrow 11n = \frac{11}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A(-2, -1) \Rightarrow A \text{ در ربع سوم قرار دارد.}$$

آسان

۲- گزینه «۳»

A در ربع دوم است بنابراین x منفی و y مثبت است.

$$-2m < 0 \Rightarrow m > 0, \quad 3m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$$

باتوجه به گزینه‌ها تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد اما ادامه با حل آن داریم:

اگر بخواهد فاصله A تا محورهای یکسان باشد یعنی باید قدرمطلق طول و عرض آن برابر باشند:

$$|x| = |y| \Rightarrow \begin{cases} 3m - 1 = -2m \Rightarrow 5m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{5} \text{ غ ق} \\ 3m - 1 = 2m \Rightarrow m = 1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

آسان

۳- گزینه «۳»

در ربع چهارم طول مثبت و عرض منفی است.

$$m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$3m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{3} \quad \cap \quad -2 < m < -\frac{1}{3}$$

آسان

۴- گزینه «۲»

طول نقطه M متشکل از یک عبارت نامنفی و یک عدد مثبت است پس همواره

مثبت است پس تا اینجا نواحی ۲ و ۳ حذف هستند.

اما در مورد علامت $n^2 - 1$ نمی‌توان نظری داد یعنی ممکن است مثبت، منفی

یا صفر باشد طبق گفته سوال روی مرز است پس $n^2 - 1 = 0$ و $n = \pm 1$

است و نقطه روی مرز نواحی ۱ و ۴ قرار دارد.

آسان

۲۸-

فاصله pA و pB را حساب کرده فاصله کم‌تر جواب مسئله است.

$$pA = \sqrt{(50-10)^2 + (30+20)^2} = \sqrt{1600 + 2500} = \sqrt{4100}$$

$$pB = \sqrt{(50-80)^2 + (30-90)^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500}$$

چون $pA < pB$ است پس پایگاه A مناسب‌تر است.

متوسط

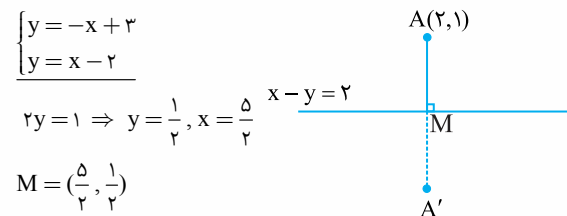
۲۹-

(۱) ابتدا معادله خط AM را می‌یابیم:

چون $x - y = 2$ عمود بر AM است شیب آن قرینه و معکوس است:

$$y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3 \quad \text{معادله خط} \quad A(2, 1), \text{ شیب} = -1$$

محل تلاقی $x - y = 2, y = -x + 3$ نقطه M خواهد بود.



حال قرینه $A(2, 1)$ را نسبت به $M(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ پیدا می‌کنیم:

$$x = 2\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = 3$$

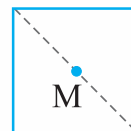
$$y = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

آسان

۳۰-

فاصله نقطه M تا خط $2y + x = 1$ نصف طول ضلع مربع است پس:

$$2y + x = 1$$



$$\frac{|2(4) + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

یعنی طول ضلع مربع $\frac{14}{\sqrt{5}}$ است پس مساحت مربع:

$$S = \left(\frac{14}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{196}{5}$$

$$\Rightarrow 4y = 3\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = \sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{9}{4} \Rightarrow C\left(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$AB = 3$$

$$AC = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{108}{16}} = \frac{\sqrt{108}}{4}$$

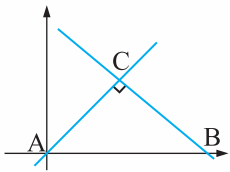
$$BC = \sqrt{\left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

طول ضلع **AB** از همه بیشتر است که برابر ۳ است.

روش دوم:

دو خط $y + \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}y = x$ بر هم عمودند پس خط **AB** وتر

مثلث قائم‌الزاویه است و بزرگترین ضلع محسوب می‌شود.



متوسط

۹- گزینه «۲»

چون نقطه **C** روی خط $y = 2x + 1$ است پس مختصات آن $C(x, 2x + 1)$ است:

$$AC = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (2x+1)^2} = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 4 + 4x^2 + 4x + 1 = 25 \Rightarrow 5x^2 - 2x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{5}x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} C_1(2, 5) \\ C_2(-2, -3) \end{cases}$$

$$OC_1 = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$OC_2 = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

پس $\sqrt{29}$ بزرگ‌تر است.

حواست باشد فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از مبدأ $\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ است.

متوسط

۱۰- گزینه «۳»

$$AB = \sqrt{(2 + \sqrt{2} - 2)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{(3 - 2)^2 + (5 + \sqrt{2} - 5)^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{(3 - 2 - \sqrt{2})^2 + (5 + \sqrt{2} - 4)^2} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2} \\ = \sqrt{1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

از برابری $AB = AC$ نتیجه می‌گیریم مثلث متساوی‌الساقین است. اما از

اونجایی که در گزینه‌ها قائم‌الزاویه اومده پس بررسی می‌کنیم رابطه فیثاغورس

برقرار هست یا نه.

BC بزرگ‌ترین ضلع هست پس ممکنه وتر باشه:

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 6 = 3 + 3$$

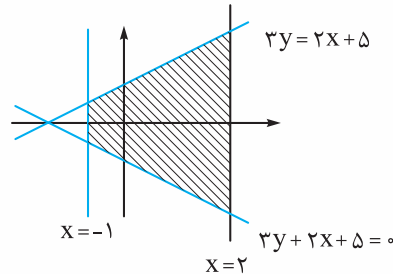
آسان

۵- گزینه «۳»

با کمی دقت در معادله‌های خطوط، می‌دانیم که دو خط $x = 2$ ، $x = -1$

موازی هم هستند اما دو خط دیگر با شیب‌های $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ ارتباط خاصی باهم

ندارند. چهار ضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد دوزنقه است.



متوسط

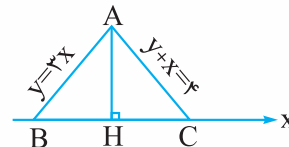
۶- گزینه «۴»

دو خط $y + x = 4$ ، $y = 3x$ با شیب‌های ۳ و -۱ هستند محل

تقاطع این دو خط، یک رأس مثلث را به ما می‌دهد.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3(1) = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$



از آنجایی که ضلع سوم محور **x** هاست پس فاصله **A** تا محور **x** ارتفاع مثلث

را به ما می‌دهد که همان عرض **A** است پس $AH = 3$.

محل برخورد دو خط با محور **x** را هم به دست می‌آوریم:

$$y = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow BC = 4 - 0 = 4 \Rightarrow S = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

آسان

۷- گزینه «۴»

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} \Rightarrow 15 = 5 \times x \Rightarrow x = 3$$

پس طول مستطیل ۵ و عرض آن ۳ هست.

دشواری

۸- گزینه «۱»

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{3}y = x \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y + \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0)$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}y = x \\ y + \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow y + \sqrt{3}(\sqrt{3}y) = 3\sqrt{3} \Rightarrow y + 3y = 3\sqrt{3}$$

دشوار

۱۵- گزینه «۴»

$$a \times a' = -1 \Rightarrow a' = -\frac{1}{a}$$

$$a + a' = 1 \Rightarrow a - \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad a' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x + b$$

$$y = a'x + b' \Rightarrow y = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)x + b'$$

با شیب منفی کار داریم پس نقطه A را در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$A(2, 1) \Rightarrow 1 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)(2) + b' \Rightarrow b' = \sqrt{5}$$

دشوار

۱۶- گزینه «۲»

شیب خط برابر $-\frac{3}{4}$ هستش پس شیب MH برابر $\frac{4}{3}$ هست که میشه:

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1) : \text{معادله خط MH}$$

$$\Rightarrow 3y - 6 = 4x - 4 \Rightarrow 4x - 3y + 2 = 0$$

H محل تلاقی در خط است.

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 3x + 4y = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - 12y = -8 \\ 9x + 12y = 108 \end{cases} \Rightarrow 25x = 100 \Rightarrow x = 4$$

$$\xrightarrow{\text{معادله اول}} 16 - 3y = -2 \Rightarrow 16 + 2 = 3y \Rightarrow 3y = 18 \Rightarrow y = 6$$

$$\Rightarrow H(4, 6)$$

البته خواسته سوال فقط $x = 4$ است.

متوسط

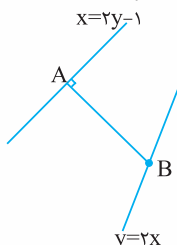
۱۷- گزینه «۲»

$$x = 2y - 1 \xrightarrow{y=2} x = 3 \Rightarrow A(3, 2)$$

شیب خط $x = 2y - 1$ برابر $\frac{1}{2}$ است پس شیب AB برابر ۲- است اگر

فرض کنیم $B(x, y)$ باشد:

$$\text{معادله خط AB: } y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow 2x + y = 8$$



از طرفی B روی خط $y = 2x$ قرار دارد پس:

$$2x + y = 8 \xrightarrow{y=2x} 2x + 2x = 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2, 4)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(2-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

آسان

۱۱- گزینه «۳»

$$A(-2, 0), B(x, y), O(0, 0)$$

$$AB = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$AO = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

شرط متساوی‌الاضلاع بودن یک مثلث این هست که هر سه ضلع مساوی باشند:

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad (2)$$

(2) را در (1) جای گذاری می‌کنیم:

$$4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{(2)} 1 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow B(-1, \sqrt{3}) \text{ یا}$$

$$B(-1, -\sqrt{3}) \text{ در گزینه‌ها نیست.}$$

آسان

۱۲- گزینه «۱»

مختصات M به صورت $(x, 4x + 2)$ نوشته می‌شود.

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (4x+2-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (4x+2-\cancel{2})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{x^2} + 16\cancel{x^2} + 16x + 4 = \cancel{x^2} + 16\cancel{x^2} \Rightarrow 16x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

آسان

۱۳- گزینه «۴»

میانۀ وارد بر ضلع BC همان میانه‌ای است که از رأس A به وسط BC وصل

شده پس ابتدا M وسط BC رو پیدا می‌کنیم و بعد طول AM رو به دست

میاریم.

$$M \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) \Rightarrow M \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+5}{2} \right) = M(1, 3)$$

$$AM = \sqrt{(1+1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۴»

نقاط A و B نیز روی خط قرار دارند و $C(x, x-2)$. نقطه C از A و B به

یک فاصله است بنابراین C وسط پاره خط AB است یعنی:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow C(2, 1)$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

عرض نقطه C برابر ۱ است.

دشوار

۲۲- گزینه «۱»

$$x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$$

پس فرض می‌کنیم مختصات نقطه به صورت $(x, -\frac{x}{2})$ باشد:

خط $y = x$ را به فرم استاندارد فاصله نقطه از خط می‌نویسیم:

$$x - y = 0 \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|x - (-\frac{x}{2})|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |\frac{3x}{2}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 3x = 4\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow A(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}) \\ \frac{3x}{2} = -2\sqrt{2} \Rightarrow x = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow B(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(\frac{8\sqrt{2}}{3})^2 + (\frac{4\sqrt{2}}{3})^2} = \frac{\sqrt{10}}{3} \times \sqrt{80} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

$$CH = \frac{|1(0) + 2(3) - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{20\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{10}$$

متوسط

۲۳- گزینه «۲»

نقطه بر خط $y = x - 1$ را به صورت $A(x, x-1)$ در نظر می‌گیریم:

$$AH = \frac{|2x - 3(x-1) - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|2x - 3x + 3 - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{|-x - 2|}{\sqrt{13}}$$

فاصله برابر $\sqrt{13}$ شده پس داریم:

$$\frac{|x+2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |x+2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} x+2=13 \Rightarrow x=11 \\ x+2=-13 \Rightarrow x=-15 \end{cases}$$

متوسط

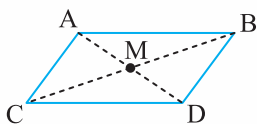
۲۴- گزینه «۳»

تو این مدل سوال‌ها اول چک می‌کنیم A در دو خط داده شده صدق می‌کند یا

نقطه‌ای خارج از این دو ضلع است؟

$A(7, 6)$ در هیچ‌کدام از خطوط صدق نمی‌کند پس A خارج از دو خط

هست. پس معادله خطوط داده شده مربوط به BD و DC هست.



$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 4$$

$$A \begin{vmatrix} 7 \\ 6 \end{vmatrix}, D \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{وسط } AD \text{ م } M \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \Rightarrow M(3, 5) \quad \text{بنابراین:}$$

آسان

۱۸-5- گزینه «۳»

اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه هم بر آن عمود است یعنی شیب آن عکس و قرینه شیب AB است هم از وسط آن یعنی M می‌گذرد:

$$M(\frac{3-1}{2}, \frac{4+0}{2}) = (1, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{4-0}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m_d = -1$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m_d(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1 + 2$$

$$\Rightarrow y = -x + 3 \text{ یا } x + y = 3$$

آسان

۱۹-5- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} AB: & \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1, 1) \\ AC: & \begin{cases} 2x - y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

برای محاسبه طول ارتفاع AH کافیست فاصله A را از BC به دست بیاوریم

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(1) + 1(1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

دشوار

۲۰-5- گزینه «۱»

قاعده را AC و ارتفاع BH در نظر می‌گیریم:

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

فاصله نقطه B از قاعده $BH =$

بنابراین اول معادله خط AC رو می‌نویسیم:

$$m_{AC} = \frac{2-1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$$

حالا با نقطه A , m_{AC} معادله می‌نویسیم:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y = -x + 4$$

$$\Rightarrow x + 3y - 4 = 0 \xrightarrow{B(4,1)} BH = \frac{|4 + 3 - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AC \times BH = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

توجه: راه‌حل تستی دیگری در تست شماره ۳۱ آورده شده که با داشتن مختصات سه رأس یک مثلث بتونیم مساحت رو پیدا کنیم. حتماً بهش سر بزن که خیلی جذابه!

دشوار

۲۱-5- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} d_1: & \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2, -1) \\ d_2: & \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1: & \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-2, 2) \\ d_3: & \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}) \end{aligned}$$

$$d_2: \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$$

$$AC = \sqrt{(\frac{2}{3}-2)^2 + (-\frac{5}{3}+1)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$m_{AC} = \frac{-\frac{5}{3} - (-1)}{\frac{2}{3} - 2} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}} = 1 \Rightarrow y + 1 = x - 2 : AC \text{ معادله}$$

$$BH \text{ ارتفاع} = \frac{|-2-3-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\sqrt{2} \times \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}$$

۲۵- گزینه «۳»

آسان

مختصات نقطه A رو با برخورد دادن AB, AC پیدا می‌کنیم و بعد به کمک

شیب BC, شیب خط AH به دست می‌آوریم و معادله می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} AB: & \begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 3 \\ -2y + 4x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 9 \\ 3x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 3 \end{cases} \\ AC: & \begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 3 \\ -2y + 4x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 9 \\ 3x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3$$

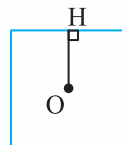
$$m_{BC} = \frac{-3}{2} \Rightarrow M_{AH} = \frac{2}{3}$$

$$AH: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 3) \xrightarrow{\times 3} 3y - 9 = 2x - 6 \Rightarrow 3y - 2x = 3$$

۲۶- گزینه «۴»

متوسط

معادله رو به فرم استاندارد بنویسیم:



$$x - 2y + 5 = 0$$

$$OH = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{طول ضلع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

۲۷- گزینه «۱»

دشوار

معادله خط به فرم استاندارد به صورت $mx - 2y + b = 0$ هست و از طرفی

(۱, ۲) نقطه‌ای از خط است پس در معادله صدق می‌دهیم:

$$m(1) - 2(2) + b = 0 \Rightarrow m + b = 4 \quad (1)$$

فاصله $O(0, 0)$ تا خط رو به دست بیاریم:

$$OH = 1 \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{m^2 + 4}} = 1 \Rightarrow \sqrt{m^2 + 4} = |b| \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^2 + 4 = b^2$$

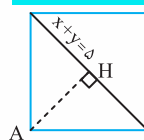
$$b^2 - m^2 = 4 \Rightarrow (b - m)(\underbrace{b + m}_f) = 4 \xrightarrow{(1)} b - m = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + m = 4 \\ b - m = 1 \end{cases}$$

$$2b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{اولی}} \frac{5}{2} + m = 4 \Rightarrow m = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

۲۸- گزینه «۴»

متوسط



می‌دانیم که در مربع قطرهای هم بر همدیگر عمودند و هم یکدیگر را نصف

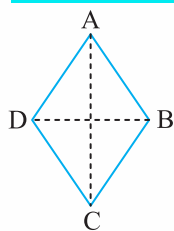
می‌کنند. پس فاصله رأس A تا قطر رو به دست می‌آریم:

$$AH = \frac{|-2 + 1 - 5|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

AH نصف یک قطر است پس طول قطر دو برابر AH است یعنی $6\sqrt{2}$

۲۹- گزینه «۱»

متوسط



خواست باشه اگه خود سوال ترتیب اسم‌گذاری رأس‌های یک چندضلعی رو

بهت نداد، خودت به ترتیب به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد اسم‌گذاری کنی

پس ABCD اسم لوزی ما هست.

لوزی یک نوع متوازی‌الاضلاع هست پس ویژگی رئوس متوازی‌الاضلاع رو

داره:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 6 + 6 = 5 + x_D \Rightarrow x_D = 7$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 + 8 = 5 + y_D \Rightarrow y_D = 5$$

$$\Rightarrow D(7, 5) \quad \text{هم طول} \quad AC \quad |8 - 2| = 6 \quad \text{هم عرض} \quad BD \quad |7 - 5| = 2$$

$$\Rightarrow S_{\text{لوزی}} = \frac{1}{2} (\text{حاصل ضرب قطرها}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

۳۰- گزینه «۳»

دشوار

برای محاسبه مختصات محل تلاقی میانه‌های یک مثلث کافی بین xها و yهای

سه رأس میانگین بگیریم:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = (2, 0)$$

$$\Rightarrow GM = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

۳۱- گزینه «۲»

دشوار

برای محاسبه مساحت یک مثلث با داشتن مختصات سه رأس A, B, C از

فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(1+2+3) - (4+5+6)|$$

در این سوال داریم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-2-12+0) - (0+0-6)| = \frac{1}{2} |-14+6| = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

۳۳- گزینه «۳»

دشوار

طبق فرمولی که توی تست ۳۱ داشتیم، مساحت مثلث ΔMNP را به دست می‌آوریم:

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \frac{(2-6+3)}{5} - \frac{(9+4-4)}{9} \right| = \frac{1}{2} (4) = 2$$

از طرفی مثلثی که رئوسش نقاط میانی یک مثلث دیگر باشند، مساحتش $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اصلی است پس:

$$S_{ABC} = 4S_{MNP} = 4(2) = 8$$

۳۳- گزینه «۱»

دشوار

ابتدا برای یافتن رأس B دستگاه بین خطوط AB و BC می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} -2y - 4x = -14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \Rightarrow -11x = -33$$

$$x = 3, y = 1 \quad B(3, 1)$$

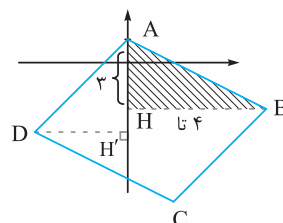
حال فاصله رأس B از خط AC طول ارتفاع BH را به ما می‌دهد:

$$BH = \frac{|4 - 9 - 17|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{22}{5} = 4 \frac{2}{5}$$

۳۴- گزینه «۳»

دشوار

با استفاده از موقعیت نقاط روی دستگاه مختصات:



چون دو مثلث ABH و ADH' هم‌نهشت هستند پس

$$DH' = AH = 3 \Rightarrow x_D = -3$$

روش دوم:

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \text{طول ضلع مربع}$$

$$AB = \frac{-3}{4} \Rightarrow \text{شیب } AD = \frac{4}{3}$$

$$AD \text{ معادله خط: } y - 1 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{4x + 3}{3} \Rightarrow D(x, \frac{4x + 3}{3})$$

$$AB \text{ معادله خط } = y - 1 = \frac{-3}{4}(x - 0) \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0$$

$$AB \text{ ضلع مربع} = \text{فاصله نقطه } D \text{ تا خط } AB = 5$$

$$\frac{|3x + 4y - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|3x + 4(\frac{4x + 3}{3}) - 4|}{5} = 5$$

$$\Rightarrow |3x + \frac{16x + 12}{3} - 4| = 25 \Rightarrow \frac{|9x + 16x + 12 - 12|}{3} = 25$$

$$|25x| = 75 \Rightarrow \begin{cases} 25x = 75 \Rightarrow x = 3 \text{ غ قق} \\ 25x = -75 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

D ربع سوم است پس $x < 0$

۳۵- گزینه «۴»

متوسط

با توجه به فرمول فاصله نقطه از خط در مثلث ABC باید فاصله نقطه A تا خط BC را به دست آوریم پس ابتدا معادله خط BC را می‌نویسیم:

$$\text{شیب } BC = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 3}{2 - 7} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$BC \text{ معادله خط } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 7)$$

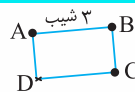
$$\Rightarrow y - x + 4 = 0$$

$$BC \text{ از } A \text{ فاصله } d = AH = \frac{|y - x + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{|5 - 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{با گویا کردن جواب نهایی:}$$

۳۶- گزینه «۳»

دشوار



با توجه به شکل ابتدا معادله خط AB را می‌نویسیم:

$$A(2, 4) \text{ و } \text{شیب} = 3$$

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 2$$

چون ضلع BC بر ضلع AB عمود است پس شیب‌های آن قرینه و معکوس

$$\text{یکدیگرند پس شیب } BC = -\frac{1}{3}$$

$$C(-3, -1)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - 2$$

حال اگر، فاصله نقطه C از ضلع AB را به دست آوریم طول ضلع BC حساب

می‌شود پس:

$$y - 3x + 2 = 0, C(-3, -1) \Rightarrow BC = \frac{|-1 + 9 + 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$$

از طرفی با حل دستگاه معادلات خط AB و BC می‌توان مختصات B را به

$$3x - 2 = -\frac{1}{3}x - 2 \quad \text{دست آورد پس:}$$

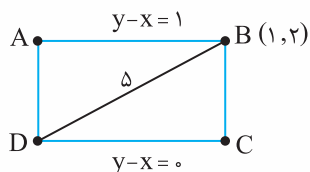
$$x = 0, y = -2 \quad B(0, -2) \Rightarrow AB = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل (عرض + طول) 2

$$2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 2(3\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$



نقطه $(1, 2)$ در خط $y - x = 1$ صدق می‌کند پس معادلات ضلع به صورت مقابل خواهد بود.



با استفاده از فاصله نقطه از خط طول ضلع BC را به دست می‌آوریم پس:

$$BC = \frac{|2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حال با استفاده از فیثاغورس در مثلث BCD داریم:

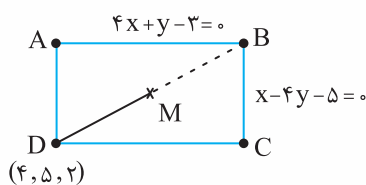
$$BD^2 = BC^2 + DC^2$$

$$5^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + DC^2 \Rightarrow 25 = \frac{1}{2} + DC^2 \Rightarrow 25 - \frac{1}{2} = DC^2 \Rightarrow DC^2 = \frac{49}{2}$$

$$DC = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} \xrightarrow[\text{مساحت مستطیل}]{\text{در نتیجه}} S = BC \times DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{7}{2}$$

دشوار

۴- گزینه «۱»



بیشترین فاصله M از اضلاع، فاصله نقطه M تا ضلع BC خواهد بود پس

می‌توان با محاسبه طول‌های مستطیل و نصف کردن آن‌ها به بیشترین فاصله

M از اضلاع رسید پس ابتدا فاصله D تا خط BC را محاسبه می‌کنیم تا طول

ضلع DC حساب شود.

$$DC = \frac{|4/5 - 8 - 5|}{\sqrt{16+1}} = \frac{8/5}{\sqrt{17}} = \frac{8}{5\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{85}$$

با گویا کردن جواب و نصف کردن آن به جواب مسئله می‌رسیم:

$$\frac{8\sqrt{17}}{85} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{8 \times \sqrt{17}}{85 \times \sqrt{17}} = \frac{8}{85} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{4}{85}$$

$$AD = \frac{|4(4/5) + 2 - 3|}{\sqrt{16+1}} = \frac{17}{85} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{5} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{\sqrt{17}}{10}$$

روش دوم:

مختصات B (محل برخورد دو ضلع AB و BC) را به دست آورده و مختصات

M وسط AB را به دست آورده و فاصله M را تا اضلاع AB و BC به دست

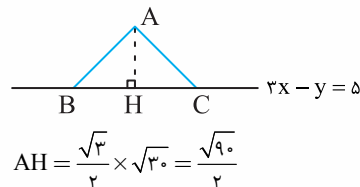
می‌آوریم.

دشوار

۳۷- گزینه «۲»

محیط مثلث مورد سوال $\sqrt{270} = 3\sqrt{30}$ است پس طول هر ضلع آن $\sqrt{30}$ خواهد

بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ضلع است یعنی:



فاصله نقطه A تا خط $3x - y = 5$ برابر $\frac{\sqrt{90}}{2}$ است. پس با نوشتن معادله

خط AH نقطه A را به صورت پارامتری نوشته و فاصله آن را از خط

$3x - y = 5$ برابر $\frac{\sqrt{90}}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$AH = -\frac{1}{3}$$

$$H = (2, 1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow[\text{نقطه A}]{\text{نقطه A}} (\alpha, \frac{5-\alpha}{3})$$

$$\text{فاصله AH} : \frac{|\frac{5-\alpha}{3} - \frac{5-\alpha}{3} - 1|}{\sqrt{\frac{1}{9} + 1}} = \frac{\sqrt{90}}{2} \Rightarrow (\alpha - 2)^2 = \frac{81}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha - 2 = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{13}{2}$$

متوسط

۳۸- گزینه «۱»

نقطه A به صورت $(x, -x + a)$ است فاصله AB و AC را می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (-x+a-2)^2} = \sqrt{29} \Rightarrow 2x^2 + (10-2a)x + (a-2)^2 = 20$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (-x+a-4)^2} = 5 \Rightarrow 2x^2 + (10-2a)x + (a-4)^2 = 24$$

با برابر قرار دادن دو معادله ی فوق خواهیم داشت:

$$20 - (a-2)^2 = 24 - (a-4)^2$$

$$20 - (a^2 - 4a + 4) = 24 - (a^2 - 8a + 16)$$

$$20 - a^2 + 4a - 4 = 24 - a^2 + 8a - 16 \Rightarrow 8 = 4a \Rightarrow a = 2$$

دشوار

۳۹- گزینه «۲»

چون دو خط موازی هستند داریم:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

اگر $a = 1$ باشد نقطه $(1, 2)$ در هیچ‌کدام از خطوط صدق نمی‌کند پس

$a = 1$ فقط می‌تواند باشد.

$$f(-2) = 0$$

$$(-2)^3 + k(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$$

$$-8 + 4k + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

پس $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ است حال با تقسیم چکشی عبارت بر

$x + 2$ تجزیه آن را داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad | \quad x + 2 \\ -x^3 - 2x^2 \quad \quad \quad | \quad x + 2 \\ \hline -x - 2 \quad \quad \quad \quad | \quad x + 2 \\ +x + 2 \quad \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \quad \\ \hline 0 \end{array}$$

با تجزیه عبارت $(x^2 - 1)(x + 2)$: $(x + 2)(x - 1)(x + 1)$ و ریشه‌ها

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$$

آسان

-۳

حواستون باشه! برای نوشتن معادله درجه دو زمانی که ریشه‌های آن را دارید

از رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ استفاده می‌کنید.

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}, S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$S = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$P = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

پس معادله درجه ۲، $x^2 - 4x + 1 = 0$ است.

آسان

-۴

مستطیل روبه رو را در نظر بگیرید با توجه به اطلاعات مستطیل اگر α, β را

ریشه‌های معادله درجه ۲ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\alpha \quad \beta \quad \text{محیط: } 2(\alpha + \beta) = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} = S$$

$$\text{مساحت: } \alpha\beta = 6 = P$$

$$x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(12) = 121 - 48 = 73$$

چون دلتا مثبت است پس این معادله ۲ ریشه دارد.

$$\text{ریشه‌ها} = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2(2)}$$

$$\alpha = \frac{11 + \sqrt{73}}{4}, \beta = \frac{11 - \sqrt{73}}{4}$$



آسان

-۱

$$\text{آ) } 3x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{چون ضریب صفر است پس}} x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ب) } 2x^3 + x^2 + 3x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(2x^2 + x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ ریشه ندارد}$$

$$\text{پ) } x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 3t - 4 = 0$$

هرگاه عبارتی تکراری در معادلات یافتید آن را t بگیرید

$$\xrightarrow{\text{چون } a+c=b} t_1 = -1, t_2 = 4 \xrightarrow{x^2 = t} x^2 = -1 \text{ ریشه ندارد}$$

پس $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{ت) } (4 - x^2)^2 - (4 - x^2) - 12 = 0 \xrightarrow{4 - x^2 = t} t^2 - t - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (t - 4)(t + 3) = 0 \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = -3$$

$$\xrightarrow{4 - x^2 = t} \begin{cases} 4 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 4 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\text{ث) } \left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0 \xrightarrow{\frac{x^2}{3} - 2 = t} t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{چون جمع ضرایب صفر است ریشه‌ها یکی و دیگری } \frac{c}{a} \text{ است}} t_1 = 1, t_2 = 6 \xrightarrow{\frac{x^2}{3} - 2 = t}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

آسان

-۲

حواستون باشه! روش دیگری که برای یافتن صفرهای تابع با ریشه‌های آن

استفاده می‌کنند زمانی که ۱ ریشه عبارت را داشته باشند تقسیم چکشی است.

یعنی $f(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است اگر a یک ریشه $f(x)$ باشد.

چون یکی از ریشه‌های این تابع (-2) است پس عبارت بر $x + 2$ بخش‌پذیر

است. یعنی:

-۵

متوسط

حواستون باشه! در کتاب درسی روابطی که برای S و P بیان شده تنها

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

روابط به دست آمده در قسمت آ، ب، ج و د را به خاطر بسپارید.

در معادله داده شده $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ، $s = 3$ و $p = \frac{3}{2}$ است پس:

$$I) (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Rightarrow s^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2p$$

$$\Rightarrow s^2 - 2p = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (3)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = 9 - 3 = 6$$

$$B) (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow s^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3sp$$

$$\Rightarrow s^3 - 3sp = \alpha^3 + \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (3)^3 - 3\left(\frac{3}{2} \times 3\right) = 27 - \frac{27}{2} = \frac{27}{2}$$

$$P) (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2(\alpha\beta)^2 \Rightarrow (s^2 - 2p)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2p^2$$

$$\Rightarrow (s^2 - 2p)^2 - 2p^2 = \alpha^4 + \beta^4$$

$$(6)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \alpha^4 + \beta^4 = 36 - 2\left(\frac{9}{4}\right) = 36 - \frac{9}{2} = \frac{63}{2}$$

$$T) \left. \begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= s^3 - 3ps = \frac{27}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= s^2 - 2p = 6 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{در هم ضرب شوند}} (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{27}{2} \times 6$$

$$\alpha^5 + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \beta^5 = 81 \Rightarrow \alpha^5 + \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) + \beta^5 = 81$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = 81 - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = 81 - p^2(s) = 81 - \left[\frac{9}{4} \times 3\right] = \frac{297}{4}$$

$$ث) (\alpha^3 + \beta^3)^2 = \alpha^6 + \beta^6 + 2(\alpha\beta)^3$$

$$(s^3 - 3ps)^2 - 2p^3 = \alpha^6 + \beta^6 \Rightarrow \left(\frac{27}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \alpha^6 + \beta^6$$

$$= \frac{729}{4} - \frac{54}{4} = \alpha^6 + \beta^6 \Rightarrow 177/4 = \alpha^6 + \beta^6$$

$$ج) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \xrightarrow[\text{به توان ۲ طرفین}]{\text{}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2 \Rightarrow s + 2\sqrt{p} = A^2$$

$$\sqrt{s + 2\sqrt{p}} = A \Rightarrow \sqrt{6 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}} = A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

$$د) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{s}{p} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$ح) \beta\sqrt{\beta} + \alpha\sqrt{\alpha} = A \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{}} (\beta\sqrt{\beta} + \alpha\sqrt{\alpha})^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \beta^3 + \alpha^3 + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = A^2$$

$$s^3 - 3sp + 2p\sqrt{p} = A^2$$

-۴

آسان

حواستون باشه! رأس سهمی زمانی که دهنه سهمی به سمت بالا است

($a > 0$) مینیمم سهمی محسوب می‌شود (min) و رأس سهمی زمانی که دهنه سهمی به سمت پایین است ($a < 0$) ماکزیمم سهمی است (max)

$$I) f(x) = -2x^2 + 8x - 5 \Rightarrow \begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \\ y_s = \frac{-\Delta}{4a} \text{ یا } x_s \text{ جایگذاری} \end{cases}$$

$$y_s = -2(2)^2 + 8(2) - 5 = -8 + 16 - 5 = 3$$

چون دهنه سهمی به سمت پایین است ماکزیمم است.

$$B) g(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_s = \frac{-6}{6} = -1 \\ y_s = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 3 - 6 + 5 = 2 \end{cases}$$

چون دهنه سهمی به سمت بالا است مینیمم است.

-۷

آسان

حواستون باشه! برای نوشتن معادله سهمی زمانی که دو ریشه داده شده باشد

از رابطه $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ و زمانی که رأس سهمی داده شده باشد از

رابطه $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ استفاده می‌کنیم.

(آ) در این سهمی محور تقارن داده شده است و از سال دهم می‌دانیم که

فاصله ریشه‌ها تا محور تقارن سهمی یکسان است پس ریشه دیگر این سهمی

$x = 4$ است.

$$y = a(x - 2)(x - 4) \xrightarrow[\text{برای پیدا کردن } a]{\text{جایگذاری نقطه } \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}} 4 = a(0 - 2)(0 - 4)$$

$$4 = 8a \Rightarrow \frac{1}{2} = a$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 8) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

(ب) در این شکل رأس سهمی داده شده است پس:

$$y = a(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = a(1 - 2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$y = -(x - 2)^2 + 1$$

-۸

آسان

حواستون باشهها!

(۱) علامت a : دهنه سهمی (بالا a مثبت، پایین a منفی) در معادله درجه ۲،

(۲) علامت b : روش کتاب (از روی x_s تعیین می‌شود) $ax^2 + bx + c = 0$

روش دیگر (شیب محل برخورد با محور y ها)

(۳) علامت c : محل برخورد با محور y ها

(۴) علامت Δ : تعداد محل برخورد با محور x ها

در این سهمی چون دهنه سهمی به سمت بالاست پس $c > 0$ است. چون x_s

در قسمت منفی هاست پس:

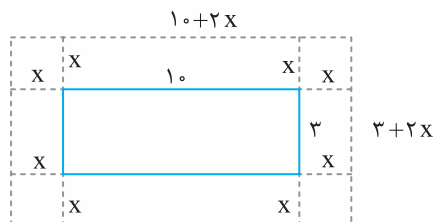
$$b < 0 \Rightarrow (-) = \frac{+(b)}{2(+)} \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a}$$

چون محل برخورد با محور y ها مثبت است پس $a > 0$ و در آخر چون ۲

ریشه دارد $\Delta > 0$

-۹

متوسط



مساحت آبراه از تفاضل مساحت‌های دو مستطیل در شکل مقابل به دست

می‌آید.

$$(10 + 2x)(3 + 2x) - 10 \times 3 = 14$$

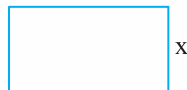
$$4x^2 + 26x + 30 - 30 = 14 \Rightarrow 4x^2 + 26x - 14 = 0$$

$$(4x - 2)(x + 7) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -7 \text{ غ ق ق}$$

-۱۰

آسان

$$4x + 1$$



S دیوار = (S) یک کاشی $\times$ (تعداد کاشی)

$$2000 \times S = 6000 \text{ cm}$$

$$S = (4x + 1)(x) \text{ کاشی}$$

$$S = 3 \text{ cm یک کاشی}$$

$$3 = 4x^2 + x \Rightarrow 0 = 4x^2 + x - 3$$

$$\text{ق ق ق } x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$$

-۱۱

آسان

(۱) ریشه مضاعف یعنی $\Delta = 0$

حواستون باشهها!

(۲) ریشه مثبت مضاعف $-\frac{b}{2a} > 0$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 16 - 4(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow 16 - 4m^2 + 12m = 0$$

$$4m^2 - 12m - 16 = 0 \Rightarrow 4(m^2 - 3m - 4) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 4$$

$$\text{ریشه مثبت } m = -1 \Rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

$$\text{ریشه منفی } m = 4 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{4(4)} = -\frac{1}{4}$$

پس $m = -1$ قابل قبول است چون ریشه مثبت تولید کرده است.

-۱۲

آسان

(۱) معادله درجه دوم زمانی دو ریشه حقیقی متمایز دارد که

حواستون باشهها! $\Delta > 0$

(۲) در معادله درجه دوم ضریب x^2 نباید صفر باشد.

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m^2 - 5m + 2) > 0$$

$$9 - 2m^2 + 5m - 2 > 0 \Rightarrow 0 > -2m^2 + 5m + 7$$

$$m = -1, m = \frac{7}{2}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -1 & \frac{7}{2} & +\infty \\ \hline & - & + & - & \end{array}$$

$$(-\infty, -1) \cup (\frac{7}{2}, +\infty) \quad (-\infty, -1) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$$

$$a \neq 0 \Rightarrow 2m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

با اشتراک دو شرط خواهیم داشت $(-\infty, -1) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$

-۱۳

دشوار

حواستون باشهها! معادله درجه ۴ زمانی ۴ ریشه حقیقی متمایز دارد که

$p > 0, s > 0, \Delta > 0$ باشد.

$$1) s > 0 \Rightarrow \frac{m+2}{1} > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m > -5$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0 \Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m > 4 \text{ یا } m < -4$$

از اشتراک این سه شرط خواهیم داشت $m > 4$

-۱۴

متوسط

حواستون باشه! در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p$$

و در آخر همیشه چک شود که $\Delta > 0$

چون $\frac{c}{a} < 0$ است، شرط $\Delta > 0$ همواره برقرار است.

$$2x^2 + (m-1)x - 1 = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p = \left(\frac{-(m-1)}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\frac{m^2 - 2m + 1}{4} + 1 = \frac{13}{4} \Rightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 9 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m = 4, m = -2$$

$$\text{اگر } m = 4 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-2) = 9 + 8 = 17 > 0$$

$$\text{اگر } m = -2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-2) = 9 + 8 = 17 > 0$$

هر دو قابل قبول هستند چون $\Delta > 0$ را حفظ کرده‌اند.

-۱۵

دشوار

حواستون باشه! اگر از فرمول‌های مربوط به α, β نتوانستیم استفاده کنیم از تعریف ریشه استفاده می‌کنیم.

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad s = 2, p = -4$$

چون α ریشه معادله است پس در آن صدق می‌کند در نتیجه:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha$$

در نتیجه در عبارت $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ می‌توان 2α را جایگزینی کرد پس:

$$(2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) = 4(s^2 - 2p) \\ = 4(4 - 2(-4)) = 4(4 + 8) = 4(12) = 48$$

-۱۶

متوسط

حواستون باشه! شرط آن که معادله درجه دو، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته باشد.

$$\Delta > 0, s > 0, p > 0$$

$$1) s > 0 \Rightarrow \frac{2m+2}{1} > 0 \Rightarrow 2m > -2 \Rightarrow m > -1$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{m^2-4}{1} > 0 \Rightarrow m^2 > 4 \Rightarrow m > 2 \text{ یا } m < -2$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow (2m+2)^2 - 4(m^2-4) > 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 16 > 0 \Rightarrow 8m + 20 > 0 \Rightarrow m > -\frac{5}{2}$$

با اشتراک سه شرط خواهیم داشت: $m > 2$

-۱۷

متوسط

حواستون باشه! معادله درجه دو زمانی دو ریشه حقیقی منفی دارد که

$$\Delta > 0, s < 0, p > 0$$

$$1) s < 0 \Rightarrow \frac{2a}{a-5} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 5 & \\ \hline & + & - & + \end{array} \quad 0 < a < 5$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{-4}{a-5} > 0 \Rightarrow a-5 < 0 \Rightarrow a < 5$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow 4a^2 - 4(-4a+20) > 0 \Rightarrow 4a^2 + 16a - 80 > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} a^2 + 4a - 20 > 0$$

$$\Delta = +16 - 4(-20) = 16 + 80 = 96$$

$$a = \frac{-4 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$

$$a < -2 - 2\sqrt{6} \cup a > -2 + 2\sqrt{6}$$

اشتراک این سه جواب جواب نهایی سوال است. $-2 + 2\sqrt{6} < a < 5$

-۱۸

دشوار

حواستون باشه! به معادلاتی به فرم $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ، معادلات نیم

مجذوری گفته می‌شود و زمانی این معادلات ۱ ریشه حقیقی دارند که $p < 0$ و

یا $\Delta = 0$ (اگر $\Delta = 0$ باشد، m جواب ندارد)

$$p < 0 \Rightarrow \frac{-m+2}{m-1} < 0 \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & 2 & \\ \hline & - & + & - \end{array}$$

$$m : (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

-۱۹

متوسط

حواستون باشه! از رابطه $x^2 - sx + p = 0$ برای نوشتن معادله استفاده می‌کنیم.

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 6, p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

ما به دنبال معادله‌ای هستیم که جواب‌های آن $\frac{\beta}{2} - 1, \frac{\alpha}{2} - 1$ باشد پس:

$$\text{جدید } s = \frac{\alpha}{2} - 1 + \frac{\beta}{2} - 1 = \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \xrightarrow{\alpha + \beta = 6} \frac{6}{2} - 2 = 1$$

$$\text{جدید } p = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\frac{\beta}{2} - 1\right) = \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 1 = \frac{\alpha\beta}{4} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{4} - 3 + 1 = -\frac{3}{2}$$

پس $2x^2 - 2x - 3 = 0$ و یا در صورت ساده کردن $x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$

متوسط

-۲۲

حواستون باشه! سهمی زمانی از هر چهار ناحیه مختصات می‌گذرد که $p < 0$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2m-4} < 0 \Rightarrow 2m-4 < 0 \Rightarrow m < 2$$

متوسط

-۲۳

اگر یک ریشه ۵ واحد از ریشه دیگر بزرگ‌تر باشد می‌توان نوشت

$$\alpha = 5 + \beta$$

از طرفی از روی معادله s و p را به دست آورده و $\alpha = 5 + \beta$ را در آن‌ها جایگذاری می‌کنیم:

$$s = -\frac{b}{a} = \alpha + \beta \Rightarrow -\frac{7m}{m} = 5 + \beta + \beta \Rightarrow -3 = 5 + 2\beta$$

$$\Rightarrow -8 = 2\beta \Rightarrow \beta = -4, \alpha = 1$$

$$p = \frac{c}{a} = \alpha\beta \Rightarrow \frac{m^2}{m} = -4 \Rightarrow m = -4$$

آسان

-۲۴

چون یک ریشه k برابر ریشه دیگر است پس $\alpha = 2\beta$

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$2\beta + \beta = 9 \Rightarrow 3\beta = 9 \Rightarrow \beta = 3, \alpha = 6$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 18 = \frac{m+1}{1} \Rightarrow m = 17$$

حواستون باشه! این سوال اگر تشریحی نبود می‌توانستیم از فرمول $\alpha = k\beta$.

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{ac} \quad \text{استفاده کنیم.}$$

$$\frac{(2+1)^2}{2} = \frac{(-9)^2}{m+1} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{81}{m+1} \Rightarrow m+1 = 18 \Rightarrow m = 17$$

متوسط

-۲۵

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$ax^2 + 3ax - a^2 + 2 = 0$$

حواستون باشه! ریشه‌ها معکوس یکدیگرند یعنی $\alpha = \frac{1}{\beta}$ و یا به عبارتی

$$a = c$$

$$a = -a^2 + 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

مجموع مقادیر $a = -2 + 1 = -1$

متوسط

-۲۶

حواستون باشه! (۱) معادله درجه دو زمانی دو ریشه قرینه دارد $b = 0$

(۲) چک کردن $\Delta > 0$ یا $\frac{c}{a} < 0$

$$2m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m(2m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس $m = 0$ قابل قبول است $\Delta = 0 - 4(-12) = 48 > 0$

پس $m = \frac{3}{2}$ قابل قبول است $\Delta = 0 - 4(-\frac{15}{2}) = 30 > 0$

دشواری

-۲۰

اگر ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x + 1 = 0$ را α, β در نظر بگیریم

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

پس ریشه‌های معادله $3x^2 - 7mx + 2 = 0$ و α^3 و β^3 خواهد بود پس:

$$s = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\alpha + \beta = \frac{4}{3}}{\alpha\beta = \frac{1}{3}} \rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27} - \frac{4}{3} = \frac{28}{27}$$

از طرفی از روی معادله $s = -\frac{b}{a}$ داریم $s = \frac{7m}{3}$ جدید

از تساوی این دو مقدار خواهیم داشت

$$\frac{28}{27} = \frac{7m}{3} \Rightarrow m = \frac{4}{9}$$

روش دوم:

مجموع ضرایب معادله $3x^2 - 4x + 1 = 0$ برابر صفر است. $\alpha = 1$

$$\alpha' = \alpha^3 = 1 \quad B' = B^3 = \frac{1}{27}$$

$$\alpha' + B' = \frac{7m}{3} \Rightarrow \frac{28}{27} = \frac{7m}{3} \Rightarrow m = \frac{4}{9}$$

آسان

-۲۱

حواستون باشه! (۱) پایین‌ترین نقطه سهمی، رأس سهمی است $x_s = -\frac{b}{2a}$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{و}$$

(۲) در ناحیه دوم $x < 0$ و $y > 0$ است.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{+2m}{2(m-1)} < 0 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline & + & - & + & \end{array} \quad 0 < m < 1 \quad (1)$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-[4m^2 - 4(m^2 - 4m + 3)]}{4(m-1)} > 0$$

$$\frac{-4m^2 + 4m^2 - 16m + 12}{4(m-1)} > 0 \Rightarrow \frac{-16m + 12}{4(m-1)} > 0$$

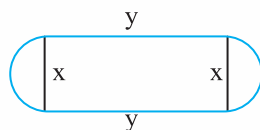
$$m = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}, m = 1 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \frac{3}{4} & 1 & +\infty \\ \hline & - & + & - & \end{array} \quad \frac{3}{4} < m < 1 \quad (2)$$

جواب نهایی اشتراک (۱) و (۲) است

$$\frac{3}{4} < m < 1$$

-۲۷

دشوار

محیط استادیوم تشکیل شده است از $2y$ و یک دایره کامل پس:

$$\text{محیط} = 2\pi x + 2y$$

$$1500 = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right) + 2y \Rightarrow 1500 = \pi x + 2y$$

$$y = \frac{1500 - \pi x}{2} = 750 - \frac{\pi}{2}x$$

$$S = xy \Rightarrow S = x\left(\frac{1500 - \pi x}{2}\right) \Rightarrow S = 750x - \frac{\pi}{2}x^2$$

$$y_s = 750 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{750}{\pi}\right)^2 = 375, x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-750}{2(-\frac{\pi}{2})} = \frac{750}{\pi}$$
 ابعاد مستطیل

$$S = xy + \pi r^2 \Rightarrow S = \text{استادیوم} + S \text{ دایره} + S \text{ مستطیل}$$

$$= xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$S = x\left(750 - \frac{\pi}{2}x\right) + \pi\frac{x^2}{4} = 750x - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}x^2$$

$$= 750x - \frac{\pi}{4}x^2$$

$$x_s = \frac{-750}{2(-\frac{\pi}{4})} = \frac{-750}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1500}{\pi}$$

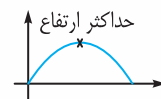
$$y_s = 750 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1500}{\pi}\right) = 750 - 750 = 0$$

-۲۸

متوسط

آ) حداکثر ارتفاع توپ زمانی اتفاق می افتد که در رأس سهمی قرار داشته باشد

پس:



$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(1-4(0))}{4(-\frac{1}{4})} = \frac{-1}{-1} = 1$$

ب) حداکثر مسافت طی شده زمانی اتفاق می افتد که توپ دوباره با زمین

برخورد کند یعنی $y = 0$

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ در زمان شروع}$$

$$-\frac{1}{4}x + 1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x = -1 \Rightarrow x = 4$$

 $x = 4$ پس از ۴ متر بیشترین مسافت طی کرده است.

-۲۹

دشوار

مرحله اول: ابتدا درباره محیط نرده صحبت شده است پس $2x + y = 100$

$$y = 100 - 2x$$

در مرحله دوم درباره بیشترین مساحت سوال پرسیده است پس:

$$S = xy$$

اما این معادله در طرف دوم برحسب دو مجهول نوشته شده است پس از

اطلاعات مرحله اول استفاده می کنیم

$$S = x(100 - 2x) \Rightarrow S = 100x - 2x^2$$

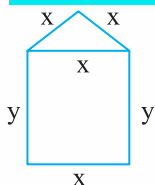
$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = \frac{100}{4} = 25$$

چون ابعاد مستطیل خواسته است پس x_s را در رابطه y جایگذاری می کنیم:

$$y = 100 - 2(25) = 100 - 50 = 50$$

-۳۰

دشوار

حواستون باشه! مساحت مثلث متساوی الاضلاع از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست

می آید.

$$y = \frac{4 - 3x}{2} \Leftarrow 2x + 2y = 4 \text{ که ابتدا درباره محیط پنجره صحبت شده است}$$

سپس درباره حداکثر نوردهی صحبت شده که به مساحت پنجره برمی گردد.

 S مستطیل + S متساوی الاضلاع = پنجرهاین مساحت چون طرف دوم برحسب x و y نوشته شده است از اطلاعات (۱)

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy \text{ پنجره استفاده می کنیم.}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + x\left(\frac{4 - 3x}{2}\right) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{2}x^2$$

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 + 2x$$

این معادله درجه دوم زمانی ماکسیم مقدار خود را می دهد که $x_s = \frac{-b}{2a}$

باشد پس:

$$x_s = \frac{-2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} = \frac{-4}{\sqrt{3} - 6} = \frac{4}{6 - \sqrt{3}}$$

و با جایگذاری در رابطه y :

$$y = 2 - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{6 - \sqrt{3}}\right) = 2 - \frac{6}{6 - \sqrt{3}} = \frac{12 - 2\sqrt{3} - 6}{6 - \sqrt{3}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}$$

متوسط

-۳۶

چون یک ریشه $\sqrt{5} + 3$ است پس:

$$x = \sqrt{5} + 3 \Rightarrow x - 3 = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 - 6x + 9 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(4) = 36 - 16 = 20$$

$$\text{ریشه} = \frac{-b \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}$$

روش دوم:

چون گفته شده با ضرایب گویا، باید مزدوج هم باشند.

آسان

-۳۷

$$\alpha = \beta + 2$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \beta + 2 + \beta = \frac{2}{2} \Rightarrow 2\beta + 2 = 1$$

$$\Rightarrow 2\beta = -1 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + 2$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} = k$$

متوسط

-۳۸

$$2x^2 + 4x = 1 \Rightarrow 2(x^2 + 2x) = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = \frac{1}{2}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha = \frac{1}{2} \text{ و } \beta^2 + 2\beta = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1397} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1397} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1397} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1396}$$

دشوار

-۳۹

	α	β
+	+	-

جدول تعیین علامت به صورت است پس:

یعنی به ازای عدد ۲ حاصل این عبارت منفی خواهد بود:

$$12 + 2k - 3 - k < 0 \Rightarrow 9 + k < 0 \Rightarrow k < -9$$

و چون دو ریشه دارد پس: $\Delta > 0$

$$k^2 - 4(-9 - 3k) > 0 \Rightarrow k^2 + 36 + 12k > 0 \Rightarrow k^2 + 12k + 36 > 0$$

$$\Delta = 144 - 4(36) = 144 - 144 = 0$$

یک ریشه همواره مثبت است پس از اشتراک دو جواب خواهیم داشت:

$$k < -9$$

متوسط

-۴۰

x

y

$$2(x + y) = 240 \Rightarrow x + y = 120 \Rightarrow y = 120 - x$$

$$xy = x(120 - x) = 120x - x^2 \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2(-1)} = 60$$

$$y_s = 120 - 60 = 60$$

متوسط

-۳۱

(آ) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن برسد، به معنای t_s است.

$$t_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-5)} = 10$$

$$h_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[10000 - 4(0)]}{4(-5)} = \frac{-10000}{-20} = 500 \text{ متر} \quad (\text{ب})$$

(پ) بازگشت راکت به زمین به معنای محل برخورد با محور x هست یعنی ریشه‌ها.

$$100t - 5t^2 = 0 \Rightarrow 5t(20 - t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 20$$

در لحظه صفر و ۲۰ ثانیه به زمین برخورد می‌کند.

آسان

-۳۲

حواستون باشه! این نکته‌ای است که در کنکور چند بار استفاده شده.

اگر در یک سهمی ۲ نقطه روی نمودار سهمی با عرض‌های یکسان وجود داشته باشد x رأس سهمی از میانگین x های دو نقطه به دست می‌آید.

$$x_s = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

محور تقارن سهمی از رأس سهمی می‌گذرد.

دشوار

-۳۳

صفرهای تابع به معنای ریشه‌های سهمی است پس:

$$\alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow 25\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

$$\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow y = 25\left(\frac{1}{5}\right)x^2 + 4x + \beta$$

$$\xrightarrow{\text{چون } \beta > 0 \text{ غ ق ۱}} 25\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{5}\right) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow 25\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{5}\right) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 \text{ ق ق ۱}$$

$$-5x^2 + 4x + 1 = 0$$

پس معادله به صورت:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}, y_s = \frac{-[16 - 4(-5)]}{4(-5)} = \frac{-[16 + 20]}{-20} = \frac{36}{20}$$

پس ناحیه اول قرار دارد.

متوسط

-۳۴

حواستون باشه! اگر دو نقطه روی نمودار سهمی باشد و دارای y های یکسان باشد x_s سهمی میانگین بین x های دو نقطه است. پس:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-1/5 + 3}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 1/5$$

متوسط

-۳۵

$$2x + 3y = 120 \Rightarrow 2x = 120 - 3y \Rightarrow x = 60 - \frac{3}{2}y$$

$$xy = \left(60 - \frac{3}{2}y\right)y = 60y - \frac{3}{2}y^2$$

$$\text{مقدار ماکزیم} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[60^2 - 4(0)]}{4(-\frac{3}{2})} = \frac{-3600}{-6} = 600$$

روش دوم:

اگر جمع دو مقدار عدد مثبت عدد ثابتی شود، ضرب آن‌ها زمانی Max است که با هم برابر باشند.

$$2x + 3y = 120 \Rightarrow 2x = 3y = 60 \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 30 \end{cases}$$



چون یکی از ریشه‌های معادله را $x = 4$ داده است پس در ابتدا آن را صدق می‌دهیم.

$$(4)^3 - 8(4)^2 + a(4) + 4 = 0 \Rightarrow 64 - 128 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$4a = 60 \Rightarrow a = 15$$

پس:

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 15x + 4 \\ \underline{x^3 - 4x^2 - 1} \\ 4x^2 + 15x + 4 \\ \underline{4x^2 - 16x} \\ -x + 4 \\ \underline{+x - 4} \\ 0 \end{array}$$

پس تجزیه عبارت $(x-4)(x^2-4x-1)=0$ خواهد بود $S=4$ و $p=-1$
 α, β ریشه‌های پرائتز دوم هستند پس:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2p = 16 - 2(-1) = 16 + 2 = 18$$

در نتیجه پاسخ:

$$\alpha^2 + \beta^2 + a = 18 + 15 = 33$$

روش دوم:

در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ اگر ریشه‌های α, β, γ

باشند داریم:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = -\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + a = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + a = 33$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}, \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

دشوار

گزینه «ب»

چون $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ یک ریشه معادله است پس:

$$x = \sqrt{3} - \sqrt{5} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 = 3 + 5 - 2\sqrt{15}$$

$$x^2 = 8 - 2\sqrt{15}$$

$$2\sqrt{15} = 8 - x^2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 60 = 64 + x^4 - 16x^2$$

با مرتب کردن معادله خواهیم داشت:

$$x^4 - 16x^2 + 64 - 60 = 0 \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 4 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-16}{4} = -4 \text{ خواهد بود و } b = 4, a = -16 \text{ در نتیجه}$$



متوسط

گزینه «ا»

اگر $x + \frac{1}{x} = t$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$(x + \frac{1}{x})^2 = (t)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2(x \cdot \frac{1}{x}) = t^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

پس با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$t + t^2 - 2 = 4 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$t = -3, t = 2$$

$$x + \frac{1}{x} = -3, x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 + 1 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5 \text{ ریشه دارد. } 2$$

آسان

گزینه «ب»

اگر $x^2 + 2x = t$ در نظر بگیریم:

$$t^2 + 10t - 39 = 0 \Rightarrow (t+13)(t-3) = 0$$

$$t = -13, t = 3$$

$$x^2 + 2x = -13 \Rightarrow x^2 + 2x + 13 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(13)$$

$$\Delta = 4 - 52 = -48 \text{ ریشه ندارد}$$

$$x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = 1, x = -3$$

دشوار

گزینه «ب»

حواستون باشه!!

۱) ریشه، صفر کننده معادله است و اگر $f(a) = 0$ باشد $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p \quad (2)$$

متوسط

۸- گزینه «۲»

در مرحله اول چون پاره خط AB داده شده است پس:

$$x_B - x_A = 6$$

در مرحله دوم چون x_S سهمی عدد ۲ داده شده است و می دانیم x_S وسط دو ریشه سهمی قرار دارد پس:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = 2 \Rightarrow x_A + x_B = 4$$

از نتایج به دست آمده در مرحله اول و دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_B - x_A = 6 \\ x_B + x_A = 4 \end{cases}$$

$$2x_B = 10 \Rightarrow x_B = 5, x_A = -1$$

در نتیجه ریشه های این سهمی -1 و 5 است پس می توان معادله سهمی نوشت:

$$y = a(x-5)(x+1) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 3 = a(2-5)(2+1)$$

$$3 = a(-3)(3) \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

در نتیجه معادله سهمی $y = -\frac{1}{3}(x-5)(x+1)$

$$b+c = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ پس } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

دشوار

۹- گزینه «۲»

ابتدا با توجه به شکل باید معادله سهمی را بنویسیم. چون محل برخورد با محور y ها را داده است.

پس $c=4$ و همچنین $y_S = -3$ و $\left[\frac{5}{4}\right]$ در معادله سهمی صدق می کند پس:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = ax^2 + bx + 4$$

$$4 = 25a + 5b + 4 \Rightarrow 0 = 25a + 5b \Rightarrow -5b = 25a$$

$$b = -5a \Rightarrow b^2 = 25a^2 (*)$$

از طرفی $y_S = -3$ پس:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -3 \Rightarrow \frac{b^2 - 4(4a)}{4a} = 3 \Rightarrow 25a^2 - 16a = 12a \Rightarrow 25a^2 - 28a = 0$$

$$a(25a - 28) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ و } a = \frac{28}{25}$$

با جایگذاری در عبارت (*)

$$b^2 = 25 \times \frac{28^2}{25^2} = \frac{28^2}{25} \Rightarrow b = \frac{28}{5}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = \frac{28}{25}x^2 + \frac{28}{5}x + 4$ است.

$$S = -5, p = \frac{5}{y}$$

حالا ما معادله سهمی می خواهیم که ریشه های آن $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ باشد. از رابطه

$$x^2 - sx + p = 0$$

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-5}{\frac{5}{y}} = -y$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{5}{y}} = \frac{y}{5}$$

پس معادله سهمی به صورت $x^2 + yx + \frac{y}{5} = 0$ و یا مرتب شده آن

آسان

۵- گزینه «۱»

خواستون باشه ها!

(۱) در هر معادله ای اگر جمع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه های آن معادله $x=1$ است.

(۲) اگر $f(a)=0$ باشد $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.

چون جمع ضرایب صفر است پس حتماً $x=1$ یکی از ریشه هاست و عبارت بر $x-1$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 11x^2 + 5x + 3 \quad \Bigg| \quad x-1 \\ \underline{3x^3 - 3x^2 - 8x - 3} \\ -8x^2 + 5x + 3 \\ \underline{+ 8x^2 - 8x} \\ -3x + 3 \\ \underline{+ 3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

پس تجزیه عبارت:

$$(x-1)(3x^2 - 8x - 3) = 0 \Rightarrow (x-1)(3x+1)(x-3) = 0$$

$$(x=1) + (x=-\frac{1}{3}) + (x=3) = \frac{11}{3}$$

روش دوم:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = \frac{11}{3}$$

متوسط

۶- گزینه «۱»

خواستون باشه ها! اگر در معادله ای درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$ یک ریشه k برابر ریشه دیگر باشد:

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{ac}$$

$$\frac{(2+1)^2}{2} = \frac{3^2}{m^2 - m} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{9}{m^2 - m} \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

شرط $\Delta > 0$.

$$m = -1 \Rightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2) = 1 > 0$$

$$m = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2) = 1 > 0$$

هر دو مقدار m قابل قبول است.

مجموع مقادیر یک است.

آسان

۷- گزینه «۳»

خواستون باشه ها! در سهمی ها زمانی که رأس سهمی داده شده باشد

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

چون در شکل رأس سهمی $\left[\frac{0}{4}\right]$ داده شده است پس:

با جایگذاری نقطه $\left[\frac{1}{2}\right]$ در این معادله می توان a را یافت پس:

$$2 = a + 4 \Rightarrow -2 = a$$

پس $y = -2x^2 + 4$ در نتیجه $a = -2, b = 0, c = 4$

$$2a - b + c = 2(-2) - 0 + 4 = 0$$

متوسط

۱۲- گزینه «۳»

حواستون باشه‌ها!

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{s^2 - 4p} \quad (1)$$

(۲) ریشه‌ها در معادله صدق می‌کند پس:

$$\alpha^2 + 3\alpha = 1 \xrightarrow{\text{در } \alpha \text{ ضرب شود}} \alpha^3 + 3\alpha^2 = \alpha$$

$$\beta^2 + 3\beta = 1 \xrightarrow{\text{در } \beta \text{ ضرب شود}} \beta^3 + 3\beta^2 = \beta$$

با جایگذاری این دو عبارت در صورت سوال داریم:

$$\text{با توجه به } x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ داریم } p = -1, s = -3$$

$$(\alpha - 1)(\beta + 1) = m - 2 \Rightarrow \alpha\beta + \alpha - \beta - 1 = m - 2$$

$$p + \sqrt{s^2 - 4p} - 1 = m - 2$$

$$-1 + \sqrt{9 + 4} - 1 = m - 2 \Rightarrow \sqrt{13} = m$$

متوسط

۱۳- گزینه «۱»

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \alpha\beta = 1$$

$$2\alpha^2(\alpha\beta) - \delta\beta \xrightarrow{p=\alpha\beta=1} 2\alpha^2 - \delta\beta$$

$$\xrightarrow{2\alpha^2 = -\delta\alpha - 2} -\delta\alpha - 2 - \delta\beta$$

$$-\delta(\alpha + \beta) - 2 \xrightarrow{S=\alpha+\beta=-\frac{\delta}{2}} -\delta\left(-\frac{\delta}{2}\right) - 2 = \frac{2\delta}{2} - 2 = \frac{21}{2}$$

دشوار

۱۴- گزینه «۲»

در این تیپ سوالات کوچک‌ترین توان را به عنوان t بگیرید.

$$(x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = t \Rightarrow ((x^2 + x)^{\frac{1}{6}})^2 = t^2 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{3}} = t^2$$

$$((x^2 + x)^{\frac{1}{6}})^3 = t^3 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = t^3$$

در نتیجه:

$$t^3 - t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t(t^2 - t - 6) = 0 \Rightarrow t(t - 3)(t + 2) = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = 0 \Rightarrow S = -1$$

$$t = 3 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = 3 \Rightarrow x^2 + x = 3^6$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 3^6 = 0 \Rightarrow S = -1$$

$$t = -2 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = -2 \text{ ریشه حقیقی ندارد.}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله -2 است.

$$5x^2 + 35x + 7 = 0$$

روش دوم:

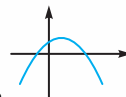
چون در $x = 0$ و $x = 5$ ، عرض یکسان دارد پس مختصات را به صورت $(\frac{5}{4}, -3)$ خواهد بود.

$$y = a(x - \frac{5}{4})^2 - 3 \xrightarrow{(-5/4)} a = \frac{25}{\lambda}$$

$$y = \frac{25}{\lambda}(x - \frac{5}{4})^2 - 3 = \frac{25x^2}{\lambda} + \frac{25}{\lambda}x + 4$$

دشوار

۱۵- گزینه «۳»



مرحله اول سوال به تعیین علامت سهمی برمی‌گردد پس یعنی

-2 و 4 ریشه‌های سهمی هستند و دهانه سهمی به سمت پایین است از طرفی

چون عرض از مبدأ آن با سهمی داده شده یکی است پس $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ در معادله صدق

می‌کند. با استفاده از این اطلاعات داریم:

$$y = a(x - 4)(x + 2) \Rightarrow 5 = a(0 - 4)(0 + 2)$$

$$5 = a(-4)(2) \Rightarrow 5 = -8a \Rightarrow \frac{-5}{\lambda} = a$$

در نتیجه معادله سهمی:

$$y = -\frac{5}{\lambda}(x - 4)(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{5}{\lambda}x^2 + \frac{5}{\lambda}x + 5$$

مرحله آخر خط مماس در رأس سهمی است که به معنای y_s است پس:

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_s = \frac{45}{\lambda} \Rightarrow y - \frac{45}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda y - 45 = 0$$

دشوار

۱۱- گزینه «۲»

در مرحله اول با توجه به معادله $3x^2 - 6x - 2 = 0$ داریم:

$$S = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = 6$$

$$p = \left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(\frac{\beta}{3}\right) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{9} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha\beta = -6$$

در مرحله دوم با توجه به ریشه‌های $3\beta - 1$ و $3\alpha - 1$ ریشه‌های

$$x^2 - sx + p = 0 \text{ را می‌سازیم.}$$

$$S = 3\alpha - 1 + 3\beta - 1 = 3(\alpha + \beta) - 2 = 3(6) - 2 = 16$$

$$p = (3\alpha - 1)(3\beta - 1) = 9\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 1 = 9(-6) - 3(6) + 1$$

$$= -54 - 18 + 1 = -71$$

پس معادله به صورت $x^2 - 16x - 71 = 0$ است در نتیجه:

$$c = -71, b = -16$$

$$c - b = -71 + 16 = -55$$

۱۵- گزینه «۲»

آسان

حواستون باشه! بیشترین مقدار سهمی $y_s = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$16 - 4(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$m = -1, m = 4$$

چون سهمی زمانی که دهنه رو به پایین داشته باشد بیشترین مقدار را دارد پس $m = -1$ قابل قبول است.

max

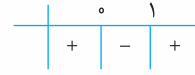
۱۶- گزینه «۳»

آسان

حواستون باشه! معادله درجه ۴ زمانی دو ریشه حقیقی دارد که $p < 0$ و یا

$$\Delta = 0 \text{ و } \frac{-b}{2a} > 0$$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{2m} < 0$$



(0, 1)

۱۷- گزینه «۳»

آسان

حواستون باشه! معادله نیم مجذوری زمانی دو ریشه حقیقی دارد که:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow 2t^2 - 2mt + \frac{m}{2} - \frac{1}{8} = 0 \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ p \geq 0 \end{cases}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{+2m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (1)$$

$$p \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{\frac{m}{2} - \frac{1}{8}}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{m}{2} \geq \frac{1}{8} \Rightarrow m \geq \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m - \frac{1}{4}) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0$$

$$\Rightarrow (2m-1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2} \quad (3)$$

اشتراک بین این سه شرط جواب مسئله است $m \neq \frac{1}{2}$ و $m \geq \frac{1}{4}$

۱۸- گزینه «۴»

آسان

حواستون باشه! معادله نیم مجذوری زمانی یک ریشه حقیقی دارد که $p < 0$ و یا

$$\Delta = 0 \text{ و } \frac{b}{2a} > 0 \text{ باشد.}$$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-m-6}{m-2} < 0$$

اگر $m = 2$ باشه هم یک جواب دارد.

$$\begin{array}{c|ccc} x & -6 & 2 & \\ \hline & - & + & - \end{array} \quad m < -6 \text{ یا } m > 2$$

۱۹- گزینه «۲»

آسان

حواستون باشه! شرط آنکه سهمی همواره بالای محور x ها باشد:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad a > 0$$

$$(2) \quad \Delta < 0 \Rightarrow 18 - 4(2a^2 + \frac{5}{2}a) < 0 \Rightarrow 9 - 4a^2 - 5a < 0$$

$$-4a^2 - 5a + 9 < 0$$

$$a = 1, a = -\frac{9}{4}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & \frac{9}{4} & 1 & \\ \hline & - & + & - \end{array} \quad (-\infty, -\frac{9}{4}) \cup (1, +\infty)$$

از اشتراک شرط اول و دوم داریم $(1, +\infty)$

۲۰- گزینه «۲»

دشووار

حواستون باشه! اگر $f(x)$ و $g(x)$ باهم برخورد داشته باشند پس از $f(x) = g(x)$ داریم:

(آ) $\Delta > 0$ ۲ محل برخورد دارند.

(ب) $\Delta = 0$ ۱ محل برخورد دارند.

(پ) $\Delta < 0$ محل برخورد ندارند.

در مرحله اول $y = x^2$, $y = ax - a$ را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم و $\Delta = 0$

$$x^2 - ax + a = 0 \quad \Delta = a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a-4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ق ق } , a = 4$$

در مرحله دوم در معادله داده شده $a = 4$ را قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

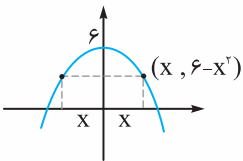
$$\Delta = 16 - 4(4) = 16 - 16 = 0$$

پس معادله یک جواب برای x دارد.

۲۱- گزینه «۴»

دشووار

اول شکل رو بکشیم که بیشتر متوجه سوال بشویم:



پس مستطیل مورد نظر دارای طول $2x$ و عرض $6 - x^2$ است در نتیجه محیط آن:

$$p = 2(\text{طول} + \text{عرض})$$

$$p = 2(2x + 6 - x^2)$$

$$p = 2(-x^2 + 2x + 6) = -2x^2 + 4x + 12$$

چون سوال ماکزیمم محیط را پرسیده است پس $p_s = \frac{-\Delta}{4a}$

$$p_s = \frac{-[16 - 4(-24)]}{-8} = \frac{16 + 96}{8} = \frac{112}{8} = 14$$

متوسط

۲۵- گزینه «۱»

حواستون باشه! در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

a = دهنه سهمی

b = محل x_S [و یا شیب سهمی در محور y ها]

c = محل برخورد با محور y ها

پس b دهنه سهمی را نشان می‌دهد پس $b > 0$

$-a$ شیب محل برخورد با محور y ها است $-a > 0$ پس $a < 0$

درباره $c + 2$ چون محل برخورد با محور y ها مشخص نیست نمی‌توان حرف

قطعی زد پس $ab < 0$ [البته اگر $C + 2 < 0$ در نظر بگیریم حدس‌هایی

درباره C می‌توان زد.]

متوسط

۲۶- گزینه «۳»

حواستون باشه! از سال دهم می‌دانیم که معادلات درجه ۲ زمانی ۲ ریشه

حقیقی دارند که $\Delta > 0$.

پس باتوجه به اینکه در این معادله درجه دو $a = 2m - 1$, $b = 6$, $c = m - 2$

هست پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\Delta = 36 - 4(2m^2 - 5m + 2) = 36 - 8m^2 + 20m - 8$$

$$= -8m^2 + 20m + 28 > 0$$

که در این مرحله با توجه به نامعادله بودن عبارت باید از تعیین علامت استفاده

کنیم، ابتدا ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$m = -1, m = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
		$-$	$+$	$-$
			Δ	

$$-1 < m < 3.5$$

متوسط

۲۷- گزینه «۱»

اول بیایید قسمت دوم سوال را معنی کنیم «مجموع ریشه‌ها معکوس

حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر است.»

$$S = \frac{1}{p}$$

$$\frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow (-2m+1)(2-m) = 9$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \Rightarrow (2m-7)(m+1) = 0$$

$$2m-7=0 \Rightarrow m = \frac{7}{2}, \Delta > 0$$

$$m+1=0 \Rightarrow m = -1, \Delta < 0$$

چون $m = -1$ دلتا را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست.

آسان

۲۲- گزینه «۱»

اگر طول قاعده را x و ارتفاع وارد بر آن را y در نظر بگیریم در نتیجه با فرض:

$$x + y = 8 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$$

حالا چون درباره مساحت مثلث صحبت کرده پس:

$$S = \frac{xy}{2} \Rightarrow S = \frac{x(8-x)}{2} \Rightarrow S = 4x - \frac{1}{2}x^2$$

$$S_S = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$S_S = \frac{-[16-4(0)]}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-16}{-2} = 8$$

روش دوم: هر گاه مجموع دو مقدار برابر مقداری ثابت باشد بیش‌ترین

حاصل‌ضرب زمانی اتفاق می‌افتد که هر کدام نصف مقدار ثابت باشند.

$$x + y = 8$$

$$\text{پس } x = 4, y = 4$$

$$S = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

متوسط

۲۳- گزینه «۳»

حواستون باشه! اگر مجموع دو عبارت مقدار ثابت شود حاصل‌ضرب آن‌ها

زمانی بیش‌ترین مقدار می‌شود که هر کدام نصف عدد ثابت باشند پس:

$$2x + 3y = 12 \xrightarrow{\text{پس طبق نکته}} \begin{cases} 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

پس بیش‌ترین حاصل‌ضرب این عدد $xy = 6$ است.

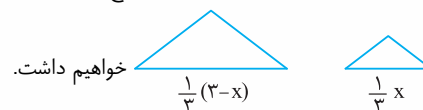
دشواری

۲۴- گزینه «۳»

در ابتدا پاره‌خطی به طول ۳ cm از نقطه‌ای برش می‌دهیم.

$$\overline{X \quad x \quad 3-x}$$

با هر قسمت چون مثلث متساوی الاضلاع درست می‌کنیم



خواهیم داشت.

از آنجا که می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست

می‌آید مجموع مساحت این مثلث:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{3}x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}[\frac{1}{3}(3-x)]^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}(9-6x+x^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

بیش‌ترین این عبارت در $\frac{-\Delta}{4a}$ اتفاق می‌افتد پس:

$$\frac{-[\frac{3}{36} - 4(\frac{\sqrt{3}}{18} \times \frac{\sqrt{3}}{4})]}{4(\frac{\sqrt{3}}{18})} = \frac{-[\frac{1}{12} - \frac{1}{6}]}{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = \frac{+\frac{1}{12}}{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = \frac{9}{24\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{8\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$



دشوار

۳- گزینه ۱

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow s = -1, p = -5$$

خب حالا بریم یک ایده داشته باشیم برای ساختن ریشه‌های جدید:
اگر معادله اولیه را مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$x^2 + x = 5$$

$$x(x+1) = 5 \xrightarrow[\text{شرط } x \neq -1]{\text{طرفین تقسیم بر } x} (x+1) = \frac{5}{x} \xrightarrow{\text{طرفین معکوس}}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{5} \xrightarrow[\text{طرفین به توان ۳}]{\text{طرفین به توان ۳}} \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{x^3}{125}$$

پس باید معادله درجه دوم $x^2 - sx + p = 0$ بنویسیم که ریشه‌های آن

$$\frac{x_1^3}{125}, \frac{x_2^3}{125} \text{ باشد پس:}$$

$$S = \frac{x_1^3 + x_2^3}{125} = \frac{S^3 - 3ps}{125} = \frac{(-1)^3 - 3(-5)}{125} = \frac{-1 + 15}{125} = \frac{14}{125}$$

$$P = \frac{(x_1 x_2)^3}{(125)^3} = \frac{p^3}{(125)^3} = \frac{(-5)^3}{(125)^3} = \frac{-125}{15625} = -\frac{1}{125}$$

$$x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{14}{125}x - \frac{1}{125} = 0 \Rightarrow 125x^2 + 14x - 1 = 0$$

دشوار

۳- گزینه ۴

بارها گفتم که از کنکور ۱۴۰۰ به بعد منتظر محاسبات عجیب و غریب باشید!
اول عبارت را مرتب کنید:

$$\xrightarrow[\text{مخرج مشترک}]{\text{چاق و لاغر}} \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + 1 + \sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x^2}} \times (\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

متوسط

۳- گزینه ۱

اولین نکته این که مقدار تابع یعنی $y = \frac{-\Delta}{4a}$ پس:

$$2 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow 2 = \frac{-(144 - 4(\Delta m^2 - m))}{4m}$$

$$8m = -144 + 4(\Delta m^2 - m) \Rightarrow 8m = -144 + 4\Delta m^2 - 4m$$

$$0 = 2\Delta m^2 - 12m - 144 \Rightarrow 0 = \Delta m^2 - 3m - 36 \Rightarrow (\Delta m + 12)(m - 3) = 0$$

$$m = -\frac{12}{\Delta}, m = 3$$

نکته دوم اینکه چون گفته کم‌ترین مقدار پس دهنه سهمی باید به سمت بالا

باشد پس m باید مثبت باشد در نتیجه:

$$y = 3x^2 - 12x + 14$$

نکته سوم اینکه معادله محور تقارن همون معادله $x_s = \frac{-b}{2a}$ است پس

$$x_s = \frac{12}{6} = 2$$

متوسط

۲۸- گزینه ۱

حواستون باشه! نکته اول سوال به ریاضی دهم مربوط میشه اگر دو نقطه دارای y یکسان باشند در سهمی، x_s از میانگین x های دو نقطه به دست می‌آید. پس:

$$(0, 5), (-2, 5) \Rightarrow x_s = \frac{0 + (-2)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

نکته دوم سوال مربوط می‌شه به نقطه $(0, 5)$ که چون $x = 0$ هست پس $y = 5$ عرض از مبدأ سهمی است.

پس $c = 5$

و در آخر این اطلاعات را در $y = ax^2 + bx + c$ جایگذاری می‌کنیم و متوجه می‌شویم که:

$$y = ax^2 + bx + 5 \xrightarrow{(1, 11)} 11 = a + b + 5 \Rightarrow 6 = a + b$$

همچنین چون $x_s = -1$ پس $\frac{-b}{2a} = -1$ و در نتیجه $b = 2a$ از این دو اطلاعات داریم:

$$6 = a + 2a \xrightarrow{a+b=6} 6 = 3a \Rightarrow a = 2, b = 4$$

$$y = 2x^2 + 4x + 5 \text{ پس}$$

و در نهایت با جایگذاری گزینه‌ها در این معادله سهمی به گزینه $(-1, 3)$ می‌رسیم.

دشوار

۲۹- گزینه ۴

حواستون باشه! از کنکور ۱۴۰۰ به بعد اعداد عجیب و غریب که دیدید اصلاً تعجب نکنید.

قسمت اول سوال از روش t می‌خواهیم استفاده کنیم:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(-5) = 49 + 20 = 69$$

$$t_{\text{ریشه}} = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

$S = 0$

$$p = \left(\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}\right) = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}, p^2 = \frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4}$$

$$2p^2 = 59 + 7\sqrt{69}$$

دشوار

۳۶- گزینه «۴»

اول x و y رأس سهمی را به دست می آورید:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k}$$

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-16 + 4(-6k)}{4k} = \frac{-16 - 24k}{4k} = \frac{-4 - 6k}{k}$$

حال این x و y را در معادله خط جایگذاری می کنیم:

$$\frac{-4 - 6k}{k} = -4\left(\frac{2}{k}\right) - 4$$

$$\frac{-4 - 6k}{k} = \frac{-8}{k} - 4 \Rightarrow \frac{-4 - 6k}{k} = \frac{-8 - 4k}{k} \Rightarrow -2k = -4$$

$$k = 2$$

$$y_s = \frac{-4 - 6k}{k} \quad \text{پس از رابطه}$$

$$y_s = \frac{-4 - 12}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

دشوار

۳۷- گزینه «۳»

نکته اول: حواستون باشه! هر موقع ریشه های مشترک را خواسته باید

$$y_1 = y_2 \quad \text{پس:}$$

$$x^2 + 2x - 3m = x^2 + 6x + m \Rightarrow -4m = 4x \Rightarrow -m = x$$

پس ریشه مشترک $-m$ است.

$$m^2 - 6m + m = 0 \Rightarrow m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m - 5) = 0$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ غ قق}, m = 5 \text{ قق}$$

اگر $m = 5$ را در نظر بگیریم $x^2 + 6x + 5 = 0$ که ریشه های آن

$$x = -1, x = -5$$

و اگر در معادله دیگر قرار دهیم $x^2 + 2x - 15 = 0$ که ریشه های

$$x = -5, x = 3 \text{ آن}$$

در حالت دوم هم اختلاف ریشه های غیر مشترک ۴ واحد است.

متوسط

۳۸- گزینه «۳»

نکته اول سوال اینه که محور تقارن دو سهمی مشترک هستند پس x_s در دو

سهمی را مساوی قرار می دهیم پس:

$$x_s = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

نکته دوم سوال این هست که دو نقطه با عرض یکسان یعنی $y = 1$ در هر دو

معادله صدق می کند و x های یکسان تولید می کند پس:

$$x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 - 2x + b = 1 \Rightarrow -(x^2 + 2x) + b = 1$$

$$\frac{x^2 + 2x = 3}{-} \rightarrow -3 + b = 1 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow ab = 8$$

دشوار

۳۹- گزینه «۱»

این سوال سال ۱۴۰۱ بچه ها رو خیلی اذیت کرد!

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$$

$$2/5\alpha^2 + 2/5\beta^2 + 0/5\alpha^2 - 0/5\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$$

$$2/5(\alpha^2 + \beta^2) + 0/5(\alpha^2 - \beta^2) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$2/5(s^2 - 2p) + 0/5(\sqrt{s^2 - 4p}) = 12\sqrt{2} + 85$$

نکات سوال:

$$(|\alpha - \beta| = \sqrt{s^2 - 4p}, \alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p)$$

حالا چون از روی معادله $x^2 + 6x + a = 0$ می شه فهمید که $s = -6$,

$p = a$ پس با جایگذاری داریم:

$$2/5(36 - 2a) + 0/5(\sqrt{36 - 4a}) = 12\sqrt{2} + 85$$

ایده بعدی این سوال اینه که قسمت بدون رادیکال طرف اول رو با قسمت بدون

رادیکال طرف دوم برابر بگیریم:

$$90 - 5a = 85 \Rightarrow a = 1$$

روش دوم:

ریشه های معادله را به روش Δ' به دست آوریم و جای α و B قرار دهیم و

در انتها عبارت را ساده کرده و قسمت بدون رادیکال طرف اول را با قسمت

بدون رادیکال طرف دوم برابر بگیریم.

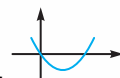
متوسط

۳۴- گزینه «۱»

نکته اول: در معادله سهمی وقتی $c = 0$ است پس سهمی از مبدا مختصات

می گذرد.

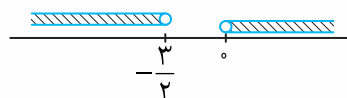
نکته دوم: سهمی که از مبدا مختصات بگذرد و از ناحیه سوم نگذرد به صورت



خواهد بود پس $a > 0, b < 0, c = 0$ است و همچنین $\Delta > 0$

$$a > 0 \text{ و } 3 + 2a < 0 \text{ و } b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (3 + 2a)^2 - 0 > 0$$

باتوجه شرط ۱ و ۲ داریم:



در نتیجه شرط اول و دوم هیچ اشتراکی ندارد پس هیچ مقدار a جواب سوال

است.

متوسط

۳۵- گزینه «۳»

نکته سوال: اگر یک ریشه معادله درجه دو k برابر ریشه دیگری باشد:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\frac{a^2}{12} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{12} = \frac{16}{3} \Rightarrow a^2 = 2^6 \Rightarrow a = \pm 8$$

در نتیجه:

پس اختلاف این دو مقدار ۱۶ واحد است.

$$|-8 - 8| = 16$$



آسان

-۱

(آ) برای حل معادلات کسری باید کسرهای رو یکی کنیم، یادت باشه که راه حل یکی کردن کسرهای مشترک گرفته. پس به مخرج کسرهای نگاه کن و ببین ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) بین مخرج‌ها چی هست. به عبارتی ببین چه عبارتی رو به عنوان مخرج بگیریم که بر همه مخرج‌ها بخش پذیر باشه.

اینجا چون مخرج کسر اول به مخرج کسر دوم بخش پذیر هست، همون میشه. ک.م.م بین مخرج‌ها.

$$\frac{1 \times 1}{(x-2)^2 \times 1} + \frac{2(x-2)}{(x-2)(x-2)} = 3 \Rightarrow \frac{1+2x-4}{(x-2)^2} = 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x^2-4x+4} = \frac{3}{1}$$

حالا می‌تونم طرفین وسطین کنم. راه دیگه این بود که ۳ رو هم به سمت چپ بیارم و مخرج مشترک با کسرهای بگیرم.

$$3x^2 - 12x + 12 = 2x - 3 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(3x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ قق} \\ x=\frac{5}{3} \text{ قق} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند چون هیچ مخرجی رو صفر نمی‌کنند.

(ب) سه تا مخرج داریم که بین دوتای اون، عبارت مشترک داریم پس بیا همه رو بیاریم یک طرف و ک.م.م بگیریم:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} - \frac{4x-4}{x^2-4} = 0$$

$$\begin{cases} \text{مخرج ها} \\ x+2 \\ x \\ x^2-4 = (x-2)(x+2) \end{cases} \Rightarrow \text{ک.م.م.} = x(x-2)(x+2)$$

حالا صورت هر کسر رو در عبارتی ضرب می‌کنیم که مخرج کسرش اون عبارت رو نسبت به ک.م.م کم داشته باشه (دقیقاً شبیه مخرج مشترک کسرهای عددی)

$$\frac{3x(x-2) + 2(x^2-4) - (4x-4)(x)}{x(x^2-4)} = 0$$

می‌دونیم کسری برابر صفر هست که صورت صفر بشه پس دیگه با مخرج کسر کاری نداریم. پس:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

یه نکته مهم رو همین جا یاد بگیر: هر جوابی که از حل معادله کسری به دست میاد ممکنه قابل قبول نباشه.

اونهایی قابل قبول هستند که مخرج هیچ کسری رو صفر نکنند پس یادت نره حتماً چک کنی.

دشووار

۳۹- گزینه «۳»

نکته اول سوال دو نقطه با عرض‌های یکسان هست پس $x_S = \frac{-5+3}{2}$

نکته دوم نقطه رأس سهمی به مختصات $(-1, 1)$ داده شده پس باتوجه به معادله

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S \quad y = a(x + 1)^2 + 1 \quad \text{خواهیم داشت:}$$

$$p = \frac{a+1}{a}, S = \frac{-2a}{a} \quad \text{در نتیجه} \quad y = ax^2 + 2ax + a + 1$$

نکته سوم: اینکه در سوال $\alpha^2 + \beta^2$ را که می‌دانیم $s^2 - 2p$ برابر است داده پس:

$$S^2 - 2p = 5 \Rightarrow 4 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 5 \Rightarrow 4a - 2a - 2 - 5a = 0$$

$$\Rightarrow -2 = 3a \Rightarrow -\frac{2}{3} = a$$

نکته چهارم: محل برخورد محور سهمی با محور y ها، همان c است پس:

$$c = a + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

دشووار

۴۰- گزینه «۴»

در مرحله اول از معادله $ax^2 - ax - b = 0$ خواهیم داشت:

$$S = \alpha + \beta = 1$$

$$p = \alpha\beta = \frac{-b}{a}$$

همچنین از اونجایی که $\alpha = 1 - \beta$ با ضرب β در طرفین خواهیم داشت

$$p = \frac{-b}{a} = \beta(1 - \beta) \quad \text{پس} \quad \alpha\beta = \beta(1 - \beta)$$

حالا می‌رویم سر اطلاعات دوم و اولین کار $40\beta^2$ را به $20\beta^2 + 20\beta^2$ تبدیل

می‌کنیم پس:

$$20\beta^2 + 20\alpha^2 + 20\beta^2 - 20\beta = 17 \Rightarrow 20(\beta^2 + \alpha^2) + 20\beta(\beta - 1) = 17$$

$$20(S^2 - 2p) + 20\left(\frac{b}{a}\right) = 17 \Rightarrow 20\left(1 + 2\frac{b}{a}\right) + 20\frac{b}{a} = 17$$

$$20 + 40\frac{b}{a} + 20\frac{b}{a} = 17 \Rightarrow 60\frac{b}{a} = -3$$

$$\frac{b}{a} = -\frac{1}{20} \xrightarrow{\text{اختلاف ریشه ها}} \sqrt{s^2 - 4p} = \sqrt{1 - 4\left(-\frac{1}{20}\right)} = \sqrt{\frac{16}{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

متوسط

-۲

آ سوال اینه: آیا میشه تو معادلات کسری، صورت و مخرج رو به یک عبارت جبری ساده کرد؟ و پاسخ این هست که بله میشه ساده کرد چون می‌دونیم در معادلات کسری مخرج باید مخالف صفر باشه و بنابراین قابلیت ساده کردن رو داره:

$$\frac{2x(x-4)}{x-4} = x^2 + x - 12 \Rightarrow 2x = x^2 + x - 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ (ق ق)}, x = 4 \text{ (غ ق)}$$

ب) تو این قسمت هم سوالی که پیش میاد اینه که آیا میشه از طرفین یک معادله (حالا کسری یا غیرکسری) یک عبارت جبری رو ساده کرد؟ و پاسخ اینه که میشه ساده کرد فقط یک شرط داره و اونم اینه که ریشه اون عبارت (اگه ریشه داشت) هم یک جواب معادله هستش؛ به شرطی که ریشه مخرج نباشد.

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{(x-3)(x+3)}{2} \Rightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{2}, x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 - 5x + 6 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ (ق ق)}, x = 4 \text{ (غ ق)}$$

آسان

-۳

اگر $x=2$ یک جواب برای معادله باشد به معنی این هستش که در معادله صدق می‌کنه:

$$x=2 \Rightarrow \frac{2}{2} + \frac{2k}{1} = 5 \Rightarrow 2k=4 \Rightarrow k=2$$

حالا k رو در معادله جاگذاری کنیم و بریم سراغ محاسبه ریشه دیگر:

$$\frac{2}{x} + \frac{2x}{x-1} = 5$$

می‌دونیم یکی از روش‌های دیگر حل معادله گویا اینه که همه عبارت‌ها رو در همون ک.م.م ضرب کنی؟ مثلاً اینجا همه رو در $x(x-1)$ ضرب کن:

$$2(x-1) + 2x(x) - 5x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 + 2x^2 - 5x^2 + 5x = 0 \Rightarrow -3x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (ق ق)}, x = 2 \text{ (ق ق)}$$

جواب ۲ رو که خود سوال داده بود پس جواب دیگر $(x = \frac{1}{3})$ است.

غ ق $\Rightarrow$ مخرج کسر اول و سوم رو صفر می‌کنه $x = -2$

ق ق $\Rightarrow$ مخرج هیچ کسری رو صفر نمی‌کنه $x = 4$

پس فقط جواب معادله $x = 4$ است.

ب) باز هم شبیه قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{2-x}{x^2-x} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)(x+1) \\ x+1 \\ x(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مخرج‌ها} \Rightarrow x(x^2-1) = \text{ک.م.م.}$$

$$\frac{2x(x) + 2x(x-1) - (2-x)(x+1)}{x(x^2-1)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x + x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرائب}} x = 1 \quad x = -\frac{2}{5}$$

$x = 1$ ریشه مخرج کسر اول و سوم است پس (غ ق) است اما $x = -\frac{2}{5}$

قابل قبول است.

ت) باز هم اول همه رو بیار یک طرف و مخرج مشترک بگیر. فقط قبلش حواست باشه که $y^2 - 9 = (y-3)(y+3)$ اما توی کسر آخر $(3-y)$ داریم پس همون اول قرینه کن و منفی رو توی کسر تأثیر بده.

$$\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} - 1 - \frac{y-1}{y-3} = 0$$

$$\Rightarrow (y+2)(y-3) - y^2 - (y^2-9) - (y-1)(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow -2y^2 - 3y + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 57 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا ریشه هیچ مخرجی از کسرهای معادله نیستند.

ث)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{x-2+x-5x(x-2)}{x(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow x-2-5x^2+10x=0 \Rightarrow -5x^2+11x-2=0 \Rightarrow 5x^2-11x+2=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 104 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{104}}{10} = \frac{11 \pm 2\sqrt{26}}{10}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

ج) حواست هست که مخرج دو تا کسر یکی هست؟!

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} - \frac{x-1}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{2x-x+1}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+4) + (x+1)(x-3)}{(x-3)(x+4)} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

چ) اگه یکم دقت کنی می‌بینی که مخرج کسر سمت راستی از ضرب دو تا مخرج کسرهای سمت چپی به دست میاد پس همون رو به عنوان مخرج مشترک در نظر بگیر:

$$\frac{x(x-1) + 2(2x-3) + 3x(1)}{2x^2-5x+3} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 6x - 9 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ غ ق} \\ x = -9 \text{ ق ق} \end{cases} \Rightarrow x = -9$$

آسان

-۷

مسأله شبیه سوال ۶ هست با این تفاوت که به جای مدت زمان کار کردن، صحبت از سرعت کار هست و اصول حل سوال همون هست که در سوال ۶ داریم:

	تعداد ساعت	مقدار کار در یک ساعت
ماشین A	$2t$	$\frac{1}{2t}$
ماشین B	t	$\frac{1}{t}$
با هم A و B	4	$\frac{1}{4}$

فرض کردیم سرعت کار ماشین B دو برابر سرعت کار ماشین A باشد. پس تعداد ساعتی که ماشین A صرف انجام کار می‌کند دو برابر همین زمان برای ماشین B هست.

$$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 2 + 4 = t \Rightarrow t = 6 \Rightarrow 2t = 12$$

ماشین B در ۶ ساعت کار را تمام می‌کند.
ماشین A کار رو در ۱۲ ساعت تموم می‌کند.

متوسط

-۸

اگر سرعت حرکت کشتی رو V در نظر بگیریم، از فیزیک می‌دونی که $V = \frac{x}{t}$ و بنابراین $t = \frac{x}{V}$ مدت زمان رفت برابر $\frac{144}{V}$ هست اما طبق توضیحات

مسئله مدت زمان برگشت برابر $\frac{144}{V-8}$ است. پس از ۲ ساعت توقف و با در نظر گرفتن این که مجموع مدت زمان سفر رفت و برگشت ۱۷ است داریم:

$$\frac{144}{V} + \frac{144}{V-8} + 2 = 17 \Rightarrow 144(V-8+V) = 15V(V-8) \Rightarrow 288V - 1152 = 15V^2 - 120V \Rightarrow 15V^2 - 408V + 1152 = 0$$

$$\Delta = (-408)^2 - 4(15)(1152) = 97344 \Rightarrow V = \frac{408 \pm 312}{30}$$

سرعت حرکت کشتی در جهت آب ۲۴ کیلومتر بر ساعت است $\Rightarrow V = 24$ ق ق
زیرا سرعت در خلاف جهت جریان آب ۸ کیلومتر $\Rightarrow V = 3$ غ غ ق ق
کم تر است و غیرممکن است

متوسط

-۹

خب این مسأله رو به راحتی با تناسب حل می‌کنیم. پس بیا اول ببینیم تو آب‌نمکی که کارگر درست کرده چقدر نمک وجود داره و بعد نسبت نمک به محلول رو مقایسه کنیم. ۲۰۰ کیلوگرم آب نمک ۴ درصدی داریم:

$$\frac{4}{100} \times 200 = 8 \text{ kg نمک}$$

پس نسبت نمک به محلول اولیه $\frac{8}{200}$ هست، ۵ کیلوگرم نمک موجود داریم که اضافه می‌کنیم و فرض کنیم به مقدار x باید از محلول تبخیر کنیم، پس نسبت نمک به محلول میشه:

$$\frac{8+5}{200+5-x}$$

(حواست باشه که درسته ۵ کیلو نمک اضافه کردیم اما به هر حال به مقدار وزن کل محلول هم ۵ کیلو اضافه شده پس ۵ رو هم در صورت و هم در مخرج اضافه کن!) حالا قرار هست این نسبت به ۷ درصد برسه پس:

$$\frac{13}{205-x} = \frac{7}{100} \Rightarrow 1435 - 7x = 1300 \Rightarrow 7x = 135 \Rightarrow x \approx 19/3$$

پس کارگر باید تقریباً ۱۹/۳ کیلوگرم آب را تبخیر کند.

متوسط

-۴

اول کار بریم صورت و مخرج کسر اول را به ۲ ساده کنیم:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{3-x}{x-1} = \frac{ax+b}{x^2+2x-3}$$

حالا اگه به کم دقت کنیم می‌بینیم که مخرج کسر سمت راست تساوی در ضرب مخرج‌های سمت چپ تساوی به دست میاد پس بیا دو کسر سمت چپ رو هم مخرج کنیم:

$$\frac{x^2 - x^2 + 9}{(x+3)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+2x-3} \Rightarrow \frac{-x+9}{x^2+2x-3} = \frac{ax+b}{x^2+2x-3}$$

از اونجایی که می‌دونیم دو کسر با مخرج‌های مساوی داریم، بنابراین زمانی معادله بی‌شمار جواب داره که صورت‌ها هم همواره برابر باشند (فارغ از این که مقدار x چی هست!) بنابراین a باید مساوی -1 یعنی ضریب x باشه و b برابر $a = -1, b = 9$ با ۹ باشه پس:

متوسط

-۵

اگه بخواد این معادله جواب نداشته باشه پس به ازای هیچ مقداری از x نباید جوابی به ما بدهد، با طرفین وسطین کردن معادله داریم:

$$mx - m = 2x + 1$$

با مقایسه جمله به جمله سمت چپ و راست، باید گفت که برای این که معادله جواب نداشته باشد لازم هست که مقدار m برابر با ۲ بشه. چرا؟

$$x(m-2) = m+1 \Rightarrow x = \frac{m+1}{m-2}$$

به این خاطر:
و این کسر زمانی فاقد معنی است (بی‌معنی است) که مخرج صفر بشه یعنی m برابر ۲ بشه پس $m = 2$

آسان

-۶

برای حل مسأله‌ای از این قبیل لازم هست اول مسأله رو با دقت بخونی تا ببینی دقیقاً موضوع بر سر چی هست و بعد سه مورد رو در جدول در نظر بگیر، دو مورد تک‌تک افراد یا موضوعات مسأله هست و مورد سوم افراد با هم یا موضوعات همزمان هست. مثلاً تو این مسأله نقاش اول، نقاش دوم و هر دو با هم سه مورد جدول هستند.

صحبت از اتمام یک کار هست و زمان روز هستش پس اول تعداد روزها رو مشخص می‌کنیم و بعد مقدار کاری که هر سه مورد در یک واحد زمانی (یک روز) رو کار می‌کنند در نظر می‌گیریم و معادله می‌نویسیم و حل می‌کنیم:

	تعداد روزها	مقدار کار در یک روز
نقاش اول	$t-15$	$\frac{1}{t-15}$
نقاش دوم	t	$\frac{1}{t}$
با هم	4	$\frac{1}{4}$

حالا معادله رو از روی ستون آخر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{t-15} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4t + 4t - 60 = t^2 - 15t$$

$$\Rightarrow t^2 - 23t + 60 = 0 \Rightarrow (t-20)(t-3) = 0$$

$t = 3$ غیرقابل قبول هست چون نقاش اول ۱۵ روز زودتر کار رو تموم می‌کنه پس مدت زمان نقاش دوم بیشتر از ۱۵ هست پس:

$$t = 20 \text{ روزهای کاری نقاش}$$

$$t-15=5, t=20$$

آسان

-۱۳

از آنجایی که میانگین کل آزمون‌های آرمان رو داریم پس تعداد کل آزمون‌ها و تعداد کل امتیازات رو پیدا می‌کنیم.

اگر تعداد آزمون‌هایی که امتیاز ۹ گرفته رو n در نظر بگیریم پس تعداد کل آزمون‌ها $(n+5)$ هست.

از طرفی تعداد کل امتیازات برابر جمع ۳۶ با $9n$ (تعداد آزمون‌های ۹ امتیازی ضربدر امتیازش) است یعنی $36 + 9n$ پس داریم:

$$\frac{36 + 9n}{5 + n} = 8 \Rightarrow 36 + 9n = 8n + 40 \Rightarrow n = 4$$

جواب قابل قبول است پس آرمان در چهار آزمون متوالی امتیاز ۹ گرفته است.

متوسط

-۱۴

اول این رو بگم که برای حل معادلات گنگ (رادیکالی)، راه‌حل، توان‌رسانی هست حتی گاهی نیاز هست دوبار توان‌رسانی رو انجام بدیم، تنها نکته‌ای که این راه‌حل داره اینه که توان‌رسانی گاهی جواب‌های اضافی تولید می‌کنه و به همین دلیل باید جواب‌ها رو توی معادله صدق بدی (جایگذاری کنی) چون هم ممکنه زیر رادیکال رو منفی کنن هم عبارت جلوی رادیکال رو.

$$\sqrt{x+2} = x-4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2 = (x-4)^2 \Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ و } x=7$$

حالا جواب‌ها رو امتحان می‌کنیم:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{2+2} = \underset{\text{منفی}}{2-4} \quad \text{غ ق}$$

$$x=7 \Rightarrow \sqrt{7+2} = 7-4 \Rightarrow 3=3 \quad \text{ق ق}$$

(ب)

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x = 3x+4 \Rightarrow x=4 \quad \text{ق ق}$$

(پ) از اونجایی که می‌دونیم برای حل معادله رادیکالی لازم هست زیر رادیکال نامنفی باشه پس می‌دونیم $x \geq 0$ و بنابراین می‌تونیم با کمک اتحاد مزدوج بنویسیم:

$$1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

در این صورت طبق نکته‌ای که در پاسخ سوال ۲ اومده بود داریم:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

(یادت نره این معادله رو هم در نظر بگیریم!)

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x} \text{ یا } 1-\sqrt{x} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x=1 \quad \text{ق ق} \\ (1+\sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=0 \quad \text{ق ق} \\ 1+\sqrt{x} = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \quad \text{غ ق} \end{cases} \end{cases}$$

(ت) یک معادله گویا و رادیکالی با هم داریم. اول مخرج مشترک بگیریم:

$$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) = x-2 \Rightarrow 5(\sqrt{x}-2) - 2(x-2) + 1(\sqrt{x}+2) = 0$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{x} - 2x - 4 = 0 \Rightarrow 6\sqrt{x} = 2x + 4 \Rightarrow 3\sqrt{x} = x + 2$$

$$\Rightarrow 9x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (غ ق) یا } x = 4 \text{ (ق ق)} \Rightarrow x = 1$$

(ث)

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})^2 = 4^2 \Rightarrow x+3+3x+1+2\sqrt{(x+3)(3x+1)} = 16$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2+10x+3} = 12-4x \Rightarrow \sqrt{3x^2+10x+3} = 6-2x$$

متوسط

-۱۰

این مسأله هم شبیه به مسأله قبل هست فقط باید حواست به مجهول‌ها باشه:

$$A \quad \frac{50}{100} \times (3n+10) = \frac{1}{2}(3n+10) = \frac{3}{2}n+5$$

$$B \quad \frac{n}{100} \times 50 = \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{2}n+5 + \frac{n}{2} + 7n + \frac{5}{2}}{3n+10+50+7n+\frac{5}{2}} = \frac{\frac{60}{100} \text{ (حل شونده)}}{\frac{60}{100} \text{ (محلول)}} \Rightarrow \frac{9n+\frac{15}{2}}{10n+\frac{125}{2}} = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow 90n+75 = 60n+375 \Rightarrow 30n = 300 \Rightarrow n = 10$$

آسان

-۱۱

حتماً می‌دونی که به مستطیلی که طول و عرض اون، متناسب با نسبت طلایی باشه، مستطیل طلایی می‌گویم. معنی این تناسب این هست که نسبت طول به عرض، برابر با نسبت مجموع طول و عرض به طول باشه. به عبارتی:

$$\frac{L}{\omega} = \frac{\omega+L}{L}$$

حالا در این مسأله، طول و عرض زمین ورزشی متناسب با نسبت طلایی هستند پس:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \text{ یا } \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

از طرفی محیط برابر ۱۴۴ هست یعنی: $2(x+y) = 144$ پس:

$$x+y = 72$$

و به عبارتی $y = 72 - x$ با جایگذاری در تناسب داریم:

$$\frac{x}{72-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x = 72(1+\sqrt{5}) - (1+\sqrt{5})x \Rightarrow (3+\sqrt{5})x = 72(1+\sqrt{5})$$

$$x = \frac{72(1+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{72}{4}(3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5) = 18(2\sqrt{5}-2) = 36\sqrt{5}-36 \Rightarrow y = 72-x = 108-36\sqrt{5}$$

متوسط

-۱۲

فرض کنیم پدربزرگ تعداد n اسباب‌بازی با قیمت x تومان گرفته پس $nx = 120000$ یعنی:

$$n = \frac{120000}{x} \quad (1)$$

اگر برای هر اسباب‌بازی هزار تومان تخفیف بگیرد یعنی $x-1000$ ، تعداد اسباب‌بازی‌ها به $(n+4)$ می‌رسد:

$$n+4 = \frac{120000}{x-1000} \Rightarrow n = \frac{120000}{x-1000} - 4 \quad (2)$$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{120000}{x} = \frac{120000}{x-1000} - 4 \Rightarrow \frac{120000x - 120000(x-1000)}{x(x-1000)} = 4$$

$$\xrightarrow{\div 4} 30000000 = x^2 - 1000x \Rightarrow x^2 - 1000x - 30000000 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6000)(x+5000) = 0 \Rightarrow x = 6000 \text{ یا } x = -5000$$

پس قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف ۶۰۰۰ تومان بوده است.

آسان

-۱۸

مختصات هر نقطه‌ای که روی محور x باشد به صورت $(x, 0)$ هست. از طرفی یادت هست که فرمول فاصله دو نقطه چی بود؟

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (0-3)^2} = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-2 \end{cases}$$

پس نقطه به صورت $(-2, 0)$ یا $(6, 0)$ جواب مسأله است.

آسان

-۱۹

اول این که حواست باشه عدد صحیح خواسته و بعد بیا به صورت معادله دربیاریم:

$$\sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3x}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \Rightarrow x(\frac{9}{4}x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ق ق} \\ x=\frac{4}{9} \text{ ق غ} \end{cases}$$

($\frac{4}{9}$ عدد غیر صحیح است)

مسأله ۱ جواب دارد.

متوسط

-۲۰

(آ) اگر عدد را به سمت راست ببریم داریم: $\sqrt{t} = -2$

اما امکان ندارد که مقدار رادیکالی منفی شود بنابراین ریشه حقیقی ندارد.

(ب) مجموع دو عبارت نامنفی برابر ۱- نمی‌شود بنابراین معادله جواب ندارد.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = -1$$

(پ) اشتراک این مجموعه تهی است.

$$1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

بنابراین عددی وجود ندارد که همزمان بتواند در دو رادیکال قرار گیرد پس

معادله فاقد جواب حقیقی است.

متوسط

-۲۱

$$t = \frac{300}{V}$$

$$t-2 = \frac{300}{V+5} \Rightarrow (\frac{300}{V} - 2) = \frac{300}{V+5}$$

$$300(V+5) - 2V(V+5) = 300V$$

$$300V + 1500 - 2V^2 - 10V = 300V \Rightarrow 2V^2 + 10V - 1500 = 0$$

$$V^2 + 5V - 750 = 0 \Rightarrow (V-25)(V+30) = 0$$

$$V = 25, V = -30$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 3x^2 + 10x + 3 = 36 - 24x + 4x^2 \Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \Rightarrow \text{ق ق} \\ x=33 \Rightarrow \sqrt{36} + \sqrt{100} = 4 \Rightarrow \text{ق ق غ} \end{cases}$$

ج

$$\frac{1}{\sqrt{U-3}} = \frac{2}{\sqrt{U}} \Rightarrow \sqrt{U} = 2\sqrt{U-3} \xrightarrow{\text{توان } 2} U = 4(U-3)$$

$$\Rightarrow U = 4U - 12 \Rightarrow 3U = 12 \Rightarrow U = 4 \text{ ق ق}$$

ج

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ ق ق} \\ x=2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$$

ج

$$\sqrt{m} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$U = 1 \text{ آنگاه } U + \frac{1}{U} = 2$$

روش دوم:

$$\frac{m+1}{\sqrt{m}} = 2 \Rightarrow m+1 = 2\sqrt{m} \Rightarrow m - 2\sqrt{m} + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{m} = 1, m = 1 \text{ ق ق}$$

آسان

-۱۵

دقت کن که جمع دو رادیکال برابر صفر شده و می‌دونیم رادیکال‌ها عبارت‌های نامنفی هستند پس تنها زمانی این مجموع برابر صفر میشه که هر دو رادیکال مساوی صفر باشند.

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 2, 5$$

که $x = 2$ جواب مشترک بین هر دو معادله است و هر دو رادیکال رو صفر می‌کنه پس $x = 2$ جواب است.

متوسط

-۱۶

با توجه به این که زیر رادیکال‌ها عبارت‌های درجه ۲ داریم بهتر هست اول

تعیین دامنه کنیم و در صورت وجود دامنه، معادله رو حل کنیم:

$$3 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$x^2 - 25 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 25 \Rightarrow |x| \geq 5 \Rightarrow x \leq -5 \cup x \geq 5$$

همون‌طوری که می‌بینیم هیچ اشتراکی بین دامنه‌ها وجود نداره پس هیچ عددی نمی‌تونه توی هر دو رادیکال به طور همزمان قرار بگیره پس معادله جواب ندارد.

دشواری

-۱۷

چون عبارت اول ریشه ندارد طرف سمت چپ همیشه مثبت است و نمی‌تواند برابر صفر شود و جواب ندارد.

$$\frac{x^2 - x + 1}{\Delta < 0} + \frac{\sqrt{x - \sqrt{x+3}}}{a > 0} = 0$$

همواره بزرگتر و مساوی صفر

همواره $(+)$ و ریشه ندارد

-pp

چون رادیکال خروجی منفی ندارد مسئله جواب ندارد.

-۲۲۳

پس $X = 1$ است در نتیجه

$$\frac{2(1)+1}{1+2} + \frac{1+2}{1-4} = \frac{3}{3} + \frac{3}{-3} = 0$$

-۲۱۷

$$3t^2 - 245t + 1500 = 0 \Rightarrow (3t - 20)(t - 75) = 0 \Rightarrow t = 75 \Rightarrow t = \frac{20}{3} \text{ غ قق}$$

-p5

$$\Rightarrow A = \circ(\text{غ ق ق}) A = \vee(\text{ق ق})$$

-pg

$$\Rightarrow \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} = 1 \Rightarrow \frac{2}{x+5} = 1 \Rightarrow x+5=2 \Rightarrow x=-3$$

$-pV$

جواب معادله اشتراک صفرهای رادیکال‌هاست.

رادیكال اول رو صفر کرده یس:

$$\mathfrak{w}^{\mathfrak{w}} + \mathfrak{w} + \mathfrak{m} = 0 \Rightarrow \mathfrak{m} = -\mathfrak{w}.$$

-۲۸

رادیکال‌ها صفر هستند:

جواب معادله باید هر دو رادیکال رو صفر کنه پس $x = -1$ تنها جواب معادله

است. (می‌توان $x = \pm 1$ را در رادیکال دوم امتحان کرد)

-49-

مقدار کار در یک روز	زمان	کارگرها
$\frac{1}{t}$	t	A
$\frac{1}{2t}$	۲t	B
$\frac{1}{4t}$	۴t	C

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{3t} = \frac{1}{20} \xrightarrow{\times 20 \cdot t} 20 + 10 + \frac{20}{3} = t \Rightarrow t = 30$$

یس کارگر سوم در 4×35 یعنی ۱۴۰ روز انجام می‌دهد.

-μ₀

فرض کنیم: $x + \frac{1}{x} = A$ آن گاه $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{A}$

و داریم:

$$A + \frac{1}{A} = 2$$

$$\Rightarrow A=1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0.$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

-۴۱-

$$\frac{y_X - 1}{x + y} = t$$

$$\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} = 2$$

زمان $2 = 0 + \frac{1}{0}$ می شود که هر یک $0 = 1$ باشد پس

$$\sqrt{t} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}=1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+3}=1 \Rightarrow 2x-1=x+3 \Rightarrow x=4 \text{ قق}$$

$$\text{صدق} \Rightarrow \sqrt{\frac{\lambda-1}{4+3}} + \sqrt{\frac{4+3}{\lambda-1}} = 2$$



دشوار

۱- گزینه «ا»

حواستون باشه! عبارت $t + \frac{1}{t} \geq 2$ خواهد بود اگر t مثبت باشد در این سوال

کسر اول و آخر معکوس یکدیگرند و $\frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1} > 0$ است پس مجموع آن

تنها زمانی برابر ۲ خواهد شد که $\frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1} = 1$ باشد پس:

$$\frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1} + \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3} + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 3}} > 2$$

$\frac{2x^2 + x + 1}{2x^2 + x + 1} = 1$ مثبت

در نتیجه طرف اول تساوی مقداری بیش از دو تولید خواهد کرد و هیچ گاه با دو برابر نخواهد بود پس این معادله جواب ندارد.

متوسط

۲- گزینه «ا»

حواستون باشه! در عبارات گویا اگر عبارت ساده شده در طرفین ریشه مخرج باشد آن را حساب نمی کنیم! در هر پرانتز مخرج مشترک بگیرید.

$$\left(\frac{2x-6-x-2}{x-3}\right)\left(\frac{x-8+x+2}{x-8}\right) = x^2 - 7$$

$$\left(\frac{x-8}{x-3}\right)\left(\frac{2x-6}{x-8}\right) = x^2 - 7 \Rightarrow \left(\frac{x-8}{x-3}\right)\left[\frac{2(x-3)}{x-8}\right] = x^2 - 7$$

$$2 = x^2 - 7 \Rightarrow 9 = x^2$$

قق $x = +3, x = -3$ (ریشه مخرج)

چون $(x+8), (x-3)$ حاوی ریشه مخرج هستند در ریشه ها آنها را حساب نکردیم.

متوسط

۳- گزینه «ا»

$$2t - \frac{3}{t} - 5 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 3 - 5t = 0 \quad \text{عبارت } \frac{4x-1}{x+2} = t \text{ پس}$$

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Rightarrow (2t+1)(t-3) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, t = 3$$

$$\frac{4x-1}{x+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8x-2 = -x-2 \Rightarrow 9x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{4x-1}{x+2} = 3 \Rightarrow 4x-1 = 3x+6 \Rightarrow x = 7$$

پس اختلاف ریشه ها ۷ است.

دشوار

۳۳-

اول معادله گویا رو حل می کنیم که مجهول نداره:

$$\frac{x+1}{5} + \frac{4}{x} = 2 \xrightarrow{\times 5x} x^2 + x + 20 = 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4, x = 5$$

$$x = 4 \Rightarrow \sqrt{4m+1} = 3 \Rightarrow 4m+1 = 9 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

$$x = 5 \Rightarrow \sqrt{5m+1} = 3 \Rightarrow 5m+1 = 9 \Rightarrow 5m = 8 \Rightarrow m = \frac{8}{5}$$

و هر دو جواب قابل قبول هستند.

آسان

۳۴-

نقطه ای روی خط $y = 3x$ است پس آن را $(x, 3x)$ فرض می کنیم فاصله

از **A** تا **B** به یک اندازه است پس:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (3x-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (3x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2x\cancel{1} + \cancel{9x^2} = \cancel{x^2} - 4x + 2 + \cancel{9x^2} + 6x\cancel{1}$$

$$-2 = 4x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3x = -\frac{3}{2}$$

مختصات نقطه $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ است.

متوسط

۳۵-

با جاگذاری خواهیم داشت:

$$\frac{v}{2+6} = \frac{2v+k}{100-68} \Rightarrow \frac{v}{8} = \frac{2v+k}{32}$$

$$\frac{v}{1} = \frac{2v+k}{4} \Rightarrow 28 = 2v+k \Rightarrow 1 = k$$

متوسط

۳۵-

$$\frac{2x^2+1}{x^2+5} = t \quad t + \frac{1}{t} = 2$$

زمانی معکوس دو عبارت مجموع دو خواهد داشت که هر یک، یک باشند.

$$\frac{2x^2+1}{x^2+5} = 1 \Rightarrow 2x^2+1 = x^2+5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

دشوار

۸- گزینه «۲»

عبارت رادیکال اول و دوم را به صورت اتحاد مربع کامل می نویسیم پس

$$\sqrt{(\sqrt{x-3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3}-2)^2} = 8$$

$$|\sqrt{x-3}+2| + |\sqrt{x-3}-2| = 8$$

قدرمطلق اول چون مجموع دو عبارت مثبت است پس عبارتی است مثبت:

$$\sqrt{x-3}+2 + |\sqrt{x-3}-2| = 8$$

$$\sqrt{x-3}-2 = 8 - \sqrt{x-3}-2$$

با حل معادله قدرمطلق داریم:

$$2\sqrt{x-3} = 8 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow x-3 = 16 \Rightarrow x = 19$$

قق

$$\sqrt{x-3}-2 = -8 + \sqrt{x-3}+2 \Rightarrow$$

پس معادله در کل یک ریشه دارد.

دشوار

۹- گزینه «۳»

حواستون باشه! هرگاه حاصل جمع چند عبارت مثبت صفر باشد قطعاً تک تک آن عبارت ها صفر بوده است. جواب های نهایی باید در اشتراک دامنه ها باشد.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1$$

جواب مشترک $x = 1$ است. پس معادله یک جواب دارد.

متوسط

۱۰- گزینه «۱»

حواستون باشه! وقتی از معادلات رادیکالی صحبت می کنیم اگر رادیکال ها در دامنه خود اشتراک نداشته باشند آن معادله قطعاً جواب ندارد پس:

$$1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$$

$$2x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{x-1} + x \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{x-1} \Rightarrow x^2 \geq x-1$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 \geq 0$$

همواره مثبت

از اشتراک دامنه ها $x = 1$ تنها ریشه ممکن می تواند باشد اما با صدق $x = 1$ در معادله خواهیم داشت

$$\sqrt{0+1} = 0+0 \Rightarrow 1=0$$

پس $x = 1$ در معادله صدق نمی کند در نتیجه این معادله جواب ندارد.

دشوار

۱۱- گزینه «۱»

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3, x = 2$$

ریشه ها را در رادیکال اول امتحان می کنیم.

اشتراک پاسخ ها جواب مسئله است پس تنها $x = 2$ هر دو رادیکال را صفر می کند.

دشوار

۱۲- گزینه «۴»

با چک کردن دامنه ها داریم:

$$x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$5-x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x$$

$$x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$$

که این سه دامنه اشتراک ندارند پس جواب تهی است.

دشوار

۱۴- گزینه «۳»

در ابتدا مدت زمان حل سوالات با هم را به ساعت تبدیل می کنیم. ۲۰ دقیقه معادل $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ یعنی $\frac{1}{3}$ ساعت است که اگر با ۱ ساعت آن را جمع کنیم $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ساعت است.

اگر حل شاگرد به تنهایی را با $t+2$ و مدت زمان حل دبیر به تنهایی را با t نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{t+2+t}{t(t+2)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2t+2}{t^2+2t} = \frac{4}{3}$$

$$3t^2 + 6t = 4t^2 + 8t + 8 \Rightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (3t+4)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ t = 2 \end{cases}$$

قق

پس شاگرد در $t+2=4$ ساعت کار را به تنهایی انجام می دهد.

متوسط

۵- گزینه «۲»

در ابتدا باید مشخص کنیم در ۴۰۰ کیلوگرم محلول چقدر نمک موجود است

$$400 \times \frac{5}{100} = 20$$

کیلوگرم نمک

حاصل ابتدا ۵ کیلوگرم نمک را به محلول اضافه می کنیم که خواهیم داشت:

$$\frac{20+5}{400+5}$$

سپس برای آن که به غلظت موردنظر برسیم باید آب تبخیر کنیم پس:

$$\frac{25}{405-x} = \frac{8}{100} \Rightarrow 2500 = 3240 - 8x \Rightarrow 8x = 740$$

$$x = 92.5$$

کیلوگرم

دشوار

۶- گزینه «۱»

$$\text{اگر } t = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} \text{ در نظر بگیریم خواهیم داشت:}$$

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+2) = 0$$

$$t = 6, t = -2$$

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = 6 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 36 \Rightarrow x^2+1 = 36x \Rightarrow x^2-36x+1=0$$

چون در این معادله $\Delta > 0, S > 0, P > 0$ پس این معادله دو ریشه مثبت دارد.

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = -2$$

ریشه ندارد

دشوار

۷- گزینه «۲»

هرگاه حاصل ضرب دو پرانتز صفر شود باید تک تک پرانتزها را مساوی صفر قرار دهیم پس:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

حواستون باشه! زمانی که دو عبارت در هم ضرب می شوند ریشه مورد قبول ریشه ای است که در اشتراک دامنه ها قرار داشته باشد و عبارتی را بی معنی نکند. پس در اینجا $x = \pm 1$ قابل قبول نیستند چون در دامنه $\sqrt{x-3}$

صدق نمی کنند.

آسان

چون $x = 4$ در معادله صدق می کند پس:

$$r + a = \sqrt{r_0 - 16} \Rightarrow r + a = \sqrt{r}$$

$$r + a = r \Rightarrow a = -r$$

پس معادله به صورت $x - 2 = \sqrt{5x - x^2}$ با حل معادله گنگ داریم:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$X = \frac{1}{2}, X = 4$$

که این جواب در معادله صدق نمی‌کند پس معادله جواب دیگری ندارد.

دشوار

با به توان دو رساندن طرفین داریم:

$$\sqrt{1 - \frac{10}{x}} + \sqrt{1 + \frac{10}{x}} = \sqrt{2}$$

$$\cancel{x - \frac{10}{x}} + \cancel{x + \frac{10}{x}} + 2\sqrt{1 - \frac{225}{x^2}} = x$$

$$\sqrt{1 - \frac{225}{x^2}} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{225}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow \begin{cases} x = +15 \text{ (ق)} \\ x = -15 \text{ (ق)} \end{cases}$$

bugs

ما به دنبال حاصل $\sqrt{6 + 5\sqrt{6 + 5\sqrt{6 + \dots}}} = A$ هستیم پس می‌توانیم:

$$\sqrt{6 + \underbrace{\Delta \sqrt{6 + \Delta \sqrt{6 + \dots}}}_A} = A$$

$$\sqrt{\epsilon + \delta A} = A \Rightarrow \epsilon + \delta A = A^2 \Rightarrow A^2 - \delta A - \epsilon = 0.$$

$$(A - 6)(A + 1) = 0 \Rightarrow A = 6, A = -1$$

چون **A** حاصل رادیکال است منفی نمی‌تواند باشد پس $A = 6$ قابل قبول است.

دشوار

ابتدا طرف اول معادله را ساده و گویا می‌کنیم پس:

$$\frac{q(r - \sqrt{x})}{r + \sqrt{x}} \times \frac{r - \sqrt{x}}{r - \sqrt{x}} = \frac{q(r - \sqrt{x})^2}{r - x}$$

حاصل با جاگذاری دو طرفین و وسطین داریم:

$$\frac{q(r - \sqrt{x})^r}{r - x} = r - x \Rightarrow q(r - \sqrt{x})^r = (r - x)^r$$

$$|\mathfrak{r}(\mathfrak{r} - \sqrt{\mathbf{x}})| = |\mathfrak{r} - \mathbf{x}|$$

از طرفین جذر می گیریم

$$6 - 3\sqrt{x} = 4 - x \Rightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1, \sqrt{x} = 2$$

$$X = 1(\text{قق}) , X = 4(\text{قق})$$

$$x - 3\sqrt{x} = -4 + x \Rightarrow x + 3\sqrt{x} - 10 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\sqrt{x} = -\delta(q, q'), x = f(q, q')$$

آسان

با توجه به اینکه عبارت‌ها مزدوج هم هستند داریم:

$$\sqrt{x + \gamma} - \sqrt{x - \gamma} = A$$

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2.$$

با ضرب طرفین در یکدیگر داریم:

$$(\sqrt{x+r}-\sqrt{x-y})(\sqrt{x+r}+\sqrt{x-y})=r\cdot A$$

$$x + r - x + y = r \cdot A \Rightarrow 1 \cdot = r \cdot A \Rightarrow \frac{1}{r} = A$$

متوہ

ابتدا شرط‌های معادلات گنگ را بررسی کنیم.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
	+	-	+	

$\Rightarrow a < -2, a > 0$.

$$1) \quad ra^r + ra \geq 0 \Rightarrow ra(a+r) \geq 0 \Rightarrow$$

$$r) \quad r - ra \geq 0 \Rightarrow r \geq ra \Rightarrow \frac{r}{r} \geq a$$

اشتراک این جواب $\frac{2}{3} \leq a \leq 0$ خواهد بود.

حال طرفین وسطین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{ra^{\intercal} + fa} = r - ra \Rightarrow ra^{\intercal} + fa = f + qa^{\intercal} - 1ra$$

$$\circ = \forall a \forall x (x \neq a \rightarrow x \neq a) \Rightarrow \circ = (\forall a - r)(a - r) \Rightarrow a = \frac{r}{y}, a = r$$

چون $\frac{2}{v}$ در شرط دامنه صدق می کند پس قابل قبول است در نتیجه:

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{\cancel{y}} + 1}{\frac{2}{\cancel{y}}} = \frac{\frac{2}{\cancel{y}} + \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}}}{\frac{2}{\cancel{y}}} = \frac{2 + \cancel{y}}{\cancel{y}} = \frac{2}{\cancel{y}} + \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} = \frac{2}{\cancel{y}} + 1 = \frac{2}{y} + 1 = \frac{2+y}{y}$$



۱۹- گزینه «۳»

دشوار

با توجه به سوال سرعت قایق موتوری در آب که به تنهایی $\frac{۱۰۰}{\text{دقیقه}}$ متر است

پس در جهت رودخانه این سرعت به $V + ۱۰۰$ و در خلاف رودخانه این

سرعت به $V - ۱۰۰$ می‌رسد که V در آن سرعت آب رودخانه است. از

طرفی چون اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است پس:

$$t_2 - t_1 = 5 \xrightarrow{t = \frac{x}{V}} \frac{x_2}{V_2} - \frac{x_1}{V_1} = 5 \Rightarrow \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - V} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + V} = 5$$

در این مرحله با رد گزینه می‌توان به جواب رسید مثلاً اگر گزینه ۳ را در این

عبارت جایگزین کنیم خواهیم داشت $V = ۲۰$.

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - ۲۰} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + ۲۰} = 5 \Rightarrow ۱۵ - ۱۰ = ۵ \quad \checkmark$$

ولی اگر بخواهیم سوال را با مخرج مشترک حل کنیم خواهیم داشت:

$$۱۲۰۰ \left(\frac{1}{۱۰۰ - V} - \frac{1}{۱۰۰ + V} \right) = 5$$

$$\frac{1}{۱۰۰ - V} - \frac{1}{۱۰۰ + V} = \frac{5}{۱۲۰۰} \Rightarrow \frac{۱۰۰ + V - ۱۰۰ - V}{۱۰۰۰۰ - V^2} = \frac{1}{۲۴۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۲V}{۱۰۰۰۰ - V^2} = \frac{1}{۲۴۰} \Rightarrow V^2 + ۴۸۰V - ۱۰۰۰۰۰ = 0$$

$$\Rightarrow (V - ۲۰)(V + ۵۰۰) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V = ۲۰ \text{ ق ق} \\ V = -۵۰۰ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۲۰- گزینه «۴»

آسان

اگر درنظر بگیریم که بهروز کار را در t ساعت انجام داده است فرهاد چون ۹

ساعت آن را دیرتر انجام داده است پس ساعت انجام کار فرهاد $t + ۹$ خواهد

بود. پس:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 9} = \frac{1}{۲۰}$$

مخرج مشترک

$$\frac{t + 9 + t}{t(t + 9)} = \frac{1}{۲۰} \Rightarrow \frac{۲t + 9}{t^2 + 9t} = \frac{1}{۲۰}$$

طرفین وسطین

$$t^2 + 9t = ۴۰t + ۱۸۰ \Rightarrow t^2 - ۳۱t - ۱۸۰ = 0$$

$$(t - ۳۶)(t + ۵) = 0 \Rightarrow t = ۳۶ \text{ ق ق}$$

چون زمان منفی نمی‌شود قابل قبول نیست. $t = -۵$

۲۱- گزینه «۲»

دشوار

حواستون باشه! این سوال احتمالاً شمارو اذیت کرده! در طرف اول مخرج مشترک بگیرید و در طرف دوم صورت و مخرج رو ساده کنید:

$$\frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{x+1}}{9-x+1} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{۱۰-x} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}}{x > 1} \rightarrow \frac{-2\sqrt{x+1}}{۱۰-x} = 1$$

شرط دامنه رادیکال‌ها این هست که $x > 1$ پس می‌توان $\sqrt{x-1} \neq 0$ را از طرفین ساده کرد

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -2\sqrt{x+1} = ۱۰-x \xrightarrow{\text{به خاطر شرط رادیکال}} x \geq ۰ \text{ باشد}$$

$$۴(x+1) = ۱۰۰ - ۲۰x + x^2 \Rightarrow ۴x + ۴ = ۱۰۰ - ۲۰x + x^2$$

$$0 = x^2 - ۲۴x + ۹۶$$

$$\Delta = (-۲۴)^2 - ۴(۹۶) = ۱۹۲$$

$$\text{ریشه} = \frac{۲۴ \pm \sqrt{۱۹۲}}{۲} = ۱۲ \pm ۴\sqrt{۳}$$

حواستون باشه! $۱۲ - ۴\sqrt{۳}$ به خاطر کوچک‌تر از ۱۰ بودن قابل قبول نیست.

۲۲- گزینه «۳»

دشوار

حواستون باشه! این سوال در اصل برای کتاب دهم فصل سوم هست ولی چون ایده جالبی داشت بهتر دیدیم که از چشم شما هم دور نماند. اول اطلاعات مسئله رو مخرج مشترک بگیریم و ساده کنیم:

$$\frac{a^3 - 1 + a^3 + 1}{a^6 - 1} = ۲ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{۲a^3}{a^6 - 1} = ۲ \rightarrow ۲a^6 - ۲ = ۲a^3$$

$$\xrightarrow{\text{ساده}} a^6 - a^3 - 1 = 0 \quad (*) \xrightarrow{\text{مرتب}} ۲a^6 - ۲a^3 - ۲ = 0$$

حالا حاصل عبارتی که خواسته شده رو به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a^3+1)-\sqrt{a^3}} + \frac{1}{(a^3+1)+\sqrt{a^3}} &= \frac{a^3+1+\sqrt{a^3}+a^3+1-\sqrt{a^3}}{(a^3+1)^2-a^3} \\ &= \frac{۲a^3+۲}{a^6+۲a^3+۱-a^3} = \frac{۲a^3+۲}{a^6+a^3+۱} \quad \text{چون } a^6=a^3+۱ \\ &= \frac{۲a^3+۲}{۲a^3+۲} = 1 \end{aligned}$$

و در آخر ۱ به توان هر عددی همچنان ۱ است.

۲۳- گزینه «۴»

متوسط

حواستون باشه! شرط آن که معادلات گنگ جواب حقیقی قابل قبول داشته باشند آن است که:

≥ 0 زیر رادیکال باشد

$$(۱) \quad ۲x - ۳ \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{۳}{۲}$$

$$(۲) \quad x + \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq -x \Rightarrow x-2 \geq x^2$$

$$\Rightarrow 0 \geq x^2 - x + 2 \Rightarrow \text{ریشه ندارد و همواره مثبت است}$$

$$(۳) \quad ۲ - x \geq 0 \Rightarrow ۲ \geq x$$

$$(۴) \quad x - ۲ \geq 0 \Rightarrow x \geq ۲$$

این چهار شرط با توجه به شرط دوم که تهی است اشتراک ندارند پس این معادله دارای جواب نیست.

$$\frac{2t+1}{t^2} = \frac{160}{9} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 18t+9=160t^2$$

$$160t^2 - 18t - 9 = 0$$

$$(16t+3)(10t-3)=0 \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{16}, t_2 = \frac{3}{10}$$

$$x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow 16x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 16^2 - 4(-48) = 64 \Rightarrow \text{مثبت} \Rightarrow S_1 = x_1 + x_2 = 1$$

$$x^2 - x - \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow 10x^2 - 10x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 100 - 4(-30) = 100 + 120 = 220 \Rightarrow \text{مثبت} \Rightarrow S_2 = x_3 + x_4 = 1$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 2$$



متوسط

-۱

آ) درست - چون دو خط $x=5, y=0$ برهم عمودند پس شیب‌های قرینه معکوس دارند.

ب) نادرست - فرمول معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است پس $x^2 - 3x - 10 = 0$ است.

پ) نادرست - علامت b از $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید و چون $a > 0$ است پس $b < 0$ است.

ت) نادرست - معادله $\sqrt{x} + 2 = 0$ اصلاً ریشه‌ای ندارد چون $\sqrt{x} = -2$ وجود ندارد.

متوسط

-۲

آ) شیب خط $2x - 3y + 3 = 0$ برابر با $\frac{2}{3}$ و شیب خط $3x + 2y = 0$ برابر با $-\frac{3}{2}$ است چون قرینه و معکوس یکدیگرند پس عمود هستند.

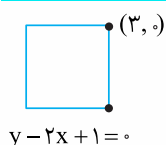
ب) $(-3, 6) = (2(-1) - 1, 2(4) - 2)$

پ) دو ریشه $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1) = 4 + 4 = 8$

ت) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

متوسط

-۳



$$\text{فاصله نقطه از خط} = \frac{|0 - 2(3) + 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{+5}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت} \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{25}{5} = 5$$

آسان

۲۴- گزینه «۴»

تمامی کسرها را در یک طرف جمع کرده و مخرج مشترک بگیریم:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^2+8} - \frac{6x}{x^2-2x+4} = 0$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{6x}{x^2-2x+4} = 0$$

$$\frac{x^2-2x+4 - x^2+9x+2 - 6x(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (2x+3)(3x-2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, x = \frac{2}{3}$$

یک ریشه مثبت دارد.

متوسط

۲۵- گزینه «۴»

حواستون باشه! هر موقع از مستطیل طلایی صحبت کردن با توجه به تمرین کتاب درسی رابطه زیر در ذهن باید بیاد.

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\text{طول} + \text{عرض}}{\text{طول}}$$

در مرحله اول اگر طول مستطیل را L و عرض مستطیل را W در نظر بگیریم

$$\frac{L}{W} = \frac{5}{4} \text{ است.}$$

در مرحله دوم به طول مستطیل x اضافه می‌شود تا مستطیل طلایی شود پس:

$$\frac{L+x}{W} = \frac{L+x+W}{L+x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

با جایگذاری رابطه مرحله اول $(W = \frac{4}{5}L)$ در رابطه به دست آمده در مرحله

$$\text{دوم} \left(\frac{L+x}{W} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\frac{L+x}{\frac{4}{5}L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{L+x}{L} = \frac{4}{10}(1+\sqrt{5}) = \frac{2}{5}(1+\sqrt{5})$$

چون نسبت مساحت مستطیل طلایی $(S = (L+x)(W))$ را به مساحت

مستطیل اولیه $(S = LW)$ خواسته است پس $\frac{L+x}{L}$ جواب مسئله است.

متوسط

۲۶- گزینه «۳»

حواستون باشه! حل این سوال به روش‌های مختلفی انجام می‌شه ما به انتخاب یک روش رو براتون گذاشتیم.

اول بیابید و مخرج مشترک طرف اول عبارت رو بگیرید.

$$\frac{(1-x)^2 + x^2}{[x(1-x)]^2} = \frac{160}{9}$$

صورت کسر اتحاد مربع کامل را باز کنید و در مخرج دو عبارت را در هم ضرب کنید.

$$\frac{1+x^2-2x+x^2}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2-2x+1}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2(x^2-x)+1}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

حالا $x^2 - x = t$ در نظر بگیرید.

آسان

-۷

برای نوشتن معادله درجه ۲ از رابطه $x^2 - sx + p = 0$ استفاده می‌کنیم:

$$s = 3 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 6$$

$$p = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

پس معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ است.

متوسط

-۸

با توجه به معادله داده شده $p = \frac{c}{a} = 1, s = \frac{-b}{a} = 4$

$$\text{ج) } \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + \beta^3 + \beta^2}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{s^3 - 3ps + s^2 - 2p}{p + s + 1} =$$

$$\frac{4^3 - 3(4) + 16 - 2}{1 + 4 + 1} = \frac{64 - 12 + 16 - 2}{5} = \frac{66}{5}$$

$$\text{ب) } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2$$

$$s + 2\sqrt{p} = A^2 \Rightarrow \sqrt{s + 2\sqrt{p}} = A$$

$$\sqrt{4 + 2} = A \Rightarrow \sqrt{6} = A$$

آسان

-۹

صفر تابع یعنی عددی که اگر در معادله صدق کند آن را صفر کند

$$5^3 - a(5)^2 - 8(5) - 10 = 0 \Rightarrow 125 - 25a - 40 - 10 = 0$$

$$75 = 25a \Rightarrow 3 = a$$

با جایگذاری a در معادله $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x - 10$ چون $x = 5$ یک ریشه آن است پس:

$$x^3 - 3x^2 - 8x - 10 \mid x - 5$$

$$\frac{-x^3 + 5x^2}{2x^2 - 8x - 10}$$

$$2x^2 - 8x - 10$$

$$\frac{-2x^2 + 10x}{2x - 10}$$

$$2x - 10$$

$$\frac{-2x + 10}{0}$$

در نتیجه تجزیه عبارت $(x - 5)(x^2 + 2x + 2) = 0$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(2) = -4 \text{ ندارد ریشه}$$

متوسط

-۱۰

با توجه به معادله سهمی $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ و ریشه‌های مشخص شده در شکل ۱ و ۲

$$y = a(x - (-1))(x - 2)$$

$$y = a(x + 1)(x - 2) \xrightarrow[\text{و جایگذاری آن در معادله}]{\text{با استفاده از نقطه } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}} -1 = a(0 + 1)(0 - 2)$$

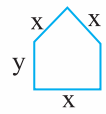
$$-1 = -2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

پس ضابطه سهمی $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

متوسط

-۱۴

$$3x + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 3x \Rightarrow y = 5 - \frac{3}{2}x$$


$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$= x(5 - \frac{3}{2}x) + 0 = 5x - \frac{3}{2}x^2$$

$$= 5x + (-\frac{3}{2} + 0/\frac{1}{4})x^2 \Rightarrow 5x - 1/1x^2$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-5}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{-5 \times 2}{1 \times 1} = -\frac{25}{11}$$

$$y_s = 5 - \frac{3}{2}(-\frac{25}{11}) = 5 + \frac{75}{22} = \frac{185}{22}$$

دشواری

-۵

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad (\text{آ})$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

ب) M میانه BC است پس نقطه وسط پاره خط BC, M خواهد بود

$$M = (\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2}) = (2, 1)$$

H نقطه برخورد ارتفاع با ضلع BC است پس ابتدا معادله خط AH را نوشته و با BC دستگاه حل می‌کنیم.

$$BC \text{ شیب} = \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1 \xrightarrow{\text{قرینه معکوس}} 1$$

$$AH \text{ معادله خط} \rightarrow y - 3 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 4$$

$$BC \text{ معادله خط} \rightarrow y - 0 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 3$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

$$2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}, x = -\frac{1}{2} \quad H = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$$

$$MH = \sqrt{(2 + \frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{7}{2})^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

متوسط

-۶

برای یافتن معادله ابتدا فاصله‌ی نقطه A تا خط BC را به عنوان اندازه ارتفاع و فاصله دو نقطه B و C را به عنوان اندازه قاعده می‌یابیم.

$$BC \text{ خط} : \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow y + x - 3 = 0$$

$$AH = \frac{|3 - 1 - 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{فاصله } A \text{ تا } BC$$

$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$S = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 1$$



متوسط

-۱

(آ) درست

$$x^2 = t \Rightarrow 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow (2t+1)(t-4) = 0 \quad \text{(ب) نادرست}$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-[49 - 4(-3)]}{4(-3)} = \frac{-61}{-12} = \frac{61}{12} \quad \text{(پ) نادرست}$$

$$12 + t = 16 \Rightarrow t = 4 \quad \text{(ت) درست}$$

متوسط

-۲

$$\text{آ) وسط پاره خط } \left(\frac{-1+(-3)}{2}, \frac{-10+4}{2} \right) = (-2, -3) \Rightarrow \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\text{ب) } \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\text{پ) } \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ت) } x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 1 = -1 + x_D$$

$$\Rightarrow 3 = -1 + x_D \Rightarrow x_D = 4$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 3 + (-2) = 4 + y_D$$

$$\Rightarrow 1 = 4 + y_D \Rightarrow y_D = -3$$

آسان

-۳

میانۀ AM وارد بر ضلع BC به وسط ضلع BC وارد می شود پس ابتدا وسط BC را تعیین می کنیم.

$$M = \left(\frac{4+7}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

فاصله ی دو نقطه A و M را می یابیم.

$$AM = \sqrt{\left(\frac{11}{2} + 5 \right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 0 \right)^2}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{21}{2} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{441}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{466}{4}} = \sqrt{116.5}$$

دشوار

-۱۱

خواستون باشه ها! ایده حل این سوال را در ذهن نگه دارید.

$$x^2 - x - 5\sqrt{x^2 - x + 5} + 9 = 0$$

$$x^2 - x + 5 - 5\sqrt{x^2 - x + 5} + 4 = 0 \quad \xrightarrow{x^2 - x + 5 = t}$$

$$t - 5\sqrt{t} + 4 = 0 \quad \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \sqrt{t} = 1, \sqrt{t} = 4$$

$$t = 1, t = 16$$

$$x^2 - x + 5 = 1 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4) \Rightarrow \Delta = -15 \quad \text{ریشه ندارد.}$$

$$x^2 - x + 5 = 16 \Rightarrow x^2 - x - 11 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-11) \Rightarrow \Delta = 1 + 44 = 45$$

$$\text{ریشه} = \frac{1 \pm \sqrt{45}}{2}$$

دشوار

-۱۲

ابتدا باید بفهمیم در محلول ۲۰۰ گرم چای ۴ درصدی چقدر شکر موجود بوده

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \quad \text{شکر گرم است.}$$

حالا با توجه به فرمول غلظت = $\frac{\text{حل شونده}}{\text{حلال}}$ و تبخیر شده آب برای

$$\frac{7}{100} = \frac{8}{200 - x} \Rightarrow 1400 - 7x = 800$$

$$600 = 7x \Rightarrow x = \frac{600}{7}$$

دشوار

-۱۳

$$7:45 \quad t+30 \quad M \quad t \quad 8:15$$

قطار A چون ۷:۴۵ شروع به حرکت کرده است در رسیدن به M که نقطه برخورد دو قطار است ۳۰ دقیقه بیشتر حرکت کرده است.

$$A \times \xrightarrow{100 \text{ min}} V_B \quad M \quad \xrightarrow{40 \text{ min}} V_A \times B$$

حالا در شکل دوم با توجه به صورت سوال قطار A از M، ۴۰ دقیقه طول

می کشد تا به B برسد و قطار B ۱۰۰ دقیقه طول می کشد که از M به A

برسد. با توجه به رابطه $x = Vt$ ، مسافت طی شده از A تا M در دو شکل

برابر است پس $(V_A)(t+30) = 100V_B$ همچنین طول مسافت طی شده در

رسیدن B تا نیز با یکدیگر برابر است پس $(V_A)(40) = tV_B$ از تقسیم دو

رابطه به دست آمده داریم:

$$\frac{V_A(t+30)}{V_A(40)} = \frac{100V_B}{tV_B} \Rightarrow \frac{t+30}{40} = \frac{100}{t} \Rightarrow t^2 + 30t - 4000 = 0$$

$$\Rightarrow (t+80)(t-50) = 0 \quad \begin{cases} t = -80 \text{ ق. غ} \\ t = 50 \text{ ق. ق} \end{cases}$$

پس اگر از سمت B به مسئله نگاه کنیم از ساعت ۸:۱۵ اگر ۵۰ دقیقه جلو

بیاییم ساعت ۹:۰۵ خواهد بود. و همچنین اگر از سمت A به مسئله نگاه کنیم از

ساعت ۷:۴۵ اگر $80 = t + 30$ ۸۰ دقیقه جلو بیاییم ۹:۰۵ خواهد بود.

-۴

متوسط

محل برخورد سه میانه مثلث مرکز ثقل مثلث خواهد بود پس:

$$G = \left(\frac{3+0-4}{3}, \frac{1+3+0}{3} \right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

در مرحله بعد معادله خط AC را باید پیدا کنیم:

$$\text{شیب AC} = \frac{0-1}{-4-3} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{معادله خط AC} \quad y-0 = \frac{1}{7}(x+4) \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7} \Rightarrow 7y - x - 4 = 0$$

حال فاصله نقطه G تا خط AC را به دست می آوریم:

$$d = \frac{\left| 7\left(\frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\right) - 4 \right|}{\sqrt{49+1}} = \frac{\left| \frac{-28}{3} - \frac{4}{3} - 4 \right|}{\sqrt{50}} = \frac{\left| \frac{-40}{3} - 4 \right|}{\sqrt{50}} = \frac{\left| \frac{-40-12}{3} \right|}{\sqrt{50}} = \frac{\left| \frac{-52}{3} \right|}{\sqrt{50}} = \frac{52}{3\sqrt{50}}$$

-۵

آسان

ابتدا محل برخورد دو خط را با استفاده از دستگاه به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y - x = 7 \\ 2y + x = 17 \end{cases}$$

$$3y = 24$$

$$y = 8, x = 1$$

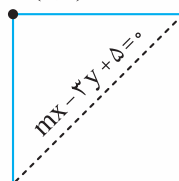
حال فاصله نقطه (1, 8) را از خط $y - 2x - 1 = 0$ به دست می آوریم:

$$d = \frac{|8 - 2(1) - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

-۶

دشوار

A (1, 2)



فاصله رأس A تا قطر به اندازه نصف قطر مربع خواهد بود.

$$\text{نصف قطر} = \frac{|m(1) - 2(2) + 5|}{\sqrt{m^2 + 9}} = \frac{|m - 1|}{\sqrt{m^2 + 9}} \quad \text{کل قطر} = \frac{2|m - 1|}{\sqrt{m^2 + 9}}$$

رابطه قطر مربع و مساحت مربع از رابطه $(\sqrt{2})$ (طول ضلع) = قطر و در نتیجه

$$\text{مساحت} = \frac{(\text{قطر})^2}{2} = \frac{\left(\frac{2|m-1|}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{2|m-1|}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} = 2 \Rightarrow \frac{4(m^2 - 2m + 1)}{m^2 + 9} = 4 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = m^2 + 9$$

$$-2m = 8 \Rightarrow m = -4$$

-۷

دشوار

$$G = \left(\frac{4+(-2)+1}{3}, \frac{1+(-2)+4}{3} \right) = (1, 1) \quad (\text{آ})$$

$$\text{AM میانه} \Rightarrow M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) = \left(1, -\frac{1}{2} \right) \quad (\text{ب})$$

$$\text{معادله AM: } x = 1$$

$$\text{شیب BH} \rightarrow \text{قرینه و معکوس} \quad \text{شیب AC} = \frac{4-1}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\text{معادله BH: } y + 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 4$$

D محل تلاقی BH و AM است پس دستگاه حل می کنیم.

$$y = 1 - 4 \Rightarrow y = -3$$

$$D (+1, -3) \Rightarrow OD = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$x_A + x_C = x_B + x_{D'} \Rightarrow 1 + 4 = -2 + x_{D'} \Rightarrow 7 = x_{D'} \quad (\text{پ})$$

$$y_A + y_C = y_B + y_{D'} \Rightarrow 4 + 1 = -2 + y_{D'} \Rightarrow y_{D'} = 7$$

$$BD' = \sqrt{(-2-7)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{81+81} = 9\sqrt{2}$$

-۸

متوسط

با توجه به ارتباط بین ریشه ها $\alpha = 2\beta - 1$ حالا s و p را از روی معادله به دست می آوریم و در آنها $\alpha = 2\beta - 1$ قرار

می دهیم:

$$s = \frac{-b}{a} = -\frac{(1)}{4} = \alpha + \beta \Rightarrow -\frac{1}{4} = 2\beta - 1 + \beta \Rightarrow \frac{3}{4} = 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \quad \text{داریم } \alpha = 2\beta - 1 \quad \text{با جایگذاری } \beta$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{m}{4} = \alpha\beta \Rightarrow \frac{1}{4m} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4m} = \frac{-1}{8} \Rightarrow -4m = 8 \Rightarrow m = -2$$

-۹

آسان

ابتدا $x^2 - 1$ را برابر با t در نظر می گیریم:

$$x^2 - 1 = t \Rightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t + 2) = 0$$

$$t = 3 \xrightarrow{t=x^2-1} x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$t = -2 \xrightarrow{t=x^2-1} x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1$$

حاصل عبارت توان زوج منفی نمی تواند باشد پس این معادله ریشه ندارد.

در نتیجه صفرهای تابع تنها $x = \pm 2$ خواهد بود.

آسان

-۱۰

شیر اول در $\frac{1}{3}$ ساعت، شیر دوم در $\frac{1}{4}$ ساعت و شیر سوم در x ساعت استخراج را بر می کنند. پس:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4x + 3x + 12}{12x} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{7x + 12}{12x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 28x + 48 = 36x \Rightarrow 48 = 8x \Rightarrow 6 = x$$

متوسط

-۱۱

ابتدا تمام کسرها را در مخرج مشترک آن‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{6}{1} = \frac{2}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{2x}{(x-2)} - \frac{6}{1} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2x}{(x-2)} - \frac{6}{1} = \frac{2}{x}$$

$$= (x)(x-2) \left(\frac{2}{x} \right) \Rightarrow 2x^2 - 6x^2 + 12x = 2x - 4$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$$

چون حاصل جمع ریشه را خواسته است پس

دشوار

-۱۲

اگر $\sqrt{x} = t$ را در نظر بگیریم آنگاه $x = t^2$ خواهد بود پس:

$$\frac{4-t}{2-t^2} = 2+t \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4-t = (2+t)(2-t^2)$$

$$4-t = 4-2t^2+2t-t^3 \Rightarrow t^3-3t+2t^2=0 \Rightarrow$$

$$t(t^2+2t-3)=0 \Rightarrow t(t+3)(t-1)=0$$

$$t=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$$

$$t+3=0 \Rightarrow t=-3 \Rightarrow \sqrt{x}=-3 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

پس معادله دو ریشه دارد.

آسان

-۱۳

ریشه‌های معادله $x=3$, $x=5$ است پس:

$$y = a(x-3)(x-5) \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]} 3 = a(0-3)(0-5)$$

$$3 = a(-3)(-5) \Rightarrow \frac{1}{5} = a$$

$$y = \frac{1}{5}(x^2 - 8x + 15) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 3$$

سوالات تستی

پاسخنامه

آزمون تستی پایانی

متوسط

۱- گزینه «۴»

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \rightarrow s \\ \alpha\beta = -1 \rightarrow p \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \beta^2)}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{s^2 - 2p + p}{s} = \frac{s^2 - p}{s} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

دشوار

۲- گزینه «۴»

$$\begin{cases} S = \alpha + B = 1 \\ P = \alpha B = -3 \end{cases}$$

$$\alpha B = -3 \Rightarrow B = \frac{-3}{\alpha} \Rightarrow B^2 = \frac{-27}{\alpha^3}$$

$$\alpha^3 - \frac{27}{\alpha^3} = \alpha^3 + B^3 = S^3 - 3PS = 1 - 3(-3)(1) = 10$$

دشوار

۳- گزینه «۱»

اگر کمی دقت کنیم می‌بینیم که $x=1$ در معادله درجه سه صدق می‌کند.

$$x=1 \Rightarrow \cancel{ax^3} + \cancel{a} + \cancel{4} = 4$$

پس $(x-1)$ یک عامل برای عبارت است:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 & x-1 \\ \hline & x^2 + ax + 4 \end{array} \quad (*)$$

$$\cancel{x^3} + x^2$$

$$\cancel{ax^2} + (4-a)x - 4$$

$$\cancel{ax^2} + ax$$

$$4x - 4$$

$$-4x + 4$$

۰

باید $a \neq 5$ باشد چون در این صورت یک ریشه $x=1$ می‌دهد که تکراری است.

(*) حالا این عبارت باید دو ریشه حقیقی متمایز مثبت داشته باشد پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a^2 > 16 \Rightarrow |a| > 4 \Rightarrow a < -4 \cup a > 4 \quad (1)$$

$$s > 0 \Rightarrow \frac{-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (2)$$

$$p > 0 \Rightarrow \checkmark \xrightarrow{(1) \cap (2)} a < -4$$

دشوار

۴- گزینه «۳»

سمت چپ معادله رو مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{3x+2x+4}{x+2} = \frac{2}{1+ax} \Rightarrow \frac{5x+4}{x+2} = \frac{2}{1+ax}$$

حالا طرفین وسطین کنیم:

$$(5x+4)(1+ax) = 2(x+2)$$

$$5x + 5ax^2 + 4 + 4ax = 2x + 4 \Rightarrow 5ax^2 + (4a+5)x = 2x$$

$$\Rightarrow 5ax^2 + (4a+3)x = 0 \Rightarrow x(5ax + 4a+3) = 0$$

همان طور که مشخص است $x=0$ یک ریشه برای معادله است و چون می خواهیم معادله فقط یک جواب داشته باشد پس سراغ داخل پرانتز می رویم:

حالت اول: $a=0$

$$5ax + 4a + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(4a+3)}{5a}$$

حالت دوم: $4a+3=0$ و در نتیجه $a = -\frac{3}{4}$ که در این صورت که باز هم ریشه آن $x=0$ است.

حالت سوم: اگر ریشه به دست آمده ریشه مخرج کسر باشد غیرقابل قبول است.

$$\text{پس ۳ مقدار برای } a \text{ داریم.} \begin{cases} x = -2 \Rightarrow \frac{-(4a+3)}{5a} = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-1}{a} \Rightarrow \frac{-(4a+3)}{5a} = \frac{-1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

متوسط

۷- گزینه «۳»

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰٪ داریم پس ۴/۴ حل شونده داریم زیرا:

$$11 \times \frac{40}{100} = 4/4$$

به همین ترتیب چهار کیلوگرم رنگ با غلظت ۷۰٪ یعنی وجود ۲/۸ حل شونده. محلول نهایی ۴/۴ + ۲/۸ حل شونده دارد یعنی ۷/۲ حل شونده.

از طرفی محلول نهایی ۱۱ + ۴ = ۱۵ کیلوگرم است و اگر مقدار تبخیر شده را x فرض کنیم داریم:

$$\frac{7/2}{15-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 15-x = 14/4 \Rightarrow x = 0/6$$

دشوار

۸- گزینه «۲»

$$\sqrt{x^3+5x^2-10x-8} + \sqrt{x^2+x-6} = 0$$

توی این معادله، مجموع دو رادیکال با فرجه زوج برابر با صفر شده است. می دونیم که رادیکال همواره نامنفی هست و اگر جمع دو رادیکال نامنفی برابر صفر شده، معنی اون این هست که هر دو رادیکال برابر صفر هستند و معادله در صورتی دارای جواب هست که هر دو رادیکال هم زمان صفر بشن. صفرهای رادیکال دوم را به دست میاریم ببینیم آیا هیچ کدام رادیکال اول رو صفر می کنند یا خیر.

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow x=2, x=-3$$

$$x=2 \Rightarrow 8+20-20-8=0 \quad \checkmark$$

$$x=-3 \Rightarrow -27+45+30-8 \neq 0$$

پس تنها جواب معادله $x=2$ است.

متوسط

۴- گزینه «۱»

اگر نمودار بخواد بر محور x مماس بشه باید $\Delta=0$ باشه، به عبارتی باید از

$y=0$ ، دو ریشه برابر (ریشه تکراری) به دست بیاد:

$$y=0 \Rightarrow \begin{cases} 3 - \frac{x}{m} = 0 \Rightarrow \frac{x}{m} = 3 \Rightarrow x = 3m \\ mx - 1 = 0 \Rightarrow mx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m = \frac{1}{m} \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

پس دو جواب برای m داریم.

دشوار

۵- گزینه «۲»

$$y = x^2 + 2mx \Rightarrow x_A = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{2} = -m$$

$$y_A = (-m)^2 + 2m(-m) = m^2 - 2m^2 = -m^2 \Rightarrow A \left(\begin{matrix} -m \\ -m^2 \end{matrix} \right)$$

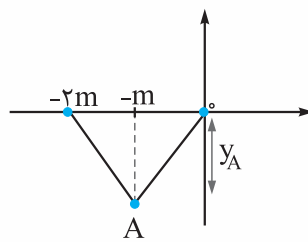
تلاقی با محور x ها یعنی $y=0$ پس:

$$x^2 + 2mx = 0$$

$$\Rightarrow x(x+2m) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=-2m$$

از اونجا که رأس سهمی دقیقاً وسط ریشه هاست پس مثلث حاصل، متساوی

الساقین است و $h = |y_A|$ و طول قاعده برابر $|x_2 - x_1|$ است.



$$h = |-m^2| = m^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(m^2)|-2m-0|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m^2(2m) = 8 \Rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow m = 2$$

۱۳- گزینه «۱»

متوسط

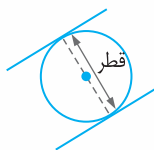
$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_D & y_D \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-1+2+8) - (4-2+2)| = \frac{5}{2}$$

۱۴- گزینه «۴»

متوسط

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \Rightarrow 4x + 2y = 10 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

دو خط موازی هستند پس فاصلهٔ اون‌ها قطر دایره رو به ما می‌ده!



$$\text{قطر} = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|10 - 1|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{محیط} = \text{قطر} \times \pi = \frac{9\sqrt{5}}{10} \pi$$

۱۵- گزینه «۴»

متوسط

ریشه‌ها دو عدد صحیح متوالی‌اند پس تفاضل ریشه‌ها برابر ۱ هست:

$$|\alpha - \beta| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |a| \Rightarrow \Delta = a^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 80 = 1 \Rightarrow m^2 = 81 \Rightarrow m = \pm 9$$

۱۶- گزینه «۴»

متوسط

α, β ریشه‌های معادله هستند بنابراین در معادله صدق می‌کنند:

$$2\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta^2 + 2\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow (\beta^2 + 2\beta)^{1397} + (\alpha^2 + 2\alpha)^{1397}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1397} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1397} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1397} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1396}$$

۱۷- گزینه «۲»

دشواری

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + 5x^2 - x - 5} + \frac{x^2 + x}{x^3 + 6x^2 + 5x} = 1$$

یادت باشه!

در هر معادله اگر مجموع ضرایب صفر باشه، حتماً یه ریشه ۱ هست و عبارت بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است. همچنین در هر معادله اگر مجموع ضرایب توان‌های فرد با مجموع ضرایب توان‌های زوج برابر باشه، حتماً یک ریشه ۱- هست و عبارت بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است. پس مخرج کسر اول هم بر $(x-1)$ و هم بر $(x+1)$ بخش‌پذیر هست:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+5)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x+5)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} = 1 \Rightarrow \frac{2}{x+5} = 1 \Rightarrow x+5=2 \Rightarrow x=-3$$

۹- گزینه «۱»

دشواری

بین دو کسر سمت چپی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^2 + \sqrt{x} + x^2 - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \frac{4}{x^2 + x + 1} \Rightarrow \frac{2x^2}{x(x^2 - 1)} = \frac{4}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{4}{x^2+x+1}$$

جملات $x^2 + x + 1$ را از مخرج‌های کسرهای ساده می‌کنیم و می‌دانیم فاقد ریشه $(\Delta < 0)$ و همواره مثبت هستند.

$$\Rightarrow 2x^2 = 4x^2 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x=0, x=2$$

غ ق ق
(ریشه مخرج)
یک ریشه دارد.

۱۰- گزینه «۱»

متوسط

با کمک تغییر متغیر $t = x - \sqrt{x}$ داریم:

$$t^2 - \frac{11}{10}t + \frac{1}{10} = 0 \xrightarrow{\times 10} 10t^2 - 11t + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c} t=1, t=\frac{c}{a} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x \\ \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

هر دو قابل قبول

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} = \frac{1}{10} \Rightarrow x - \frac{1}{10} = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{100} = x \\ \Rightarrow x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{100} = 0 \xrightarrow{\times 100} 100x^2 - 120x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \end{cases}$$

دو ریشه غیرصفر دارد پس هر دو قابل قبول هستند.

پس معادله چهار جواب حقیقی دارد.

آسان

۱۱- گزینه «۲»

شرط قرار گرفتن سه نقطه A و B و C روی یک خط راست آن است که:

$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Rightarrow \frac{K-2}{0-K} = \frac{0-2}{-1-K} \Rightarrow (K-2)(-1-K)$$

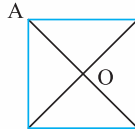
$$= 2K \Rightarrow -K - K^2 + 2 + 2K = 2K \Rightarrow K^2 + K - 2 = 0$$

$$\text{مجموع ضرایب} = 0 \Rightarrow \begin{cases} K=1 \\ K=-2 \end{cases}$$

آسان

۱۲- گزینه «۳»

$$OA = \sqrt{(3+1)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow \text{قطر مربع} = 5 \times 2 = 10$$



اگر a طول ضلع مربع باشد، طول قطر $a\sqrt{2}$ است پس:

$$a\sqrt{2} = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{100}{2} = 50$$



۱- گزینه «۲»

دو ریشه قرینه داره پس اولاً دو ریشه داره یعنی $\Delta > 0$ و دوماً قرینه هستند. این یعنی این که $s = 0, p < 0$

نتیجه $s = 0$ یعنی $b = 0$ زیرا $s = -\frac{b}{a}$ هستش پس:

$$m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 4) = 0 \Rightarrow m = 0, \pm 2 \quad (1)$$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{m+3}{m} < 0 \Rightarrow -3 < m < 0 \quad (2)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \xrightarrow{b=0} -4ac > 0 \Rightarrow ac < 0$$

که همان معنی $p < 0$ را دارد که در قسمت (۲) حل شد.

از بین اعدادی که برای m به دست آمدند تنها $m = -2$ شرط (۲) را دارد پس فقط یک مقدار برای m داریم.

۲- گزینه «۲»

دو ریشه مختلف علامت یعنی $p < 0$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{m}{m+1} < 0 \Rightarrow -1 < m < 0$$

۳- گزینه «۲»

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $t = x^2 - 4x$ داریم:

$$t - \frac{2}{t} - 1 = 0 \xrightarrow{\times t} t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-5)(t+4) = 0 \Rightarrow t = 5, -4$$

$$(1) t = 5 \Rightarrow x^2 - 4x = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 5$$

$$(2) t = -4 \Rightarrow x^2 - 4x = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۴- گزینه «۲»

$$x = 2 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} (fa - 7) = 2 \Rightarrow fa - 7 = 1 \Rightarrow fa = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow x(2x^2 - x - 5) = 2 \Rightarrow 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$$

یکی از جوابها $x = 2$ است پس معادله بر $(x-2)$ بخش پذیر است. با تقسیم بر این عامل بقیه جملات را به دست می آوریم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 \\ \underline{2x^3 + 3x + 1} \\ -x^2 - 4x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - 4x - 3 \\ \underline{-x^2 + 4x} \\ -8x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -8x - 3 \\ \underline{-8x + 6} \\ -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \underline{-9x + 9} \\ 18x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18x - 12 \\ \underline{18x - 12} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ مجموعه دو ریشه } = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$$

متوسط

۱۸- گزینه «۴»

نمودار سهمی محور x را در دو نقطه قطع کرده پس علامت Δ مثبت است از

طرفی هر دو ریشه منفی هستند پس ضرب ریشه ها مثبت و جمع ریشه ها منفی

$$y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12 \text{ است.}$$

$$(1) \Delta > 0 \Rightarrow 4(m+1)^2 - 4(12)(m-2) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 40m + 100 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 10m + 25 > 0 \Rightarrow (m-5)^2 > 0 \xrightarrow{\text{همواره برقرار}} m \neq 5$$

$$(2) p > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$s < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m+2}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} \emptyset$$

دشوار

۱۹- گزینه «۴»

اول رادیکال رو یک طرف معادله تنها کنیم:

$$\sqrt{4x-3} = 2-3x \xrightarrow{\text{به توان ۲ برسانیم}} 4x-3 = 4+9x^2-12x \xrightarrow{\text{مرتب کنیم}}$$

$$9x^2 - 16x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(9x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ جلوی رادیکال منفی میشه غ ق ق ق } \\ x=\frac{7}{9} \text{ جلوی رادیکال منفی میشه غ ق ق ق } \end{cases}$$

پس معادله هیچ جوابی ندارد.

دشوار

۲۰- گزینه «۲»

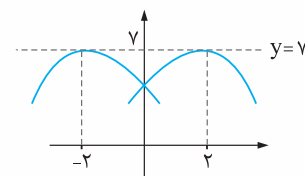
سهمی، بر خط $y=7$ مماس شده پس $y_s = 7$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = 7 \Rightarrow \frac{-12 - b^2}{-4} = 7$$

$$\Rightarrow b^2 = 28 - 12 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$b = 4 \Rightarrow y_1 = -x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x_{s_1} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$b = -4 \Rightarrow y_2 = -x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x_{s_2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{-2} = -2$$



فاصله دونقطه تماس $2 - (-2) = 4$ است.

۹- گزینه «ا»

کسر اول و کسر سوم معکوس هم هستند با تغییر متغیر داریم:

$$t = \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

می‌دانیم که $\frac{1}{x^2 + 1}$ همواره عددی مثبت است و $\frac{1}{x^2 + 1} < 1$ بنابراین $2 - \frac{1}{x^2 + 1}$

همواره عددی کوچک‌تر از ۲ است در صورتی که داریم:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 \text{ یا } t + \frac{1}{t} \leq -2$$

پس این معادله جواب ندارد.

۱۰- گزینه «ا»

با تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$t = x^2 + 4x + 3$$

$$t = \sqrt{t+2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} t = -1 \text{ یا } t = 2, \quad t = \frac{c}{a} = \frac{+2}{1} = 2$$

$$x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه ها } p = \frac{c}{a} = 1$$

$$\text{ضرب هر سه ریشه } = -2 \times 3 = -6$$

۱۱- گزینه «ب»

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-1)|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{26}}$$

۱۲- گزینه «ب»

$$\frac{9(2 - \sqrt{x})}{2 + \sqrt{x}} = 4 - x$$

از اونجایی که می‌دونیم x زیر رادیکال قرار گرفته پس $x \geq 0$ و بنابراین همیشه

عبارت سمت راست رو تجزیه کرد:

$$4 - x = (2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x}) \Rightarrow \frac{9(2 - \sqrt{x})}{2 + \sqrt{x}} = (2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})$$

با در نظر گرفتن ریشه پراتز $(2 - \sqrt{x})$ را ساده می‌کنیم.

$$2 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (2 + \sqrt{x})^2 = 9$$

$$2 + \sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$2 + \sqrt{x} = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = -5 \text{ غلط}$$

۱۳- گزینه «ا»

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{0 + 1 + (-2)}{3}, \frac{3 + 2 + 1}{3} \right) = \left(\frac{-1}{3}, 2 \right)$$

۵- گزینه «ب»

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow s = \frac{-3}{5}, p = \frac{-2}{5}$$

$$4x^2 - kx + 25 = 0, s' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{s^2 - 2p}{p^2}$$

$$= \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{13}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{29}{4} \Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{29}{4} \Rightarrow k = 29$$

۶- گزینه «ا»

می‌دانیم که α, β ریشه‌های معادله هستند پس در معادله صدق می‌کنند:

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha \Rightarrow s = 2, p = -4$$

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 4(s^2 - 2p) = 4(4 + 8) = 48$$

۷- گزینه «ب»

اگر بخواهیم نمودار همواره بالای محور x باشد پس باید $\Delta < 0$, $a > 0$ باشد.

$$(1) a > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1$$

$$(2) \Delta < 0 \Rightarrow 24 - 4(1 - a)(-a) < 0$$

$$24 + 4a - 4a^2 < 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a - 24 < 0 \Rightarrow a^2 - a - 6 < 0 \Rightarrow -2 < a < 3$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -2 < a < 1$$

۸- گزینه «ب»

محور x را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند پس $(2, 0)$ نقطه‌ای از نمودار

است:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0$$

$$\Rightarrow m = 6 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 5x^2 - x + 6$$

$$\frac{-2x^2 - 5x^2 - x + 6}{2x^2 - x - 3}$$

$$\frac{-2x^2 + 4x^2}{-x^2 - x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - x + 6}{-x^2 - x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$\frac{-x^2 - 2x}{-3x + 6}$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۸- گزینه «۲»

معادله درجه دوم در صورتی دو جواب حقیقی و متمایز دارد که $\Delta > 0$

$$a^2 - 4(4)(-4) > 0 \Rightarrow a^2 + 64 > 0$$

همواره برقرار است. پس به ازای هر مقدار a رابطه برقرار است.

۱۹- گزینه «۴»

جمع سه رادیکال با فرجه زوج برابر صفر شده پس هر سه صفر بوده‌اند.

از طرفی معادله دارای یک جواب است پس هر سه رادیکال فقط یک ریشه

مشترک دارند. پس ریشه مشترک دو رادیکال اول رو پیدا می‌کنیم و در

رادیکال سوم قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \quad \cap \rightarrow x = 3$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

$$x^3 + x + m = 0 \xrightarrow{x=3} 27 + 3 + m = 0 \Rightarrow m = -30$$

۲۰- گزینه «۲»

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} + \frac{x^2+2x}{x-4} = \frac{2(1)+1}{1+2} + \frac{(1)^2+2(1)}{1-4} = \frac{3}{3} + \frac{3}{-3} = 0$$

۱۴- گزینه «۳»

قرینه نقطه دلخواه به مختصات (α, β) نسبت به مبدأ مختصات برابر

$(-\alpha, -\beta)$ است پس قرینه نقطه A به صورت $(2, -3)$ است.

با چک کردن گزینه‌ها داریم:

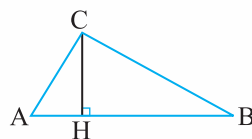
$$2x + y = 2(2) - 3 = 1$$

پس گزینه ۳ درست است.

۱۵- گزینه «۲»

طول ارتفاع CH برابر فاصله رأس C از ضلع AB است پس کافیت معادله

ضلع AB رو بنویسیم و فاصله رو به دست بیاریم:



$$A(1, 1) \quad B(-3, -1) \Rightarrow m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x - 2y + 1 = 0, \quad C(3, -3)$$

$$CH = \frac{|3 - 2(-3) + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

۱۶- گزینه «۲»

نقطه روی نیمساز ناحیه اول قرار گرفته پس مختصات اون می‌تونه (α, α)

باشد و $\alpha > 0$:

$$\text{فاصله} = 3 \Rightarrow \frac{|6\alpha + 8\alpha - 1|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|14\alpha - 1|}{10} = 3 \Rightarrow |14\alpha - 1| = 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14\alpha - 1 = 30 \Rightarrow 14\alpha = 31 \Rightarrow \alpha = \frac{31}{14} \text{ ق ق} \\ 14\alpha - 1 = -30 \Rightarrow 14\alpha = -29 \Rightarrow \alpha = -\frac{29}{14} \text{ غ ق ق } (\alpha < 0) \end{cases}$$

۱۷- گزینه «۲»

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

$$t = x^2 + x \Rightarrow t^2 - 18t + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 6)(t - 12) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ یا } t = 12$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow s_1 = \frac{-b}{a} = -1 \\ x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow s_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -1 - 1 = -2$$