



$$|y| = x^2 + x + 1$$

حالا به جای x اگر عدد صفر رو قرار بدیم داریم:

$$x = 0 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

به ازای یک مقدار x دو مقدار برای y داریم پس این رابطه تابع نیست.

$$\text{پ) } x^2 + y^2 + 4x + 2y + \underbrace{5}_{4+1} = 0$$

برای بررسی روابطی به این شکل ابتدا سعی کن با مربع کامل کردن عبارت‌ها به فرم مناسبی برسی:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 0$$

دو عبارت نامنفی (توان ۲) با هم جمع شده و مساوی صفر شده‌اند پس لازم

است هر دو صفر شوند یعنی $x = -2, y = -1$ یعنی نقطه $(-2, -1)$ و

می‌دانیم نقطه تابع است پس این رابطه تابع است.

پس حواست به این نکته باشه: رابطه $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ ، نمایشگر

یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R است. بنابراین تابع نیست مگر این که

$$R = 0$$

$$\text{ت) } 1 + x - x^2 |y| = 0$$

با توجه به این که y درون قدرمطلق هست، حدس می‌زنیم رابطه تابع نباشد.

$$1 + x = x^2 |y| \xrightarrow{x=1} 2 = |y| \Rightarrow y = \pm 2$$
 تابع نیست

$$\text{ث) } (x-1)(y+5) = 0$$

ضرب دو پرانتز صفر شده، معنی آن این هست که حداقل یکی از پرانتزها صفر

هست پس $x = 1$ یا $y = -5$. درحالتی که $x = 1$ باشد می‌توان مقادیر

مختلفی برای y درنظر گرفت پس تابع نیست.

$$\text{ج) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 1 \\ 2x + 5 & x \leq 1 \end{cases}$$

روابط چندضابطه‌ای درصورتی تابع هستند که یا بازه‌های روبه‌رویی، اشتراکی

نداشته باشند یا اگر عددی در هر دو بازه وجود دارد، مقدار رابطه از هر دو

ضابطه یکی باشد.

توی این رابطه، عدد ۱ در هر دو بازه وجود دارد پس مقداردهی را انجام می‌دهیم:

$$1^2 - 3(1) = -2, \quad 2(1) + 5 = 7, \quad -2 \neq 7$$

پس این رابطه تابع نیست.

$$\text{ج) } |x| + |y-1| = 0$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده، پس لازمه هر دو عبارت صفر باشند:

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$|y-1| = 0 \Rightarrow y = 1$$

پس باز هم به نقطه $(0, 1)$ رسیدیم که تابع هست.



آسان

۱-

وقتی می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$ یعنی تابع f از مجموعه A به مجموعه B

تعریف شده است. مجموعه A رو دامنه و مجموعه B رو هم‌دامنه می‌نامیم که

B ممکن هست برد هم باشه.

توی این تابع، دامنه $D = [-1, 2]$ هست و هم‌دامنه R هست و ما می‌دونیم

برای $y = x^2$ ، برد همه اعداد نامنفی هست یعنی $R = [0, +\infty)$ پس هر

مجموعه‌ای که شامل برد باشه قابل قبول هست. از طرفی برای $x \in [-1, 2]$

داریم: $R = [0, 4]$ پس موارد (ب) و (ت) قابل قبول هستند زیرا دامنه‌ها

برابر و برد را شامل می‌شوند. مورد (آ) و (پ) دامنه متفاوت است.

آسان

۲-

با توجه به نمودار تابع f ، دامنه $[-2, 1]$ است و برد $[-1, 1]$. پس تابعی قابل

قبول است که دامنه $[-2, 1]$ باشد و با حفظ ضابطه، برد آن شامل $[-1, 1]$

باشد (مفهوم هم‌دامنه)

پس فقط مورد «ت» قابل قبول است.

دشوار

۳-

برای تشخیص تابع بودن از روی ضابطه، به نکته‌های زیر توجه کن:

۱) اگر y با توان فرد یک طرف تساوی باشه و سمت راست عبارت‌هایی

برحسب x باشند، تابع است.

۲) اگر y داخل قدرمطلق باشه یا توان زوج داشته باشه، شک کن که احتمالاً

تابع نباشه ولی با اطمینان نمی‌تونی بگی حتماً تابع نیست یا تابع باشه حالت‌های

خاص و استثنا وجود دارند.

۳) برای اطمینان از تابع نبودن، دنبال عددی بگرد که اگر به جای x قرار بدی، دو

مقدار برای y به دست بیاری و این خودش میشه مثال نقض برای اثبات تابع نبودن!

$$\text{آ) } y = \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{x^2 - 4}$$

همون‌طوری که می‌بینی، y یک طرف تنهاست و سمت راست عبارتی برحسب

x پس تابع هست (به دامنه‌ش فکر کن!)

$$\text{ب) } |y| - x^2 - x - 1 = 0$$

شک می‌کنیم که احتمالاً تابع نباشه اما بیا $|y|$ رو تنها کنیم:

متوسط

-۷

دو تابع f و g رو مساوی می‌نامیم اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$۱) D_f = D_g$$

$$۲) \forall x \in D_f (= D_g) : f(x) = g(x)$$

شرط اول می‌گه دامنه‌ها برابر باشند، شرط دوم می‌گه به ازای x های متعلق به دامنه مشترک مقدار f و g (بُرد) مساوی باشند.

$$۱) D_f = \frac{x-1}{x+3} \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$$

$$D_g = x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \cap x+3 > 0 \Rightarrow x \geq -3$$

$$\Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

شرط اول برقرار نیست پس f و g مساوی نیستند (و دیگه لازم نیست شرط دوم رو چک کنیم)

$$ب) D_f : (x=4) \cup (x \neq 4) = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

پس شرط اول برقرار هست. ✓

توی این قسمت، چون تابع f دو ضابطه‌ای هست پس هر دو بازه رو جداگانه در نظر می‌گیریم:

$$x \neq 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4 = g(x)$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 2, g(4) = 4+4 = 8$$

پس به ازای $x=4$ مقدار f و g مساوی نیستند پس توابع f و g مساوی نیستند.

$$D_f = \mathbb{R} \text{ (زیر رادیکال همواره مثبت و مخرج همواره مخالف صفر)} \Rightarrow D_f = D_g \text{ ✓}$$

$$ب) D_g = \mathbb{R} \text{ (زیر رادیکال همواره مثبت)}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2 + \sqrt{4+x^2}} \times \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{\sqrt{4+x^2}-2} = \frac{x^2(\sqrt{4+x^2}-2)}{4+x^2-4} = \sqrt{4+x^2}-2 = g(x)$$

پس f و g مساویند.

$$D_f = \mathbb{R} \text{ (مخرج مخالف صفر)} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$ت) D_g = \mathbb{R} \text{ (چند جمله‌ای)}$$

$$f(x) = \frac{5x^2-10}{5} = \frac{5(x^2-2)}{5} = x^2-2 = g(x)$$

ضابطه دو تابع هم مساوی هستند پس هر دو شرط برقرار است و بنابراین توابع f و g مساویند.

$$ث) D_f = x^2-2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 0 & 2 & \\ \hline & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$$

$$D_g = x \geq 0 \cap x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

دامنه f و g مساوی نیستند پس توابع f و g مساوی نیستند.

متوسط

-۴

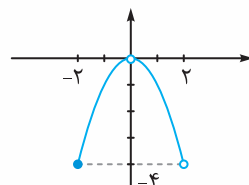
برای تشخیص برد تابع‌های درجه دوم باید حواست به رأس سهمی باشه که اگر طول رأس سهمی درون بازه باشه، حتماً مقدار عرض اون رو حساب کنیم:

$$y = -x^2 \quad x_A = \frac{-b}{2a} = 0 \xrightarrow{\text{توی بازه هست}} y_A = -(0)^2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & 0 & 2 \\ \hline -x^2 & -4 & 0 & -4 \end{array}$$

$$\Rightarrow R = [-4, 0)$$

روش دوم: به کمک نمودار



آسان

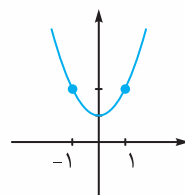
-۵

اگر عدد حقیقی را x در نظر بگیریم، تابع g ابتدا x را به x^2 تبدیل می‌کنه و سپس به x^2+1 پس:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

برای رسم می‌تونیم از انتقال و نقطه‌یابی استفاده کنیم:



ب) از روی نمودار، بخش‌هایی از محور y که توسط نمودار پوشیده شده رو برمی‌داریم:

$$R = [1, +\infty)$$

پ) هم‌دامنه، هر مجموعه‌ای است که شامل برد باشد پس مثلاً $[0, +\infty)$ یا $\mathbb{R}$ می‌توانند هم‌دامنه باشند.

متوسط

-۶

برای تشخیص ضابطه تابع بیا چند مقدار از تابع رو ببینیم:

$$\begin{array}{c|cccc} t & 5 & 10 & 15 & 20 \\ \hline h & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

با مقایسه مقادیر h (فاصله طی شده) با زمان t متوجه می‌شویم که مقادیر h از تقسیم t بر ۵ به دست می‌آیند مثلاً: $15 \div 5 = 3$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$h(t) = \frac{t}{5}$$

که واحد t ثانیه و واحد h کیلومتر است.

اگر $t \in [2, 10]$ ، چون تابع h خطی هست برای محاسبه برد کافیه ابتدا و انتهای دامنه رو در h جاگذاری کنیم:

$$h(2) = \frac{2}{5} = 0.4 \text{ km}$$

$$h(10) = \frac{10}{5} = 2 \text{ km}$$

پس برد به صورت $[0.4, 2]$ است.



آسان

۱- گزینه «۱»

گفتیم چندضابطه‌ای‌ها در صورتی تابع‌اند که مقدار هر ضابطه به ازای x ‌های یکسان یکی باشد پس:

$$x=0 \Rightarrow -2b = -a \Rightarrow 2b = a$$

$$x=2 \Rightarrow 8-a=1 \Rightarrow 8-1=a \Rightarrow a=7 \Rightarrow 2b=7 \Rightarrow b=\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{\frac{7}{2}} = 2$$

متوسط

۲- گزینه «۱»

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+2} & x \leq -1 \cup x \geq 1 \\ \frac{x^2-ax+b}{x-2} & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$x=-1 \Rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{1+a+b}{-3} \Rightarrow a+b+1=2$$

$$\Rightarrow a+b=1$$

$$x=1 \Rightarrow 0 = \frac{1-a+b}{-1} \Rightarrow 1-a+b=0 \Rightarrow -a+b=-1$$

پس از حل دستگاه داریم $a=1$, $b=0$ پس $ab=0$

متوسط

۳- گزینه «۲»

همون‌طوری که می‌دونی در زوج مرتب اگر مولفه‌های اول برابر باشند، الزاماً باید مولفه‌های دوم هم یکسان باشند پس:

$$\begin{cases} (3, m^2) \\ (3, m+2) \end{cases} \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, 2$$

چون در مولفه‌های اول m داریم پس جاگذاری می‌کنیم:

$$m=-1 \Rightarrow f = \{(3, 1)(2, 1)(-2, -1)(-1, 4)\}$$

این رابطه تابع هست پس $m=-1$ قابل قبول است و گزینه ۲ درست است.

اما چرا $m=2$ جواب نیست؟

$$m=2 \Rightarrow f = \{(3, 4)(2, 1)(-2, 2)(2, 4)\}$$

برای $x=2$ دو مقدار برای y داریم پس f تابع نمی‌شود.

آسان

۸-

دو تابع f و g دارای دامنه برابر هستند پس در صورتی مساوی می‌شوند که مقادیر f و g به ازای $x \in \mathbb{R}$ نیز مساوی شود:

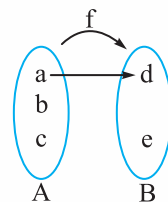
$$x \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x)$$

$$x=1 \Rightarrow g(1) = f(1) \Rightarrow -a+3=1+1 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow a=1$$

دشوار

۹-

می‌دونیم رابطه‌ای تابع هست که به ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y داشته باشیم پس طبق نمودار روبه‌رو، از a می‌تونیم فقط به یکی از اعضای B پیکان وصل کنیم و بنابراین دو انتخاب برای a وجود داره.



به همین ترتیب برای b و c هم دو انتخاب وجود داره (محدودیت ورود پیکان نداریم)

پس $2 \times 2 \times 2$ یعنی 2^3 تابع مختلف و غیرتهی از A به B وجود دارد.

به طور کلی اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد تعداد توابع ناتهی از A به B برابر m^n است. توابع این سوال رو ببینیم:

$$۱) f = \{(a, e)(b, e)(c, e)\}$$

$$۲) f = \{(a, e)(b, e)(c, d)\}$$

$$۳) f = \{(a, e)(b, d)(c, e)\}$$

$$۴) f = \{(a, e)(b, d)(c, d)\}$$

$$۵) f = \{(a, d)(b, d)(c, d)\}$$

$$۶) f = \{(a, d)(b, d)(c, e)\}$$

$$۷) f = \{(a, d)(b, e)(c, d)\}$$

$$۸) f = \{(a, d)(b, e)(c, e)\}$$

به ترتیب نوشتن زوج مرتب‌ها دقت کن!

دشوار

۱۰-

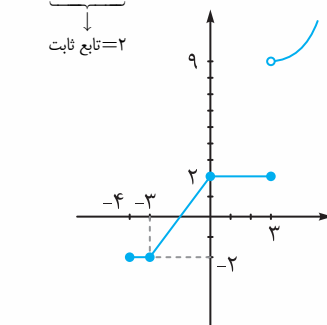
$$۱) D = [-4, +\infty) \Rightarrow x \geq -4$$

$$۲) f \text{ ثابت } 0 \leq x \leq 3$$

$$۳) \forall x > 3; f(x) = x^2$$

$$۴) -3 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = ax + b$$

$$۵) f(3) = 2, f(-3) = -2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2 & -4 \leq x < -3 \\ \frac{4}{3}x + 2 & -3 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 & x > 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow y = ax + 2$$

$$\begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow a = +\frac{4}{3}$$

۷- گزینه «ا»

دشوار

$$x=2 \Rightarrow f(2)=g(2) \Rightarrow b=2+c$$

$$x \neq 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 5x + a}{x-2} = x + c$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + a = x^2 + (c-2)x - 2c$$

$$c-2=-5 \Rightarrow c=-3$$

$$a=-2c \Rightarrow a=6$$

$$b=2+(-3)=-1$$

$$abc=6 \times (-1) \times (-3)=18$$

۸- گزینه «ب»

متوسط

$$D_f: -x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$$

پس گزینه‌های ۲ و ۳ رد هستن.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x}} \times \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = \frac{x\sqrt{-x}}{-x} = -\sqrt{-x}$$

که البته با توجه به این که $f(-1) = -1$ ، تنها گزینه ۴ درست هست.

۹- گزینه «ب»

متوسط

بررسی گزینه‌ها:

$$1) x=0 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2 \text{ تابع نیست}$$

$$2) \text{ به صورت عبارتی بر حسب } x \text{ هست پس تابع است}$$

زیرا به ازای هر مقدار x ، فقط یک مقدار برای y به دست میاد.

$$3) x=1 \Rightarrow |y+2|=2 \Rightarrow y=0, -4 \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$4) x=1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

۱۰- گزینه «ب»

دشوار

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-x^2} & D_f = [0, 1] \\ g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} & D_g = [0, 1] \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow \text{g و f مساوی}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{g و f مساوی}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \Rightarrow D_f = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty) \\ g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow D_g = (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \text{g و f نامساوی}$$

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x^2-1} & D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = D_g \\ g(x) = \sqrt{x^4-x^2} & g(x) = |x|\sqrt{x^2-1} \neq f(x) \end{cases} \Rightarrow \text{g و f نامساوی}$$

برای مورد آ و پ از نکته سوال ۵ می‌توان استفاده کرد.

دشوار

۱۳- گزینه «ب»

$$x=-1 \Rightarrow 1+a = \frac{-1+3}{1} \Rightarrow 1+a=2 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq -1 \\ \frac{x^3-3x}{x+2} & x \leq -1 \end{cases}$$

برخورد با محور x یعنی $y=0$

$$f(x)=0 \xrightarrow{(1)} x \geq -1$$

$$x^2+1=0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \Rightarrow \text{برخورد نداریم.}$$

$$(2) x \leq -1 \Rightarrow \frac{x^3-3x}{x+2}=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0, -\sqrt{3}, +\sqrt{3}$$

با توجه به دامنه $(x \leq -1)$ ، فقط $x = -\sqrt{3}$ قابل قبول است.

متوسط

۵- گزینه «ا»

بررسی گزینه‌ها:

$$1) \begin{cases} D_f: \lambda x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \lambda \Rightarrow D_f = [0, \lambda] \\ D_g: (x \geq 0) \cap (\lambda - x \geq 0 \Rightarrow x \leq \lambda) \Rightarrow D_g = [0, \lambda] \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{\lambda - x} = \sqrt{x(\lambda - x)} = f(x) \Rightarrow \text{g و f مساویند}$$

$$2) D_f: -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0, D_g: -x^3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$g(x) = \sqrt{-x^3} = \sqrt{-x^2 \times x} = |x|\sqrt{-x} \neq f(x) \Rightarrow \text{مساوی نیستند.}$$

$$3) f(4)=3, g(4)=8 \Rightarrow \text{مساوی نیستند.}$$

۴)

$$D_f = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow \text{مساوی نیستند.}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}, f(x) = \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}} \quad \text{نکته: دو تابع}$$

$$\text{یا } g(x) = \sqrt{ax+b} \times \sqrt{cx+d}, f(x) = \sqrt{(ax+b)(cx+d)}$$

در صورتی مساوی‌اند که $ac < 0$

دشوار

۶- گزینه «ب»

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

تابع کسری هست با مخرج درجه ۲ که با توجه به این که در دامنه آن فقط

یک عدد حذف شده پس عدد ۲ ریشه مضاعف مخرج بوده و مخرج به صورت

$$k(x-2)^2 \text{ هست. با مقایسه مخرج با این عبارت } k=1 \text{ هست و}$$

$$x^2 + bx + c = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow b=-4, c=4$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} = f(x)$$

$$\Rightarrow a=2 \Rightarrow a+c=2+4=6$$

آسان

۱۶- گزینه ۱»

$$M(38) = 2/89(38) + 70/64 = 180/46$$

متوسط

۱۷- گزینه ۲»

تابع f همانی است یعنی هر عددی بهش بدی «همان» را برمی گرداند.

$$f(x) = x$$

$$g(x) = k \text{ (عدد ثابت } k)$$

$$f^2(3) + 4g(5) = \frac{1}{2}f(2) \Rightarrow 3^2 + 4k = \frac{1}{2} \times 2$$

$$\Rightarrow 9 + 4k = 1 \Rightarrow 4k = -8 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow g(x) = -2$$

$$g(205) = -2$$

آسان

۱۸- گزینه ۱»

$$f(x) = x \Rightarrow (a - 2b)x + 2b + a = x \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 1 & (\text{ضریب } x) \\ 2b + a = 0 & (\text{عدد ثابت}) \end{cases}$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

$$af(3) - 2b = \frac{1}{2}(3) - 2(-\frac{1}{4}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

متوسط

۱۹- گزینه ۱»

برای اینکه x عددی صحیح باشد باید 30 بر $1 + |y|$ بخش پذیر باشد و y هم عددی صحیح باشد:

$$|1 + |y|| = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \Rightarrow$$

$$|y| = 0, 1, 2, 4, 5, 9, 14, 29 \Rightarrow y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 9, \pm 14, \pm 29$$

$$f = \{(3, 0), (15, \pm 1), (10, \pm 2), (6, \pm 4), (5, \pm 5), (3, \pm 9), (2, \pm 14), (1, \pm 29)\}$$

حداقل 7 عضو را باید از f حذف کنیم.

آسان

۲۰- گزینه ۳»

همون طوری که از دامنه مشخص هست، دامنه تنها 3 عضو داره پس تابع هم به صورت سه نقطه هست پس گزینه های 1 و 2 رد میشن. اگر f رو به زبان ریاضی بنویسیم:

$$f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$f(0) = 3$$

$$f(3) = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

که در گزینه 3 درست رسم شده است.

متوسط

۲۱- گزینه ۳»

وحیده در کل $10 + x$ پرتاب انجام داده که $7 + x$ از آن ها گل شده است

پس تابع عملکرد او به صورت $f(x) = \frac{7+x}{10+x}$ است.

آسان

۱۱- گزینه ۲»

نمایشی قابل قبول است که دامنه همان $[0, \frac{1}{3}]$ باشد و هم دامنه، شامل برد

باشد و ضابطه تابع به صورت $f(x) = x^2$ حفظ شود پس

$$\left\{ \begin{array}{l} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, +\infty) \\ f(x) = x^2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{array} \right\}$$

هر دو قابل قبولند.

آسان

۱۲- گزینه ۲»

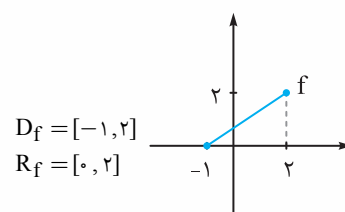
مجموعه A دارای 2 عضو و مجموعه B دارای 3 عضو است پس تعداد توابع از

A به B برابر 3^2 یعنی 9 است.

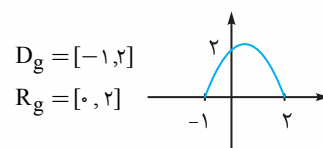
متوسط

۱۳- گزینه ۲»

آ نادرست. مثال نقض:



درحالی که $f \neq g$



(ب) درست است - ممکن است برد، همه هم دامنه را شامل شود.

(پ) نادرست - برد، زیرمجموعه ای از هم دامنه است.

(ت) درست

متوسط

۱۴- گزینه ۳»

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

به ازای $x \geq 0$ برابرند ولی درحالت کلی با وجود برابری دامنه ها، برابر نیستند پس گزینه 3 تنها گزینه درست است.

دشواری

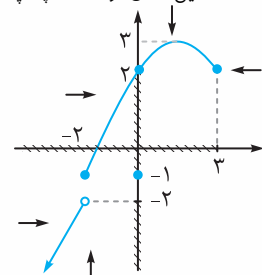
۱۵- گزینه ۴»

یه روش باحال بهت یاد بدم؟! وقتی می خوای دامنه تعیین کنی فرض کن چراغ

قوه ای رو برداشتی و از پشت نمودار و به سمت محور x (موازی محور y) نور

می تابونی، هر جا روی محور x سایه افتاد دامنه است. همین اتفاق از سمت چپ

و راست روی محور y برد رو نشون می ده.



$$D_f = (-\infty, 3]$$

$$R_f = (-\infty, -2) \cup [-1, 3]$$

متوسط

۲۷- گزینه «۳»

اگر عبارت زیر رادیکال همواره نامنفی باشد دامنه آن $\mathbb{R}$ خواهد بود پس:

$$(2a-3)x^2 + 4ax + 2a - 3 \geq 0$$

شرط همواره نامنفی $\Delta \leq 0, a > 0$ است پس:

$$2a - 3 > 0 \Rightarrow a > \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow 16a^2 - 4(2a-3)^2 \leq 0 \Rightarrow 16a^2 \leq 4(2a-3)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 \leq (2a-3)^2$$

$$4a^2 \leq 4a^2 - 12a + 9 \Rightarrow 12a \leq 9 \Rightarrow a \leq \frac{3}{4} \quad (2) \xrightarrow{\text{اشتراک (1)(2)}} \emptyset$$

آسان

۲۸- گزینه «۲»

چون دامنه دو عضو ۱ و -۱ را ندارد پس این دو ریشه‌های مخرج هستند.

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 2 \Rightarrow a = 0, -2b = -2 \Rightarrow b = 1$$

در نتیجه $1x + 0$ جواب مسئله است.

متوسط

۲۹- گزینه «۲»

اگر دو تابع با یکدیگر برابر باشند آنگاه $D_f = D_g$, $f(x) = g(x)$ پس

$$D_f : x \neq 4 \Rightarrow D_g : x \neq 4$$

پس مخرج تابع g باید شامل یک ریشه ۴ باشد در نتیجه:

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow a = -8, b = 16$$

همچنین اگر ضابطه‌ها یکسان نباشند پس:

$$g(x) = \frac{3(x + \frac{c}{3})}{(x-4)^2}$$

صورت و مخرج با یکدیگر ساده شده‌اند پس $\frac{c}{3} = -4$ در نتیجه $c = -12$

$$a + b + c = -8 + 16 - 12 = -4$$

آسان

۳۰- گزینه «۳»

$$f(x) = abx - ax^2 + 2b - 2x - 7x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (-a-7)x^2 + (ab-2)x + 2b$$

$$-a-7=0 \Rightarrow a=-7$$

$$ab-2=0 \Rightarrow -7b-2=0 \Rightarrow b=\frac{-2}{7}$$

$$f(x) = 2b = \frac{-4}{7}$$

متوسط

۲۲- گزینه «۱»

مخرج کسر تابع، درجه دوم است اما یک عدد از دامنه خارج شده پس $x=1$

ریشه مضاعف مخرج است و می‌توان مخرج را به صورت زیر نوشت:

$$x^2 + bx + c = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow b = -2, c = 1$$

دشواری

۲۳- گزینه «۲»

$$\frac{-2x^2 + ax + b}{x^2 + 3} \geq 0$$

می‌دونیم اگر $x^2 + 3 > 0$ پس کافیه صورت نامنفی باشه:

$$-2x^2 + ax + b \geq 0$$

بازه جواب $[-3, 4]$ هست پس ریشه‌ها، ۳- و ۴ هستند.

$$s = 1 \Rightarrow \frac{-a}{-2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$p = -12 \Rightarrow \frac{-b}{2} = -12 \Rightarrow b = 24 \Rightarrow a + b = 26$$

متوسط

۲۴- گزینه «۳»

$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + 1}$$

دامنه صورت و مخرج رو جداگانه حساب می‌کنیم و سپس اشتراک می‌گیریم:

$$(1) \quad x \geq 0 \quad \text{صورت}$$

$$\text{مخرج: } \begin{cases} x \geq 0 & (2) \\ x\sqrt{x} + 1 \neq 0 \Rightarrow x\sqrt{x} \neq -1 \Rightarrow x^3 \neq -1 \Rightarrow x \neq -1 & (3) \end{cases}$$

از اشتراک این سه مجموعه داریم $x \geq 0$ یعنی:

$$D = [0, +\infty)$$

آسان

۲۵- گزینه «۴»

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

$$\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x+2 \geq x+3 \Rightarrow 2 \geq 3 \Rightarrow \emptyset \quad (\text{غ ق ق})$$

از اشتراک سه قسمت خواهیم داشت: $\emptyset$

روش دوم: می‌توان گزینه‌ها را در تابع امتحان کرد.

متوسط

۲۶- گزینه «۲»

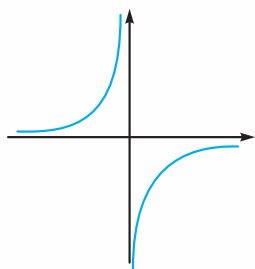
$$x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \quad \text{جواب ندارد}$$

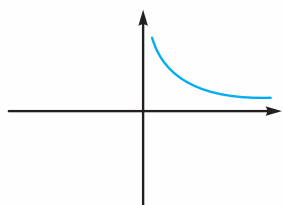
$$\frac{x+4}{x-2} = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

در نتیجه $D = \mathbb{R} - \{0, 1, -4, 2\}$ است و بنابراین A شامل ۴ عضو است.



(ث)



متوسط

-۲

دامنه صورت، کل اعداد حقیقی است و محدودیتی ایجاد نمی‌کند و $\mathbb{R} - \{1, 2\}$

نشان می‌دهد که $x=1$ و $x=2$ ریشه‌های مخرج بوده‌اند و مخرج را می‌توان

به صورت زیر نوشت:

$$(x-1)(x-2) = x^2 - ax + 2b$$

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - ax + 2b$$

$$\Rightarrow a=3, b=1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{1} = 3$$

متوسط

-۳

مخرج کسر درجه ۲ است در حالی که فقط یک عضو از $\mathbb{R}$ حذف شده و

معنی آن این است که a ریشه مضاعف مخرج هست و مخرج به فرم اتحاد

مربع است:

$$x^2 - 6x + b = (x-a)^2$$

$$x^2 - 6x + b = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ b = a^2 \Rightarrow b = 9 \end{cases}$$

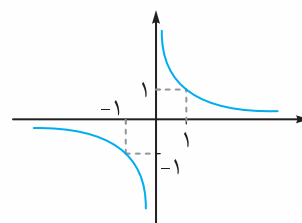
$$\Rightarrow f(x) = \frac{x-3}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} \Rightarrow f(f) = \frac{1}{4-3} = 1$$



متوسط

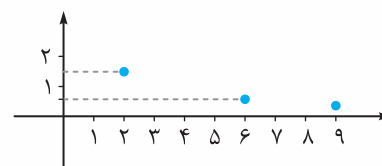
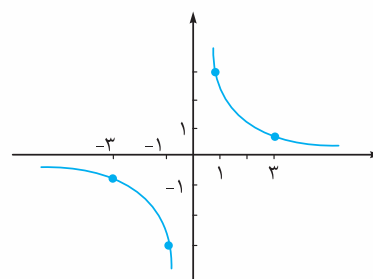
-۱

آ نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ که به نمودار پروانه‌ای معروف هست به این صورت رسم می‌شود:



$$D = \mathbb{R} - \{0\}, R = \mathbb{R} - \{0\}$$

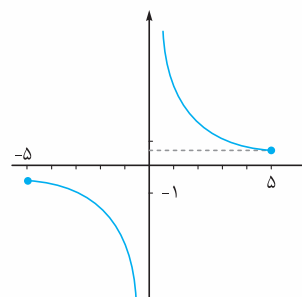
پس نمودار $y = \frac{3}{x}$ در راستای عمودی کشیده می‌شه (۳ برابر)



(ب)

x	۲	۶	۹
$\frac{3}{x}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
x	۲	۲	۳

(پ)

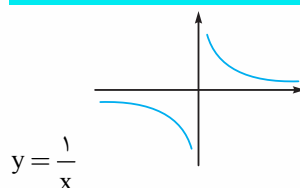


x	-۵	۵
$\frac{3}{x}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
x	-۵	۵

ت) $S(x) = -\frac{3}{x}$ همون نمودار $y = \frac{3}{x}$ هست که نسبت به محور xها

قرینه شده.

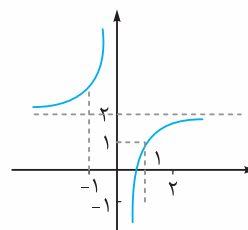
دشوار



$$y = \frac{1}{x}$$

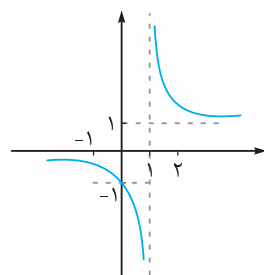
$$\bar{T}) y = \frac{2x-1}{x} = 2 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + 2$$

ابتدا نسبت به محور X قرینه و سپس ۲ واحد به بالا می‌رویم:



$$\text{ب) } y = \frac{1}{x-1}, x > 1$$

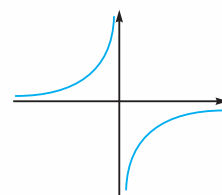
با توجه به انتقال تابع، کافیسیت به اندازه یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.



$$\text{پ) } y = \frac{-1}{x}$$

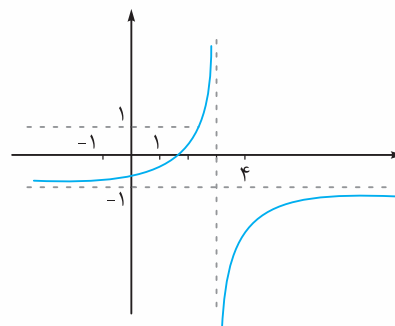
یادت باشه که اگر نمودار $-f(x)$ را خواستی بکشی باید نمودار f رو نسبت به

محور X ها قرینه کنی:



$$\text{ت) } y = \frac{-x+2}{x-3} = \frac{-(x-2)}{x-3} = -\frac{x-3+1}{x-3} = -1 - \frac{1}{x-3}$$

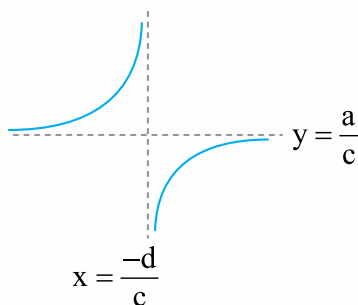
۳ واحد به سمت راست، قرینه نسبت به محور X، ۱ واحد به پایین.



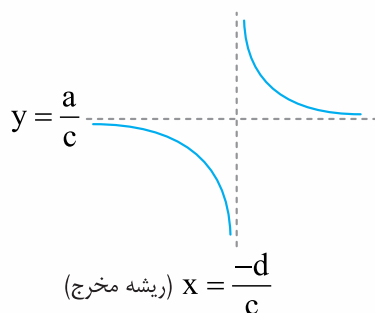
نکته مهم: توابعی به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ رو توابع هموگرافیک می‌نامیم.

نمودار این توابع از دو فرم زیر تبعیت می‌کنند:

$$۱) ad - bc > 0 \Rightarrow \text{صعودی}$$



$$۲) ad - bc < 0 \Rightarrow \text{نزولی}$$



آسان

-۵

آ) درصد آلودگی را نشان می‌دهد پس $x = 50\%$ یا $x = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{255\left(\frac{1}{2}\right)}{100 - \frac{1}{2}} = \frac{255}{199} = \frac{255}{199} = 1/28 \text{ میلیون تومان}$$

ب) تابع به صورت کسری است پس دامنه به صورت $R - \{\text{ریشه مخرج}\}$

نوشته می‌شود.

$$D = \mathbb{R} - \{100\}$$

آسان

-۶

آ) در انتهای ماه پنجم $t = 5$ است پس:

$$n(5) = \frac{9500(5) - 2000}{4 + t} = \frac{45500}{9} = 5055.5$$

یعنی حدود ۵۰۵۵ نفر

ب) $n(t) = 5500$ پس:

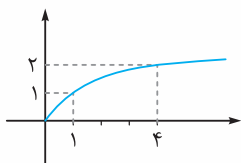
$$\frac{9500t - 2000}{4 + t} = 5500 \Rightarrow 9500t - 2000 = 22000 + 5500t$$

$$4000t = 22000 \Rightarrow t = 5.5 \Rightarrow \text{پس از } 5.5 \text{ ماه}$$

متوسط

-۹

نمودار تابع رادیکالی $y = \sqrt{x}$ به صورت زیر هست که به «ابرو» معروفه!

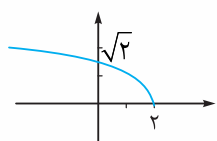


حالا واسه انتقال اول دقت کن ببین ریشه داخل رادیکال چه عددی هست شروع نمودار از همون عدد.

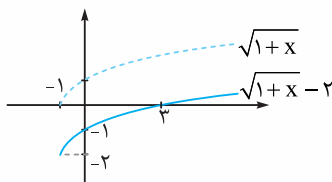
بعد اگر ضریب x مثبت بود نمودار رو به سمت راست بکش و اگر ضریب x منفی بود، نمودار رو به سمت چپ بکش.

مراحل رسم و محل برخورد نمودار با محورهای مختصات را در امتحان نهایی بنویسید.

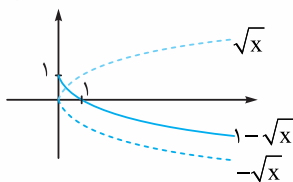
ا) $y = \sqrt{-x+2} \Rightarrow x=2$ ضریب x منفی و $x=2$



ب) $y = \sqrt{1+x}-2 \Rightarrow x=-1$ به سمت راست



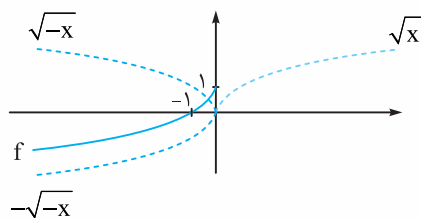
نمودار $y = 1 - \sqrt{x}$ (پ)



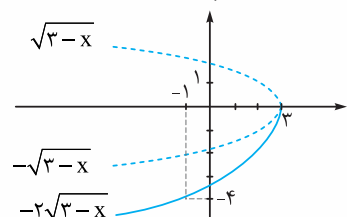
ت)

$$y = -\sqrt{-x} + 1$$

قرینه نسبت

به محور y 

نمودار $y = -2\sqrt{3-x}$ (ث)



دشوار

-۷

می‌دانیم رابطه بین سرعت، زمان و فاصله از رابطه $V = \frac{x}{t}$ به دست می‌آید

پس:

$$60 = \frac{10}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{6}, 100 = \frac{x-10}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{x-10}{100}$$

اگر طول کل مسیر رو با x نشون بدیم:

$$V = \frac{x}{t_1 + t_2} = \frac{x}{\frac{1}{6} + \frac{x-10}{100}} = \frac{x}{\frac{100 + 6x - 60}{600}} = \frac{600x}{6x + 40}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{600x}{6x + 40}$$

ب) $V(x) = 90$ پس: $\frac{600x}{6x + 40} = 90$

$$\Rightarrow 600x = 540x + 3600 \Rightarrow 60x = 3600 \Rightarrow x = 60 \text{ km}$$

متوسط

-۸

ا) $x^2 - 7x + 10 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) \neq 0$

$$\Rightarrow x \neq 2, 5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2, 5\}$$

ب) $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 \neq 0$

برای حل این نامساوی به دلیل این که درجه ۳ هست یکی از اعداد ۱، -۱، ۲، -۲ را به ترتیب جایگذاری می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow 1-2-3+4=0$$

پس یکی از ریشه‌ها $x=1$ است برای یافتن بقیه از تقسیم کردن کمک می‌گیریم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 3x + 4 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 - 4x + 4 & \\ \hline -x^2 + x & \\ \hline -x^2 + x & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow x^2 - x - 4 \neq 0 \Rightarrow \Delta = 17$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$$

پ) $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, -1$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

ت) $x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$ همواره درست $\Rightarrow D = \mathbb{R}$

زیرا $x^2 + 1$ در مخرج کسر هیچ گاه صفر نمیشه و همواره مقدار مثبتی به ما می‌دهد.

-۱۰

متوسط

دامنه توابع رادیکالی، x هایی است که زیر رادیکال رو منفی نکنه پس کافیه عبارت زیر رادیکال رو بزرگتر مساوی صفر بذاریم و نامعادله رو حل کنیم:

$$\text{آ)} \quad 2x + 6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -6 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow D = [-3, +\infty)$$

$$\text{ب)} \quad 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow D = [-\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$\text{پ)} \quad x \geq 0 \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$\text{ت)} \quad x < 0 \text{ و } 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{\cap} D_1 = (-\infty, 0)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow D_2 = [0, +\infty)$$

$$D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

-۱۱

دشوار

حواست هم به رادیکالها باشه هم به مخرج کسر:

$$\text{آ)} \quad \begin{cases} x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ x^2 - 64 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 64 \Rightarrow x \neq \pm 8 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D = [1, +\infty) - \{8\}$$

$$\text{ب)} \quad \mathbb{R} \Rightarrow \text{صورت چند جمله‌ای است}$$

رادیکالهای با فرجه فرد محدودیتی ایجاد نمی‌کنند و اون‌ها رو نادیده می‌گیریم.

$$\text{مخرج: } |x| - 5 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 5 \Rightarrow x \neq \pm 5 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-5, +5\}$$

$$\text{پ)} \quad \begin{cases} x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ |x| - 7 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 7 \Rightarrow x \neq \pm 7 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D = [4, +\infty) - \{7\}$$

-۱۲

دشوار

$$\text{آ)} \quad x^2 + 3 \geq 0 \text{ همواره برقرار}$$

$$x + |x| \neq 0 \Rightarrow |x| \neq -x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D = (0, +\infty)$$

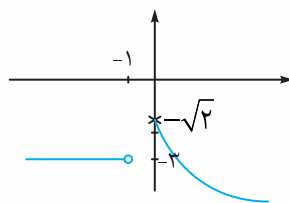
$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ |x| - x > 0 \Rightarrow |x| > x \Rightarrow x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D = [-1, 0)$$

$$\text{ب)} \quad \begin{cases} x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ 6 - x > 0 \Rightarrow x < 6 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D = [3, 6)$$

-۱۳

دشوار

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+2} & x \geq 0 \\ -3 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ -2 \end{matrix}$$



$$D = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, -\sqrt{2}]$$

-۱۴

متوسط

$$|x-1|(x^2-4) \geq 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $x=1$ $x=\pm 2$

می‌دونیم قدرمطلق همواره مثبت هست فقط به ازای ریشه عبارت داخلی صفر

میشه.

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$ x-1 $	+	+	0	+	+
x^2-4	+	0	-	-	+
P	+	+	-	-	+
	ج			ج	

$$D = (-\infty, -2) \cup [2, +\infty) \cup \{1\}$$

-۱۵

دشوار

تو اینجور سوال‌ها اول بدون توجه به نمودار، دامنه تابعی که داده رو مشخص

کن، مثلا تو این سوال تابع رادیکالی داده پس:

$$-xf(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow xf(x) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} 1) \begin{cases} x \leq 0 \\ f \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع دوم} \\ 2) \begin{cases} x \geq 0 \\ f \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع چهارم} \end{cases}$$

پس دامنه یا x هایی رو مشخص می‌کنیم که در این دو ربع، نمودار داشته

باشیم:

$$D = [-4, -2] \cup [0, 4]$$

-۱۶

متوسط

حواست باشه که ۳ تا رادیکال داریم:

$$1) \quad x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

$$2) \quad x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$3) \quad \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} \geq \sqrt{x+2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x + 3 \geq x + 2 \Rightarrow 3 \geq 2 \Rightarrow \text{همواره برقرار}$$

پس با اشتراک‌گیری داریم:

$$x \geq -2$$

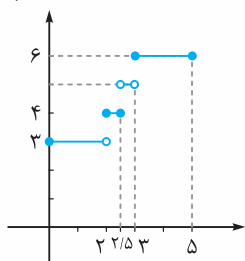
$$\Rightarrow D = [-2, +\infty)$$

آسان

-۱۹

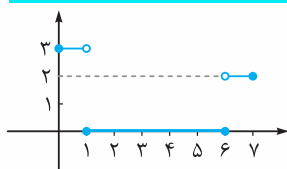
$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2.5 \\ 5 & 2.5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

ب)



آسان

-۲۰



دشوار

-۲۱

برای رسم توابع براکتی (جزء صحیح) لازمه بازه رو طوری تقسیم بندی کنیم که عبارت داخل براکت به فاصله ۱ واحدی قرار بگیره.

$$f) -2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = +2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -1$$

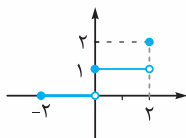
$$x = 2 \Rightarrow [2] = 2 \Rightarrow y = -2$$

ب) داخل براکت $\frac{x}{2}$ هست پس بازه رو ۲ واحدی بگیر (برعکس!) تا $\frac{x}{2}$ در بازه یک واحدی قرار بگیره.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = -1 \Rightarrow y = 0$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 1 + [1] = 2$$



به رابطه بین طول پله ها و ضریب x داخل براکت دقت کن!

پ) تو این قسمت برعکس قسمت قبلی ضریب x داخل براکت ۲ هست پس

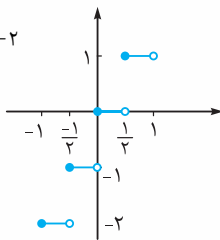
بازه ها رو نصف کن یعنی به فاصله $\frac{1}{2}$ در نظر بگیر (بازم برعکس!)

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow y = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = 1$$



می بینی! ضریب x برابر ۲ بود اما طول پله ها نصف شده!

دشوار

-۱۷

$$x^2 + |x+2| + 3x \geq 0 \Rightarrow$$

$$\downarrow$$

$$x = -2$$

$$1) x \geq -2 \Rightarrow x^2 + x + 2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

$$\Delta = 8 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$x \leq -2 - \sqrt{2} \cup x \geq -2 + \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با بازه ابتدایی}} D_1 = [-2 + \sqrt{2}, +\infty)$$

$$2) x \leq -2 \Rightarrow x^2 - x - 2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 12 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x \leq -1 - \sqrt{3} \cup x \geq -1 + \sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با بازه ابتدایی}} D_2 = (-\infty, -1 - \sqrt{3}]$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, -1 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{2}, +\infty)$$

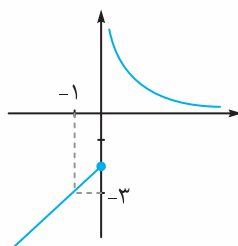
متوسط

-۱۸

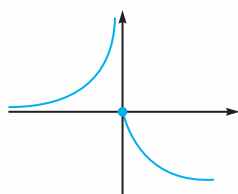
$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{array}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$$

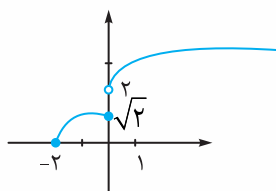


$$ب) D = \mathbb{R} \text{ و } R = \mathbb{R}$$



$$ب) D = [-2, +\infty) \quad \begin{array}{c|c} x & -2 \quad 0 \\ \hline \sqrt{x+2} & 0 \quad \sqrt{2} \end{array}$$

$$R = [0, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty)$$



دشوار

۳۳-

$$\begin{aligned} 1) \quad -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -x \\ &\quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline -x & 1 \quad 0 \end{array} \end{aligned}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1[1] = 1$$

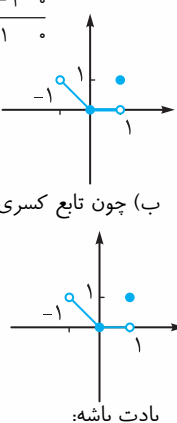
(ب) چون تابع کسری هست اول دامنه رو تعیین کنیم:

$$[x] \neq 0 \Rightarrow x \notin [0, 1)$$

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = \frac{x}{-1} = -x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow y = (1, 1)$$

یادت باشه:



متوسط

۳۴-

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$$

$$= |x-2| + |x-3|$$

حال به بازه x دقت کنیم:

$$[x] = 2 \Rightarrow \underbrace{2 \leq x < 3}_{x-2 \geq 0 \quad x-3 < 0}$$

پس عبارت مساوی هست با:

$$= \cancel{x} - 2 - \cancel{x} + 3 = 1$$

دشوار

۳۵-

همونطور که از قسمت شماره ۲۳ توی نکته یاد گرفتیم:

$$[3x+1] = x+4 \Rightarrow \underbrace{x+4 \leq 3x+1}_{1} < \underbrace{x+4+1}_{2}$$

$$1) \quad x+4 \leq 3x+1 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$2) \quad 3x+1 < x+5 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$$

با اشتراک گرفتن بین بازه‌های به دست آمده مجموعه جواب به صورت

$(\frac{3}{2}, 2)$ است. جواب جزء صحیح باید عددی صحیح باشد پس:

$$K \in \mathbb{Z} \text{ و } x+1=K$$

پس $x = K-1$ و x های صحیح فقط قابل قبول است. در بازه $(\frac{3}{2}, 2)$ عدد صحیح وجود ندارد. پس معادله جواب ندارد.

دشوار

۳۶-

اول به این نکته مهم توجه کن که تنها در صورتی می‌تونی یه عدد رو که داخل براکت جمع و تفریق شده رو از براکت بیرون بیاری که اون عدد صحیح باشه یعنی:

$$[x+k] = [x] + k, k \in \mathbb{Z}$$

در غیر این صورت اجازه خروج نداره!

$$[x + \frac{5}{2}] + [x + \frac{1}{2}] = 4 \Rightarrow [x + \frac{1}{2} + 2] + [x + \frac{1}{2}] = 4$$

$$\Rightarrow [x + \frac{1}{2}] + 2 + [x + \frac{1}{2}] = 4 \Rightarrow 2[x + \frac{1}{2}] = 2$$

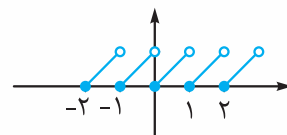
$$\Rightarrow [x + \frac{1}{2}] = 1 \Rightarrow 1 \leq x + \frac{1}{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow \text{مجموع جواب} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

دشوار

۳۷-

$$\begin{aligned} 1) \quad [-2, -1) &\Rightarrow y = x+2 \\ &\quad \begin{array}{c|c} x & -2 \quad -1 \\ \hline x+2 & 0 \quad 1 \end{array} \\ [-1, 0) &\Rightarrow y = x+1 \\ &\quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline x+1 & 0 \quad 1 \end{array} \\ [0, 1) &\Rightarrow y = x \\ &\quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline x & 0 \quad 1 \end{array} \\ [1, 2) &\Rightarrow y = x-1 \\ &\quad \begin{array}{c|c} x & 1 \quad 2 \\ \hline x-1 & 0 \quad 1 \end{array} \end{aligned}$$

برای رسم پاره‌خطا کافیه نقطه‌ای ابتدا و انتها رو جایگذاری کنی!

همونطوری که از نمودار پیداست برد این تابع $[0, 1)$ هست و یادت باشه:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

$$\text{ب) } y = x + [x] \quad [-2, 2)$$

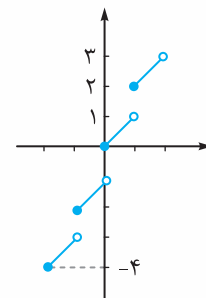
$$[-2, -1) \Rightarrow y = x-2 \quad \begin{array}{c|c} x & -2 \quad -1 \\ \hline x-2 & -4 \quad -3 \end{array}$$

$$[-1, 0) \Rightarrow y = x-1 \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline x-1 & -2 \quad -1 \end{array}$$

$$[0, 1) \Rightarrow y = x \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline x & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$[1, 2) \Rightarrow y = x+1 \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \quad 2 \\ \hline x+1 & 2 \quad 3 \end{array}$$

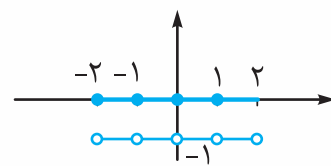
$$\text{پ) } y = [x] + [-x] \quad [-2, 2)$$



از ویژگی‌های براکت می‌دونیم که:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس:

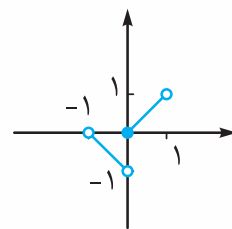


$$\text{ت) } y = |x| + [x] \quad (-1, 1)$$

با توجه به این که قدر مطلق داریم پس به علامت بازه‌ها توجه کنیم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -x + (-1) = -x - 1 \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline -x-1 & 0 \quad -1 \end{array}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = x + 0 = x \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline x & 0 \quad 1 \end{array}$$





متوسط

۱- گزینه «۳»

$$f(x) = \frac{ax-2}{x-a}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{a\}$$

اگر f یک تابع ثابت هست یعنی حاصل تقسیم صورت به مخرج یک عدد میشه
اگر از صورت a (ضریب x) رو فاکتور بگیریم:

$$f(x) = \frac{ax-2}{x-a} = \frac{a(x-\frac{2}{a})}{x-a} = a \Rightarrow x - \frac{2}{a} = x - a$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a} = a \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{2}, x \neq \sqrt{2} \\ f(x) = -\sqrt{2}, x \neq -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{گزینه ۳}$$

روش دوم:

تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ در صورت تابع ثابت است که $ad-bc=0$ شود.

دشوار

۲- گزینه «۴»

$$(1) \quad x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2 \quad \text{مخرج کسر}$$

$$(2) \quad x^2 + 3x \neq 0 \Rightarrow x(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, -3 \quad \text{مخرج کسر}$$

$$1 + \frac{2}{x^2+3x} \neq 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2+3x} \neq -1 \Rightarrow x^2+3x \neq -2 \quad \text{مخرج کسر}$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2 \neq 0 \xrightarrow{a+c=b} x \neq -1, -2 \quad (3)$$

باتوجه به شرطهای ۱ تا ۳، این اعداد در دامنه قرار ندارند:

$$0, -3, \pm 2, -1$$

$$D = \mathbb{R} - \{-3, -2, -1, 0, 2\}$$

متوسط

۳- گزینه «۳»

تابع کسری است، مخرج درجه ۲ است اما دامنه برابر $\mathbb{R}$ است معنی آن این است که مخرج فاقد ریشه است پس:

(اگر درجه ۱ باشد حتما ریشه دارد) $\rightarrow$ (درجه ۲ باشد) $a \neq 0$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4a(\Delta) < 0 \Rightarrow 4 - 20a < 0 \Rightarrow 4 < 20a \Rightarrow a > \frac{1}{5}$$

دشوار

۲۷-

با توجه به رادیکال درون مخرج کسر، عبارت زیر رادیکال باید فقط مثبت باشد

$$[x]^2 - 3 > 0 \Rightarrow [x]^2 > 3 \Rightarrow [x] > \sqrt{3} \text{ یا } [x] < -\sqrt{3}$$

$$[x] > \sqrt{3} \Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$$

$$[x] < -\sqrt{3} \Rightarrow [x] \leq -2 \Rightarrow x < -2+1 \Rightarrow x < -1$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$$

یادت باشه: اگر $n \in \mathbb{Z}$

$$[x] > n \Rightarrow x \geq n+1$$

$$[x] \geq n \Rightarrow x \geq n$$

$$[x] < n \Rightarrow x < n$$

$$[x] \leq n \Rightarrow x < n+1$$

دشوار

۲۸-

یادت هست که $0 \leq x - [x] < 1$ پس $0 \leq 2x - 2[x] < 2$ و برد تابع $f(x)$ به صورت $[0, 2)$ است.

اما برای g داریم:

$$0 \leq 2x - [2x] < 1$$

چون به طور کلی می‌تونیم بگیریم:

$$0 \leq \odot - [\odot] < 1$$

پس:

$$R_f = [0, 2)$$

$$R_g = [0, 1)$$

آسان

۲۹-

آ) می‌توان y را برحسب x محاسبه کرد پس تابع هست. ✓

ب) $x=1$ خطی قائم موازی محور y است پس تابع نیست. ✗

پ) $y=-2$ تابع ثابت است. ✓

ت) $0-1 \neq 0+3$ پس تابع نیست. (به ازای $x=0$ دو جواب دارد) ✗

ث) اگر قرار دهیم $x=1$ آن‌گاه $y^2=1$, $y=\pm 1$ پس تابع نیست. ✗

ج) تابع است، (ضابطه‌هایی که y درجه یک هست، تابع است).

دشوار

۳۰-

فرض کنیم $[x] = n$ پس:

$$n \leq x < n+1$$

هر سه طرف را با $k \in \mathbb{Z}$ جمع می‌کنیم:

$$\underbrace{n+k} \leq \underbrace{x+k} < \underbrace{n+k+1}$$

پس می‌توان نوشت:

$$[x+k] = n+k$$

$$[x+k] = [x] + k$$

طبق فرض $n = [x]$ پس:

دشوار

۸- گزینه «۱»

با توجه به وجود قدر مطلق در مخرج کسر دو بازه متفاوت در نظر می‌گیریم:

$$1) x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x^2 - x - 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1, 2 \xrightarrow{x \geq 0} \text{فقط } 2 \text{ قابل قبول}$$

$$2) x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 \neq 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq -2, 1 \xrightarrow{x < 0} \text{فقط } (-2) \text{ قابل قبول} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

آسان

۹- گزینه «۳»

باز همون داستان مخرج درجه ۲ و ریشه مضاعف:

$$x = -1 \Rightarrow \text{مضاعف } 1 \Rightarrow x^2 + ax + b = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + 2x + 1$$

با مقایسه طرفین:

$$a = 2, b = 1 \Rightarrow a + b = 3$$

آسان

۱۰- گزینه «۳»

$$2 - |x-3| \geq 0 \Rightarrow 2 \geq |x-3|$$

$$|x-3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

اعداد صحیح بازه $1, 2, 3, 4, 5$

$$|a| \leq a \xrightarrow{a > 0} -a \leq a \leq a$$

یادت باشه:

$$|a| \geq a \xrightarrow{a > 0} a \leq -a \cup a \geq a$$

دشوار

۱۱- گزینه «۳»

دامنه تابع رادیکالی:

$$ax^2 - 3bx + c \geq 0$$

نتیجه شده: $\left\{\frac{3}{4}\right\}$ یعنی این عبارت فقط به ازای $x = \frac{3}{4}$ تعریف شده هست و

در بقیه اعداد تعریف نشده هستش.

خب پس یعنی $x = \frac{3}{4}$ ریشه هست و به ازای بقیه مقادیر عبارت منفی میشه

پس میشه گفت به صورت: $k(x - \frac{3}{4})^2$ هست که k منفی باشه.

$$-x^2 - 3bx + c = k(x - \frac{3}{4})^2 = k(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) = kx^2 - 3kx + \frac{9}{4}k$$

مقایسه کنیم:

$$x^2: -1 = k$$

$$x: -3b = -3k \Rightarrow b = -1$$

$$c: \frac{9}{4}k = c = -\frac{9}{4} \Rightarrow 2b^2 + 4c = 2 - 9 = -7$$

دشوار

۱۲- گزینه «۱»

سعی می‌کنیم تابع رو کمی ساده کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 2x} = \frac{(x-3)(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{x-3}{2x} = \frac{x}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x}$$

اگر به ضابطه جدید توجه کنیم می‌بینیم که مقدار $\frac{3}{2x}$ از $\frac{1}{2}$ کم شده و هیچوقت صفر نمیشه (کسری که صورت صفر نباشه، صفر نمیشه!) پس مقدار

$$y \text{ هیچوقت } \frac{1}{2} \text{ نمیشه پس: } R = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

روش دوم:

$$\text{برد تابع هموگرافیک } y = \frac{ax + L}{cx + d} \text{ به صورت } \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\} \text{ است.}$$

متوسط

۵- گزینه «۱»

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

پس مخرج کسر g دارای ریشه مضاعف $x = 1$ است و به فرم $(x-1)^2$ نوشته می‌شود:

$$x^2 - 2cx + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

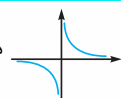
از طرفی ضابطه‌ها برابرند:

$$\frac{ax+b}{x^2-2x+1} = \frac{\delta}{x-1} \Rightarrow ax^2 - ax + bx - b = \delta x^2 - 10x + \delta p$$

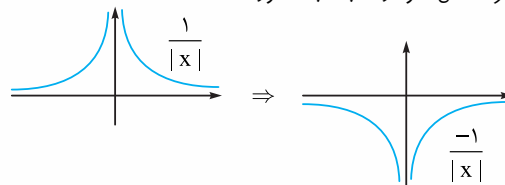
$$\Rightarrow a = \delta, -b = \delta \Rightarrow b = -\delta \Rightarrow a + b + c = \delta + 1 - \delta = 1$$

متوسط

۶- گزینه «۳»

می‌دونی که نمودار $y = \frac{1}{x}$ به صورت  هست برای رسم تابع

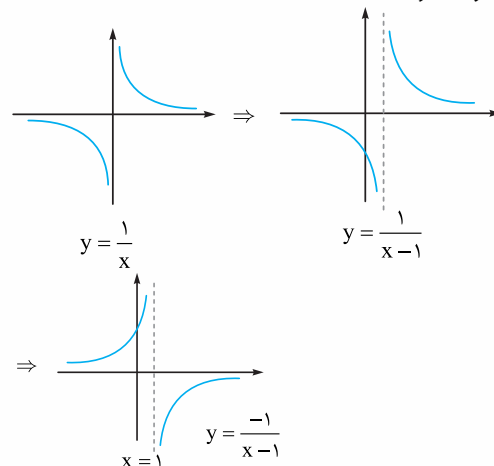
$y = \frac{-1}{|x|}$ ، باتوجه به اینکه x داخل قدرمطلق رفته باید بخش‌هایی از نمودار که زیر محور x هست رو به بالای محور x قرینه کنیم و سپس تاثیر -1 در کل تابع، قرینه کردن کل نمودار نسبت به محور x هست:



متوسط

۷- گزینه «۱»

اگر از انتقال استفاده کنیم، نمودار $\frac{1}{x}$ به اندازه ۱ واحد به راست منتقل می‌شه، سپس نسبت به محور x قرینه میشه.





۱۶- گزینه «۱»

متوسط

$$|2x-1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < 2x < 2 \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \quad \text{همچنین:}$$

$$\Rightarrow [x^2] + [x] = 0$$

۱۷- گزینه «۲»

آسان

$$f(x) = [x]$$

$$f(x - [x]) = [x - [x]]$$

می‌دونیم که: $0 \leq x - [x] < 1$

$$[x - [x]] = 0 \quad \text{پس:}$$

۱۸- گزینه «۲»

متوسط

می‌دونیم که:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f([x] + [-x]) = \begin{cases} f(0) & x \in \mathbb{Z} \\ f(-1) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [0] & x \in \mathbb{Z} \\ [-1] & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\mathbb{R} = \{-1, 0\}$$

۱۹- گزینه «۱»

دشوار

از اونجایی که می‌دونیم حاصل جمع دو برکت، عدد صحیح هست پس:

$$[x] + [4x - \frac{1}{3}] \in \mathbb{Z} \Rightarrow 8 + x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

پس x عدد صحیح است و می‌تونه از، جزء صحیح خارج بشه:

$$\Rightarrow x + 4x + \underbrace{[-\frac{1}{3}]}_{-1} = 8 + x$$

x باید عدد صحیح باشد جواب ندارد.

$$\Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4} \quad \text{غ ق ق}$$

۲۰- گزینه «۲»

آسان

$$[x - \frac{3}{4}] + [x - \frac{1}{4}] = \frac{1}{4}$$

بدون حل معادله می‌تونیم بگیریم این معادله هیچ جوابی نداره چون امکان نداره

مجموع دو برکت برابر $\frac{1}{4}$ بشه.

۲۱- گزینه «۳»

آسان

صورت چند جمله‌ای هست و محدودیتی برای x ایجاد نمی‌کنه پس:

$$[x]^2 - 4 > 0 \Rightarrow [x]^2 > 4 \Rightarrow |[x]| > 2$$

$$\begin{cases} [x] > 2 \Rightarrow x \geq 3 \\ [x] < -2 \Rightarrow x < -2 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$$

۱۲- گزینه «۱»

دشوار

عبارت زیر رادیکال به ظاهر درجه ۲ هست اما دامنه به شکل بازه $(-\infty, +\infty)$ است. می‌دونیم این بازه مربوط به عبارت‌ها و نامعادلات درجه اول هست زیرا مجموعه جواب نامعادله‌های درجه دوم یا $[a, b]$ یا $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ هست پس $a = 0$ و داریم:

$$f(x) = \sqrt{bx + 3c}$$

چون جواب بازه $(-\infty, +\infty)$ است پس $x = 3$ ریشه داخل رادیکال است.

$$3b + 3c = 0 \Rightarrow b + c = 0$$

$$a + b + c = 0$$

۱۳- گزینه «۲»

متوسط

$$\text{رادیکال داخلی: } 1 - 3x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{رادیکال خارجی: } 2 - \sqrt{1 - 3x} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2 \geq \sqrt{1 - 3x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 \geq 1 - 3x \Rightarrow 3x \geq 1 - 4 \Rightarrow 3x \geq -3 \Rightarrow x \geq -1$$

اشتراک این دو بازه:

$$D = [-1, \frac{1}{3}]$$

$$0, -1 = \text{اعداد صحیح بازه}$$

۱۴- گزینه «۴»

متوسط

تابعی که دامنه‌ش رو می‌خواد به فرم رادیکالی هست پس:

$$(2x - 2)f(x) \geq 0 \quad \text{یا} \quad (2x - 2) \cdot y > 0$$

و دو حالت ممکنه اتفاق بیافته:

$$1) \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D_1 = [2, +\infty)$$

یعنی به ازای سمت راست $x = 1$ نمودار بالای محور x باشه. یا:

$$2) \begin{cases} 2x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow D_2 = [-2, 1]$$

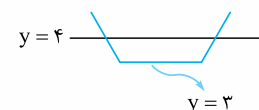
$$D_1 \cup D_2 = [-2, 1] \cup [2, +\infty)$$

۱۵- گزینه «۴»

دشوار

$$|x+1| + |x-2| - 4 \geq 0 \Rightarrow |x+1| + |x-2| \geq 4$$

از سال قبل می‌دونیم نمودار تابع سمت چپ گلدانی هست و کف گلدان $y = |b - a| = |2 - (-1)| = 3$ هست پس خط $y = 4$ بالاتر از کف گلدان قرار می‌گیره:



پس کافیست دو خط کناری رو با $y = 4$ برخورد بدیم:

$$1) x < -1 \Rightarrow -x-1-x+2 \geq 4 \Rightarrow -2x \geq 3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2}$$

$$2) x > 2 \Rightarrow x+1+x-2 \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$= -1, 0, 1, 2$ اعداد صحیح حذف شده



متوسط

۲۷- گزینه «۲»

x داخل جزء صحیح ضرب ۲ دارد پس بازه‌ها را به طول $\frac{1}{2}$ می‌گیریم:

$$0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1$$

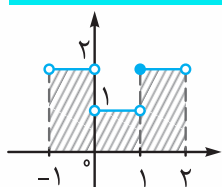
$$1 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2$$

پس ۴ پاره خط مساوی داریم.

آسان

۲۸- گزینه «۱»



$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -(-1) + 1 = 2$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow y = 1(0) + 1 = 1 \quad (x \neq 0)$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1(1) + 1 = 2$$

$$S = (1 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times 2) = 5$$

آسان

۲۹- گزینه «۳»

$$\left[-\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{10}{3}\right] + [-5] = \left[-1\frac{1}{6}\right] + \left[-3\frac{2}{3}\right] - 5 = -2 - 4 - 5 = -11$$

دشوار

۳۰- گزینه «۳»

$$\frac{-1}{3} \leq x < 1 \xrightarrow{\times(-2)} -2 < -2x \leq 1$$

$$\left[-2x\right] = \begin{cases} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

پس ۴ مقدار متفاوت به دست می‌آید.

متوسط

۳۱- گزینه «۴»

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 1 یا 2$$

آسان

۳۲- گزینه «۱»

$$2 \leq -2x + \frac{1}{3} < 3$$

$$\frac{5}{3} \leq -2x < \frac{8}{3}$$

$$-\frac{4}{3} < x \leq -\frac{5}{6}$$

آسان

۳۳- گزینه «۳»

$$y = \left[\frac{x}{2}\right]$$

ضرب x داخل براکت $\frac{1}{2}$ است پس بازه‌ها را ۲ واحدی در نظر می‌گیریم:

$$-2 \leq x < 0$$

$$0 \leq x < 2$$

پس دو پله با طول ۲ واحد داریم:

$$\text{مجموع طول‌ها} = 2 + 2 = 4$$

متوسط

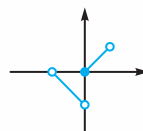
۳۴- گزینه «۴»

$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -x + [x] = -x - 1$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline -x-1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = x + [x] = x + 0 = x$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline x & 0 & 1 \end{array}$$



روش تستی: گزینه ۱ رد هست چون -1 رو توپر کشیده درحالی که در بازه نیست.

گزینه ۲ رد هست چون $y(0) = 0$

اگر $x = -\frac{1}{2}$ آن‌گاه $y = -\frac{1}{2}$ پس گزینه ۳ هم رد میشه.

دشوار

۳۵- گزینه «۳»

اول توجه کنیم چون $3x \in \mathbb{Z}$ جلوی تابع جزء صحیح قرار گرفته پس

$$[x] = 3x \Rightarrow \underbrace{\begin{matrix} 3x \leq x < 3x+1 \\ 2x \leq 0 \\ x \leq 0 \end{matrix}}_{\substack{x < 3x+1 \\ -1 < 2x \\ -\frac{1}{2} < x}} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 0$$

$$3x = K \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{K}{3} \Rightarrow \begin{cases} K=0 \Rightarrow x=0 \\ K=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

پس معادله تنها دو جواب دارد.

متوسط

۳۶- گزینه «۴»

$$1) 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow 1 \geq |x|$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$2) [x] + [-x] \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{1 \cap 2} (-1, 1) - \{0\}$$

متوسط

۳۷- گزینه «۱»

$$x - 5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x, 3x \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 3x = x - 5 \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$



دشوار

۳۹- گزینه «۱»

ابتدا به دامنه توجه کنیم: $x - [x] - \frac{3}{4} \geq 0 \Rightarrow x - [x] \geq \frac{3}{4}$

از قبل می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ از اشتراک این دو بازه

$$\frac{3}{4} \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq x - [x] - \frac{3}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{x - [x] - \frac{3}{4}} < \frac{1}{2}$$

روش دوم:

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ پس $-\frac{3}{4} \leq x - [x] - \frac{3}{4} < \frac{1}{4}$ چون زیر رادیکال

قرار دارد. فقط قسمت بزرگتر و شامل صفر آن قابل قبول است. یعنی $[\frac{1}{4}, 1]$ و

با گرفتن رادیکال بر بازه $[\frac{1}{4}, 1]$ است.

آسان

۴۰- گزینه «۲»

طبق رابطه داده شده داریم:

$$[(\sqrt{2} + 1)^6] = [198 - (\sqrt{2} - 1)^6] = 198 + [-(\sqrt{2} - 1)^6]$$

$$0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (\sqrt{2} - 1)^6 < 1 \Rightarrow -1 < -(\sqrt{2} - 1)^6 < 0$$

$$\Rightarrow [-(\sqrt{2} - 1)^6] = -1 \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = 198 + (-1) = 197$$

متوسط

۴۱- گزینه «۳»

$$[x^2 - 5x] = 10 \Rightarrow 10 \leq x^2 - 5x < 11$$

$$[x^2 - 7x] = 10 \Rightarrow 10 \leq x^2 - 7x < 11$$

از جمع کردن سه طرف این نامعادلات با یکدیگر داریم:

$$20 \leq 2x^2 - 12x < 22 \Rightarrow 10 \leq x^2 - 6x < 11$$

برای رسیدن به مربع کامل $(x - 3)^2$ لازم است $(\frac{b}{a})^2$ رو به طرفین اضافه

کنیم یعنی عدد ۹ رو:

$$19 \leq x^2 - 6x + 9 \leq 20 \Rightarrow 19 \leq (x - 3)^2 < 20$$

طبق ویژگی براکت داریم:

$$[(x - 3)^2] = 19$$

روش دوم:

اگر $[x] = [6] = k$ آنگاه $\frac{x+y}{2}$

$$[\frac{x^2 - 5x + x^2 - 7x}{2}] = 10 \Rightarrow [\frac{2(x^2 - 6x)}{2}] = 10 \Rightarrow [x^2 - 6x] = 10$$

$$\Rightarrow [x^2 - 6x + 9] = 19 \Rightarrow [(x - 3)^2] = 19$$

آسان

۴۲- گزینه «۲»

با تقسیم جملات بر ۳ داریم:

$$[2x] + [2x + \frac{1}{3}] = \frac{14}{3}$$

این معادله هیچ جوابی ندارد زیرا جمع دو جزء صحیح عددی غیر صحیح شده است.

دشوار

۳۳- گزینه «۲»

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$$

$$1) x^2 + x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0$$

زیرا $a > 0$, $\Delta < 0$ است پس $x \in \mathbb{R}$

$$2) x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

آسان

۳۴- گزینه «۱»

$$[x] + 1 = 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - [-1, 0)$$

دشوار

۳۵- گزینه «۳»

$$([x] - 2)(3 - [x]) \geq 0$$

$$1) \begin{cases} [x] - 2 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \\ 3 - [x] \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 3 \Rightarrow x < 4 \end{cases} \Rightarrow [2, 4)$$

$$2) \begin{cases} [x] - 2 \leq 0 \Rightarrow [x] \leq 2 \Rightarrow x < 3 \\ 3 - [x] \leq 0 \Rightarrow [x] \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$D = [2, 4) \cup \emptyset = [2, 4)$$

آسان

۳۶- گزینه «۲»

با امتحان کردن چند مقدار نمودار درست را انتخاب می‌کنیم.

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad (3) \text{ و } (1)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -2$$

پس گزینه ۲ درست است.

آسان

۳۷- گزینه «۴»

می‌دانیم از داخل براکت اعداد صحیح از جمله $[x]$ را می‌توان بیرون آورد:

$$= [x + [x] + [x]] - ([x] + 2[x] + 3) = 3[x] - 3[x] - 3 = -3$$

دشوار

۳۸- گزینه «۳»

در حل این تست از دو خاصیت جزء صحیح استفاده می‌کنیم:

$$1) [x + k] = [x] + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) x = [x] + p \quad 0 \leq p < 1$$

$$g(x) = 2x - 3 - [2x - 3] - 2(x - [x])$$

$$= \cancel{2x} - 3 - [\cancel{2x}] - 2x + 2[x] = 2[x] - [2x]$$

می‌دانیم که اجازه ورود یا خروج ضرب x رو نداریم:

$$x = [x] + p \xrightarrow{\times 2} 2x = 2[x] + 2p$$

$$\Rightarrow g(x) = 2[x] - [2[x] + 2p] = \cancel{2[x]} - \cancel{2[x]} - [2p]$$

$$= -[2p] \xrightarrow{0 \leq p < 1 \Rightarrow 0 \leq 2p < 2} [2p] = 0, 1 \Rightarrow -[2p] = 0, -1$$

$$\Rightarrow R_g = \{-1, 0\}$$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
f(x)	۱۶	۱	۰	۱	۱۶

x	۰	۱	۴
f(x)	۱	۲	۳

همان طور که از نمودار پیداست، دوتا تابع f ، g تنها در یک نقطه تقاطع دارند پس معادله فقط یک جواب دارد.

متوسط

گزینه ۴۷-۱

$$x^3 = [x] + [26 - x]$$

۲۶ عدد صحیح است پس می‌تواند از جزء صحیح خارج شود.

$$x^3 = [x] + [-x] + 26$$

$$1) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \Rightarrow x^3 = 26 \Rightarrow x = \sqrt[3]{26}$$

اما $\sqrt[3]{26} \notin \mathbb{Z}$ پس غیرقابل قبول است.

$$2) x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \Rightarrow x^3 = -1 + 26 = 25 \Rightarrow x = \sqrt[3]{25}$$

$\sqrt[3]{25} \notin \mathbb{Z}$ پس در بازه قرار دارد و قابل قبول است.

آسان

گزینه ۴۸-۲

ضریب x داخل پرانتز $\frac{1}{2}$ است پس بازه‌ها را به فاصله ۲ واحد در نظر

می‌گیریم:

$$[-2, 0)$$

$$[0, 2)$$

$$[2, 4)$$

$$[4, 6)$$

پس نمودار از ۴ باره خط مساوی تشکیل شده.

دشوار

گزینه ۴۹-۳

x برابر با مجموع سه عدد صحیح شده است پس $x \in \mathbb{Z}$ و بنابراین

$$2x^2 - x \in \mathbb{Z}, 2x^2 \in \mathbb{Z}$$

$$2x^2 - x - x + \left[\frac{\sqrt{3}}{5} \right] + 1 = x \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{5} \right] = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ غ ق ق (} x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

پس تنها جواب معادله $x=1$ است.

متوسط

گزینه ۵۰-۴

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-9+x}{4x^2+4x} = 0 \Rightarrow -9+x=0 \Rightarrow x=9 \text{ ق ق}$$

$$2) x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-9+x}{4x^2+4x} = -1 \Rightarrow 4x^2+4x=9-x$$

$$\Rightarrow 4x^2+5x-9=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1 \text{ (غ ق ق)}, -\frac{9}{4} \text{ (ق ق)} \Rightarrow x=-\frac{9}{4}$$

دشوار

گزینه ۵۱-۵

$(x-2)$ زیر رادیکال است پس:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x-\sqrt{2} \geq 2-\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2} \approx 1/4} x-\sqrt{2} \geq 0/6 \Rightarrow [x-\sqrt{2}] \geq 0$$

می‌دونیم که حاصل رادیکال همواره نامنفی هست و طبق نتیجه‌ای که گرفتیم براکت نیز نامنفیه. پس این معادله تنها در صورتی جواب دارد که هر دو همزمان صفر شوند:

$$\sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x=2$$

$$[2-\sqrt{2}]=[0/6]=0$$

پس $x=2$ تنها جواب معادله است.

آسان

گزینه ۵۲-۶

$$[x] \neq x \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$$[-x+5]+[x-2]=[-x]+5+[x]-2=[x]+[-x]+3$$

و می‌دونیم حاصل $[x]+[-x]$ به ازای $x \notin \mathbb{Z}$ برابر -1 هست پس:

$$= -1+3=2$$

دشوار

گزینه ۵۳-۷

از اینکه $\frac{x}{y}$ در هر دو براکت وجود دارد و با علامت قرینه هستن سعی در ساده کردن داخل براکت‌ها می‌کنیم:

$$\frac{x+9}{y} = \frac{x}{y} + \frac{9}{y} = \frac{x}{y} + \frac{2}{y} + 1$$

$$\frac{12-x}{y} = \frac{12}{y} - \frac{x}{y} = \frac{14-2}{y} - \frac{x}{y} = 2 - \frac{2}{y} - \frac{x}{y}$$

$$\left[\frac{x+9}{y} \right] + \left[\frac{12-x}{y} \right] = 3 \Rightarrow \left[\frac{x}{y} + \frac{2}{y} \right] + 1 + \left[-\frac{x}{y} - \frac{2}{y} \right] + 2 = 3$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{y} + \frac{2}{y} \right] + \left[-\left(\frac{x}{y} + \frac{2}{y} \right) \right] = 0$$

$$t = \frac{x}{y} + \frac{2}{y} \Rightarrow [t] + [-t] = 0 \Rightarrow t \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+2}{y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+2}{y} = k$$

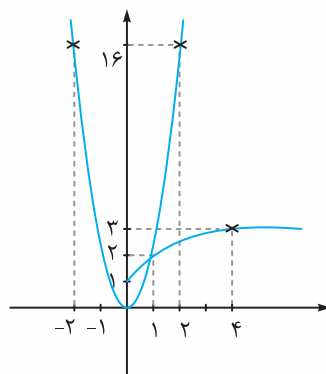
$$, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = yk - 2, k \in \mathbb{Z}$$

چون بی‌شمار k وجود دارد پس بی‌شمار جواب هم برای x وجود دارد.

متوسط

گزینه ۵۴-۸

این معادله رو به کمک رسم حل می‌کنیم چون فقط تعداد ریشه خواسته و مقدار دقیق ریشه مدنظر نیست. پس x^4 رو یک طرف نگه داریم و بقیه رو ببریم سمت راست:



$$\frac{x^4}{f(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{g(x)}$$

آسان

-۲

حواستون باشه! رابطه‌ها زمانی تابع یک‌به‌یک هستند که:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

بنا به تعریف تابع چون مولفه ۳- یکسان است باید مولفه‌های دوم آنها نیز برابر باشند پس:

$$m - 1 = m^2 - m \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m - 1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

با جایگذاری $m = 1$ در رابطه

$$f = \{(-3, 0), (2, -3), (-3, 0), (4, -3)\}$$

چون $m = 1$ باعث می‌شود دو زوج مرتب $(2, -3)$ ، $(4, -3)$ یک به یک بودن را به هم بزنند پس $m = 1$ قابل قبول نیست. (هیچ مقدار m)

آسان

-۳

طبق تعریف یک به یک از لحاظ زوج مرتب داریم:

$$(-2, 3), (2a - b, 3) \Rightarrow 2a - b = -2$$

$$(-3, 7), (a - b, 7) \Rightarrow a - b = -3$$

با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ -a - b = 3 \end{cases}$$

$$a = 1, b = 4$$

$$a + b = 1 + 4 = 5$$

آسان

-۴

طبق تعریف یک به یک از لحاظ زوج مرتب و تعریف تابع:

$$(2, m^2 - m) = (2, m)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق تعریف تابع}} m^2 - m = m \Rightarrow m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m(m - 2) = 0$$

$$\Rightarrow m = 0, m = 2$$

با جایگذاری $m = 2, m = 0$ داریم:

$$m = 0 \rightarrow (1 + k, 5), (2, 0), (3 - 2k, 5) \xrightarrow{\text{طبق تعریف یک به یک}}$$

$$1 + k = 3 - 2k \Rightarrow 3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$m = 2 \rightarrow (1 + k, 5), (2, 2), (3 - 2k, 5) \rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$m.k = (2)(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \text{ در حالت دوم و } m.k = (0)(\frac{2}{3}) = 0 \text{ در حالت اول}$$

آسان

-۵

چون در $y = 1$ ، x های ۴ و ۷ و در $y = 2$ ، x های ۲ و ۵ و در $y = 3$ ،

x های ۱ و ۶ در ارتباط هستند پس یک به یک نیست.

در هر حالت یک x را نگه داشته و باقی x ها را حذف می‌کنیم مثلاً

$$(4, 1)(2, 2)(1, 3)$$

پس x های ۷ و ۳ و ۵ و ۶ را حذف کردیم تا یک به یک شود. پس حداکثر ۳

نقطه باقی می‌ماند و ۴ نقطه حذف می‌شود.



آسان

-۱

حواستون باشه! تعریف یک به یک بودن از لحاظ زوج مرتب: یا y برابر نداشته

باشیم یا اگر y برابر داشتیم x ها نیز برابر باشند.

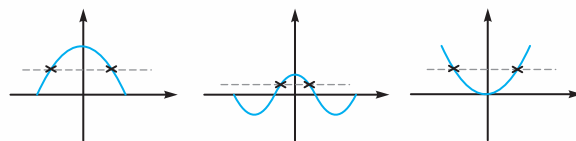
تعریف یک به یک از لحاظ شکل: خطوط موازی محور x ها شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

تعریف یک به یک بودن از لحاظ ضابطه:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

(آ) یک به یک نیست چون $y = 4$ دارای دو x متفاوت $x = 7, x = 3$ است.

(ب، پ و ث) «یک به یک» نیستند چون:



«خ» یک به یک است چون کدملی تنها می‌تواند مربوط به یک فرد باشد.

«ت» یک به یک است چون هر خط موازی محور x ها تنها در یک نقطه آن را قطع می‌کند.

$$\text{ج) } y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 + 2 \Rightarrow y = (x - 1)^2 + 2$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$\Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \text{ نیست یک به یک}$$

$$\text{ج) } y = x - 3 \rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک است

$$\text{ح) } y = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1-1}{x_1-2} = \frac{x_2-1}{x_2-2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$\cancel{x_1}x_2 - 2x_1 - x_2 + \cancel{2} = \cancel{x_2}x_1 - x_1 - 2x_2 + \cancel{2}$$

$$-x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک است.

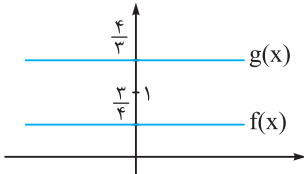
حواستون باشه! توابع سهمی و قدرمطلق به طور کلی یک به یک نیستند.

همچنین توابع خطی و هموگرافیک و رادیکالی به طور کلی یک به یک هستند.

آسان

-۹

خیر، $f(x) = \frac{3}{4}$ خطی است موازی محور x ها و همچنین $g(x) = \frac{4}{3}$ نیز خطی است موازی محور x ها درحالی که دو تابع زمانی وارون یکدیگرند که نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه باشند. درحالی که f و g نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه نیستند.



متوسط

-۱۰

برد وارون f همان دامنه تابع f است:

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

$$\{a^2, b+3\} = R_{f^{-1}} = \{-5, 9\}$$

اگر این دو مجموعه با هم برابر باشند $a^2 = 9$ پس در نتیجه $a = \pm 3$.

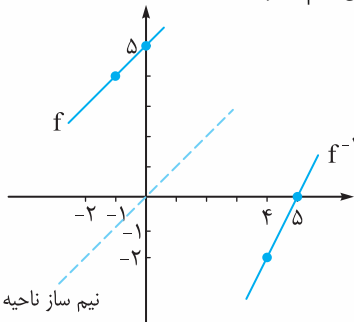
$$b+3 = -5 \Rightarrow b = -8$$

همچنین

متوسط

-۱۱

(آ) ابتدا تابع f را رسم می‌کنیم و قرینه آن را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم رسم می‌کنیم.



نیم ساز ناحیه اول و سوم

چون خطوط موازی محور x ها نمودار f را در یک نقطه قطع می‌کند پس f یک به یک است.

$$y = 2x + 5 \Rightarrow y - 5 = 2x \Rightarrow \frac{y-5}{2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} \quad (\text{ب})$$

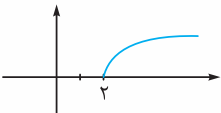
متوسط

-۱۲

ابتدا دامنه و برد f را به دست می‌آوریم

$$D_f : x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f : [2, +\infty)$$

$$R_f : y \geq 0$$



چون f یک به یک است پس f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{x-2} \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای } x, y \text{ را}} x = \sqrt{y-2} \xrightarrow[\text{با شرط } x \geq 0]{\text{}} x^2 = y - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 = y$$

$$R_{f^{-1}} = [2, +\infty), D_{f^{-1}} : x \geq 0$$

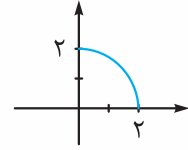
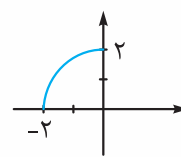
پس

نتیجه این سوال: $D_{f^{-1}} = R_f, D_f = R_{f^{-1}}$ را به خاطر بسپارید.

آسان

-۶

هر یک از بازه‌های $[0, 2]$ و $[-2, 0]$ را در نظر بگیریم یک به یک خواهد بود.

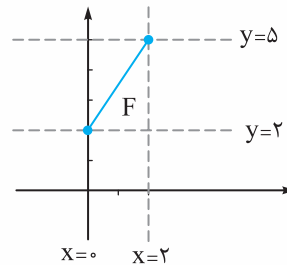
در $[-2, 0]$ یک به یک است.در $[0, 2]$ یک به یک است.

آسان

-۷

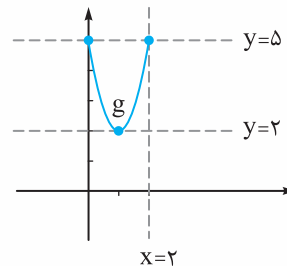
(آ) باید شکلی رسم کنید که خطوط موازی محور x ها شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

f را تابعی خطی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ رسم کردیم.



(ب) در بازه‌های داده شده شکل را طوری رسم می‌کنیم که خطوط موازی محور x ها شکل را در بیش از یک نقطه قطع کند.

تابع g را سهمی با دامنه و برد موردنظر رسم کردیم.



آسان

-۸

حواستون باشه! f^{-1} از لحاظ زوج مرتب به معنای جابه‌جایی x و y است.

نکته مهم این که:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

$$f^{-1} = \{(1, 2)(2, -1)(4, 7)\} \Rightarrow f = \{(2, 1)(-1, 2)(7, 4)\}$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2, f(-1) = 3 \xrightarrow{\text{پس}} \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

متوسط

-۱۴

حواستون باشه! شرط وارون پذیری یک تابع، یک به یک بودن آن است پس:

$$1 = n^2 - 8 \xrightarrow{\text{طبق تعریف یک به یک}} (1, 4), (n^2 - 8, 4)$$

$$\Rightarrow 9 = n^2 \Rightarrow n = \pm 3$$

$$n = +3 \Rightarrow f = \{(1, 4)(m + 9, -1)(1, 4)(2, 4)(3, m + 3)\}$$

چون $(1, 4), (2, 4)$ یک به یک بودن را خراب می کند پس $n = 3$ غیر قابل قبول است.

$$n = -3 \Rightarrow f = \{(1, 4)(m + 9, -1)(1, 4)(2, -1)(3, m + 3)\}$$

$$m + 9 = 2 \Rightarrow m = -7$$

پس $n = -3, m = -7$ قابل قبول است.

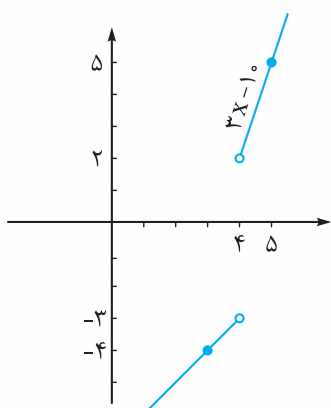
دشوار

-۱۵

حواستون باشه! برای تحلیل یک به یک بودن توابع چندضابطه ای شکل آن ها را

رسم کنید.

ابتدا $3x - 10, x - 7$ را در بازه های موردنظر رسم کنید.



با توجه به شکل در $x = 4$ نقطه ای که گذاشته می شود باید یک y بین

$[-3, 2]$ داشته باشد در غیر این صورت یک به یک نیست.



$$-3 \leq k - 5 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq k \leq 7$$

$$k \in [2, 7]$$

متوسط

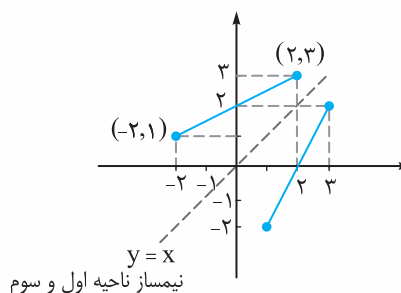
-۱۳

موارد آ و پ و ث یک به یک نیستند پس طبق خواسته سوال تنها وارون ب و ت

و ث را رسم می کنیم وارون یک تابع را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم

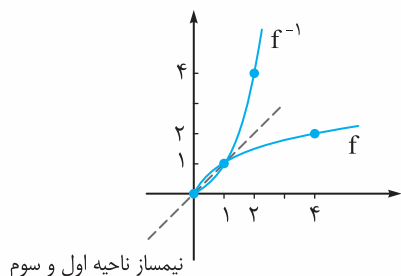
می کنیم.

ب)



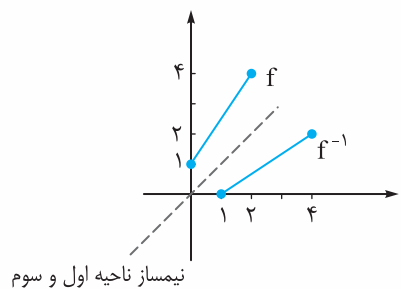
نیمساز ناحیه اول و سوم

ت)



نیمساز ناحیه اول و سوم

ث)



نیمساز ناحیه اول و سوم

$$y = \frac{-7x+3}{5} \Rightarrow x = \frac{-7y+3}{5} \Rightarrow 5x = -7y+3$$

$$\Rightarrow 5x-3 = -7y \Rightarrow y = \frac{5x-3}{-7} = k^{-1}(x)$$

ج) $M(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1-3} = \frac{2x_2-1}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow \cancel{2x_1x_2} - 6x_1 - x_2 + \cancel{3} = \cancel{2x_1x_2} - x_1 - 6x_2 + \cancel{3}$$

$$5x_2 = 5x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \text{ یک به یک است.}$$

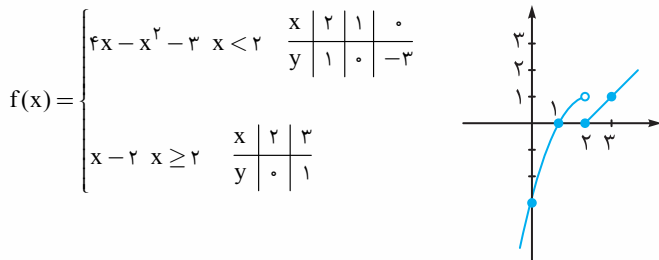
$$y = \frac{2x-1}{x-3} \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-3} \Rightarrow xy-3x = 2y-1$$

$$xy-2y = 3x-1 \Rightarrow (x-2)y = 3x-1$$

$$y = \frac{3x-1}{x-2} = M^{-1}(x)$$

دشوار

-۱۷



تابع یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست. (وارون هر ضابطه را جدا به دست می آوریم)

$$D_f : x < 2 \Rightarrow R_{f^{-1}} = (-\infty, 2)$$

$$R_f : x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0 \Rightarrow -(x-2)^2 < 0$$

$$\Rightarrow -(x-2)^2 + 1 < 1 \Rightarrow y < 1$$

$$y = -(x-2)^2 + 1 \Rightarrow x = -(y-2)^2 + 1 \Rightarrow x-1 = -(y-2)^2$$

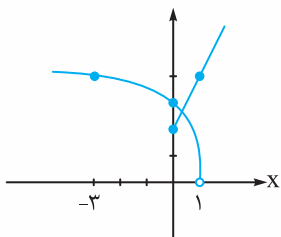
$$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 1)$$

$$-x+1 = (y-2)^2 \Rightarrow \sqrt{-x+1} = y-2 \Rightarrow \sqrt{-x+1}+2 = y = f^{-1}(x)$$

$$D_f : x \geq 2 \Rightarrow R_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

$$R_f : x \geq 2 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}+2 & x < 1 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases}$$



متوسط

-۱۹

ا) $f(x) = x^2 - 2x + 1 + 2 \Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 2$ شرط وارون پذیری
یک به یک بودن

$$y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1-1)^2 + 2 = (x_2-1)^2 + 2 \Rightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2$$

$$|x_1-1| = |x_2-1| \text{ یک به یک نیست}$$

محدود کردن دامنه $(-\infty, x_s]$ و یا $[x_s, +\infty)$. پس دامنه محدود باید

$$D_{\text{محدود}} = [1, +\infty) \text{ و یا } (-\infty, 1] \text{ با در نظر گرفتن}$$

$$f(x) = (x-1)^2 + 2$$

$$D = [1, +\infty)$$

$$x = (y-1)^2 + 2 \Rightarrow x-2 = (y-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x-2} = y-1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 = y = f^{-1}(x)$$

ب) $g(x) = (x+5)^2 \rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1+5)^2 = (x_2+5)^2$

$$\Rightarrow |x_1+5| = |x_2+5|$$

یک به یک نیست پس دامنه را محدود می کنیم پس $[-5, +\infty)$

$$y = (x+5)^2$$

$$D_{\text{محدود}} = [-5, +\infty)$$

$$x = (y+5)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y+5 \Rightarrow \sqrt{x}-5 = y \Rightarrow \sqrt{x}-5 = g^{-1}(x)$$

پ) $h(x) = -|x-1| + 1$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow -|x_1-1| + 1 = -|x_2-1| + 1 \Rightarrow |x_1-1| = |x_2-1|$$

یک به یک نیست پس باید دامنه محدود کنیم.

$$y = -|x-1| + 1$$

$$D = [1, +\infty)$$

$$y = -(x-1) + 1 \xrightarrow{x \geq 1} y = -x + 1 + 1 \Rightarrow y = -x + 2 \Rightarrow x = -y + 2$$

$$x-2 = -y$$

$$-x+2 = y = h^{-1}(x)$$

ت) $P(x) = \sqrt{x+2} - 3$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt{x_1+2} - 3 = \sqrt{x_2+2} - 3 \Rightarrow \sqrt{x_1+2} = \sqrt{x_2+2}$$

$$\Rightarrow x_1+2 = x_2+2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ است یک به یک}$$

$$y = \sqrt{x+2} - 3 \Rightarrow x = \sqrt{y+3} - 3$$

$$\Rightarrow x+3 = \sqrt{y+3} \Rightarrow (x+3)^2 = y+3$$

$$(x+3)^2 - 3 = y = p^{-1}(x)$$

ث) $k(x) = \frac{-7x+3}{5}$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{-7x_1+3}{5} = \frac{-7x_2+3}{5}$$

$$\Rightarrow -7x_1+3 = -7x_2+3 \Rightarrow -7x_1 = -7x_2$$

$$x_1 = x_2 \text{ یک به یک است.}$$

دشوار

-۲۳

$$1) y = 3x^2 - 6 \Rightarrow x = 3y^2 - 6 \Rightarrow x + 6 = 3y^2$$

$$\Rightarrow \frac{x+6}{3} = y^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x+6}{3}} = y = f^{-1}(x)$$

$$ب) y = \frac{2x-1}{x+4} \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y+4} \Rightarrow xy + 4x = 2y - 1$$

$$\Rightarrow xy - 2y = -4x - 1$$

$$y(x-2) = -4x-1 \Rightarrow y = \frac{-4x-1}{x-2} = g^{-1}(x)$$

$$پ) h(x) = |x-3| + 7$$

$$\xrightarrow{x \leq 3} h(x) = -(x-3) + 7 = -x + 3 + 7 = -x + 10$$

$$y = -x + 10 \Rightarrow x = -y + 10 \Rightarrow y = -x + 10 = h^{-1}(x)$$

$$ت) y = x^2 \xrightarrow[\substack{x \leq 0 \\ R_f = y \geq 0}]{\sqrt{y} = |x|} \sqrt{y} = -x \Rightarrow y = -\sqrt{x}$$

$$y = -x^2 \xrightarrow[\substack{x > 0 \\ R_f = y \leq 0}]{x^2 = -y} x = \sqrt{-y} \Rightarrow x = \sqrt{-y} \Rightarrow y = \sqrt{-x}$$

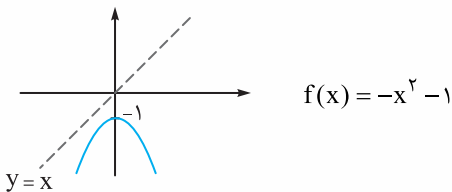
$$\xrightarrow{D_{f^{-1}} = R_f} K^{-1}(x) \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

متوسط

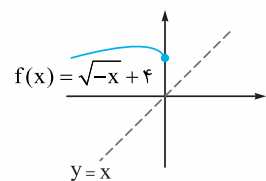
-۲۴

آ) $y = x$ و $y = -x$ را می‌توان در نظر گرفت

ب)



پ)



آسان

-۲۵

$$y = 4x \xrightarrow[\text{یک به یک بودن است}]{\text{شرط وارون پذیری}} y_1 = y_2 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک است پس وارون پذیر است.

متوسط

-۲۶

وارون تابع f را میابیم

$$y = \frac{3}{x-2} \Rightarrow x = \frac{3}{y-2}$$

$$xy - 2x = 3 \Rightarrow xy = 3 + 2x \Rightarrow y = \frac{3+2x}{x} \neq g(x)$$

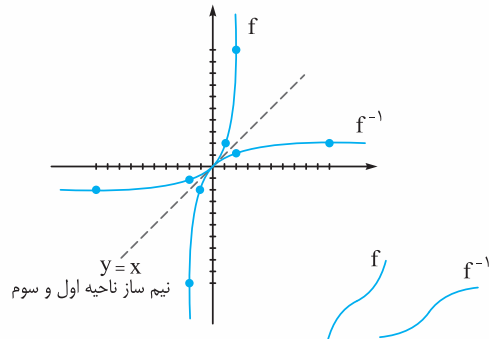
دشوار

-۱۸

ابتدا با استفاده از نقطه‌دهی f را رسم کنیم:

$$f(x) = x^2 + x$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-10	-2	0	2	10



دشوار

-۱۹

حواستون باشه! تابع f, f^{-1} یکدیگر را روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند پس می‌توان f را با $y = x$ قطع داد پس:

$$f(x) = \begin{cases} x(x) & x \geq 0 \\ x(-x) & x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (ق)} \\ x = 1 \text{ (ق)} \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 - x = 0 \Rightarrow -x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (غ ق)} \\ x = -1 \text{ (ق)} \end{cases}$$

پس f, f^{-1} یکدیگر را در سه نقطه به طول‌های ۱ و ۰ و ۱- قطع می‌کنند.

متوسط

-۲۰

با توجه به نکته سوال قبل:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \text{ (ق)}, x = 3 \text{ (ق)}$$

متوسط

-۲۱

با توجه به نکته سوال قبل:

$$x^3 - 5x^2 + 4x = x \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 - 5x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{یا } x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 12 = 13 \rightarrow \text{دو ریشه دارد.}$$

پس جمعاً سه نقطه برخورد خواهد داشت.

متوسط

-۲۲

با توجه به سوال قبل

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x+4 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

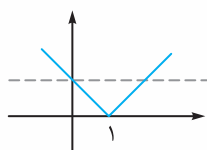
$$x = -1, x = 4$$



آسان

۱- گزینه «۲»

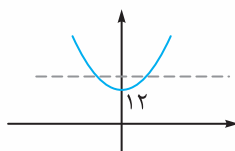
به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



$$g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

(۱) یک‌به‌یک نیست

(۲) یک‌به‌یک است



(۳) یک‌به‌یک نیست

(۴) دو زوج مرتب با ۷های یکسان، ۸های متفاوت دارند پس یک‌به‌یک نیست.

$$(1, 5), (4, 5)$$

آسان

۲- گزینه «۳»

با توجه به خطوط موازی محور ۸ها تنها گزینه ۳ یک‌به‌یک است.

گزینه اول ویژگی تابع بودن را دارا نیست.

آسان

۳- گزینه «۲»

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) با دامنه محدود $[x_S, +\infty)$ و یا $(-\infty, x_S]$ یک‌به‌یک است. (نادرست)

(۲) درست

(۳) خطی موازی محور ۸ها شرط یک‌به‌یک بودن است. (نادرست)

(۴) نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم (نادرست)

متوسط

۴- گزینه «۱»

$$f^{-1} = \frac{-dx+b}{cx-a} \text{ به صورت } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

است پس:

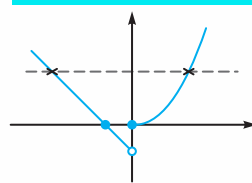
$$g^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2}$$

که اگر از منفی صورت فاکتور گرفته و در مخرج ضرب کنیم به گزینه یک

$$\frac{2x+1}{2-x} \text{ می‌رسیم}$$

آسان

۲۷-



$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$$

خطوط موازی محور ۸ها نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

دشوار

۲۸-

حواستون باشه! وارون تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت:

$$y^{-1} = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

پس در نتیجه وارون این تابع $y^{-1} = \frac{-2x+2}{x-a}$ است.

$$\frac{-2x+2}{x-a} = \frac{ax+2}{x+2}$$

$$ax^2 + 2x - a^2x - 2a = -2x^2 - 4x + 2x + 4$$

$$ax^2 + (2-a^2)x - 2a = -2x^2 - 2x + 4$$

از تساوی دو طرف نتیجه می‌شود $a = -2$ است.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ نکته: تابع هموگرافیک}$$

در صورتی بر وارون خود منطبق است که $a+d=0$

آسان

۲۹-

اگر $f^{-1}(x) = x-1$ است پس $f(x) = x+1$ است در نتیجه

$$g(x) = x+1 + \sqrt{x+1} \xrightarrow{x+1=t} g(t) = t + \sqrt{t} \xrightarrow{\frac{g^{-1}(12)}{(x,12)} \in g} \rightarrow$$

$$12 = t + \sqrt{t} \Rightarrow t + \sqrt{t} - 12 = 0 \Rightarrow (\sqrt{t}+4)(\sqrt{t}-3) = 0$$

$$\sqrt{t} = -4 \text{ (غ ق)}, \sqrt{t} = 3 \Rightarrow t = 9$$

$$x+1=9 \Rightarrow x=8$$

آسان

۳۰-

چون $f^{-1}(9) \in f$ یعنی $(x, 9) \in f$

$$9 = 2^{3x} + x \Rightarrow 9 = 8^x + x \Rightarrow x=1 \Rightarrow f^{-1}(9) = 1$$

آسان

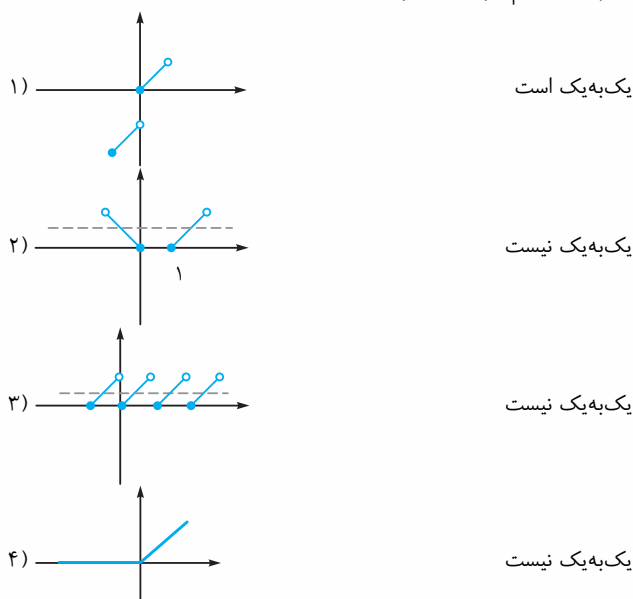
۹- گزینه «۴»

$(3, 2) = (b, 2) \xrightarrow{\text{یک به یک}} b = 3$
 $(3, 2) = (3, a^2 - a) \xrightarrow{\text{تابع}} a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$
 $\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0$
 $a = 2, a = -1$
 $a = 2 \Rightarrow \{(3, 2)(2, 5)(3, 2)(3, 2)(-1, 4)\} \Rightarrow a = 2 \text{ (ق ۱)}$
 $a = -1 \Rightarrow \{(3, 2)(-1, 5)(3, 2)(3, 2)(-1, 4)\}$
 $\xrightarrow{\text{تعریف تابع}} (-1, 5)(-1, 4) \text{ (غ ق ۱)}$
 پس $a = 2$ قابل قبول است و $b = 3$

دشوار

۱۰- گزینه «۱»

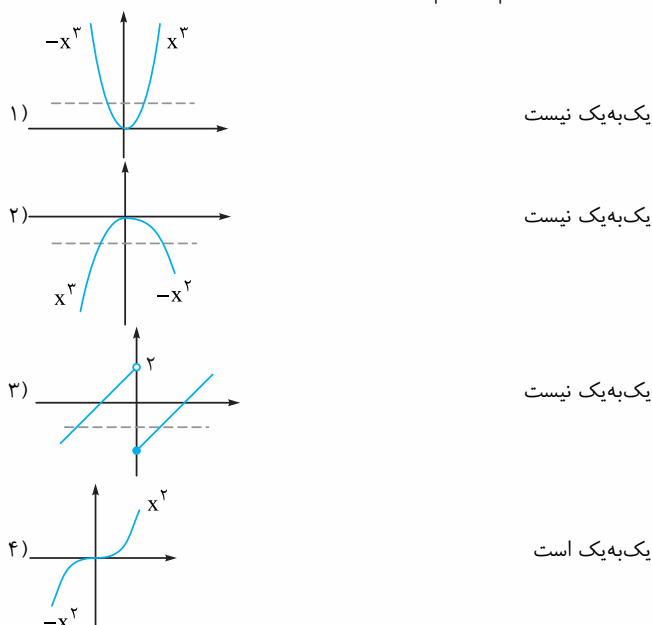
با توجه به رسم هر یک از گزینه‌ها:



دشوار

۱۱- گزینه «۴»

با استفاده از رسم‌ها داریم:



متوسط

۵- گزینه «۳»

دقت کنید $R_f = D_{f^{-1}}, D_f = R_{f^{-1}}$ پس:
 $D_f: x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3: R_{f^{-1}}$
 $R_f: y \geq -5 \rightarrow D_{f^{-1}}$
 $y = \sqrt{x+3} - 5 \Rightarrow x = \sqrt{y+5} - 3 \Rightarrow x + 5 = \sqrt{y+3}$
 $\Rightarrow (x+5)^2 = y+3$
 $x^2 + 10x + 25 = y + 3 \Rightarrow x^2 + 10x + 22 = y = f^{-1}(x)$
 $D_{f^{-1}}: x \geq -5$

متوسط

۶- گزینه «۳»

$f^{-1}(4) \in f$ یعنی $(x, 4) \in f$ پس:

$4 = -x + \sqrt{-2x}$
 $4 + x = \sqrt{-2x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (4+x)^2 = (\sqrt{-2x})^2$
 $\Rightarrow 16 + 8x + x^2 = -2x$
 $x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+8) = 0$
 $x = -2 \text{ (ق ۱)}, x = -8 \text{ (ق ۱)}$
 $x = -2$ صدق در معادله: $4 = 8 + 4 \Rightarrow 4 = 12 \times$
 $x = -8$ صدق در معادله: $4 = 2 + \sqrt{4} \Rightarrow 4 = 4 \checkmark$

دشوار

۷- گزینه «۲»

برای داشتن تابع یک به یک، هر مولفه از مجموعه A باید تنها با یک مولفه از B در ارتباط باشد پس:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $\downarrow$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 برای عدد ۱ از مجموعه A تنها یک انتخاب از B وجود دارد.
 برای عدد ۲ از مجموعه A، ۴ انتخاب از مجموعه B داریم.
 برای عدد ۳ از مجموعه A، ۳ انتخاب از مجموعه B داریم.
 برای عدد ۴ از مجموعه A، ۲ انتخاب از مجموعه B داریم.
 پس در نتیجه:

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24$$

روش دوم استفاده از فرمول ترتیب است.

متوسط

۸- گزینه «۳»

خروجی به معنای حاصل عبارت $\frac{-x}{2+\sqrt{x}}$ است پس:

$\frac{-x}{2+\sqrt{x}} = -1 \Rightarrow -x = -2 - \sqrt{x} \Rightarrow 0 = x - \sqrt{x} - 2$
 $0 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)$
 غ ق $\sqrt{x} = 2, \sqrt{x} = -1$
 $x = 4$

$x = 4$ به معنای خروجی تابع $2x - 3$ است پس:

$$2x - 3 = 4 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

دشوار

۱۴- گزینه «۳»

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow D_{f^{-1}} = x \geq 0$$

$$D_f : x \geq 0$$

$$R_f : y \geq 0$$

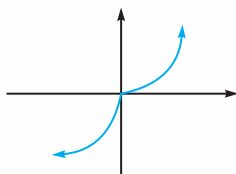
$$y = -x^2 \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow -x : y^2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{-x} = y \Rightarrow D_{f^{-1}} = x < 0$$

$$D_f : x < 0$$

$$R_f : y \leq 0$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$



متوسط

۱۵- گزینه «۳»

اگر $(x, y) \in f$ باشد آنگاه $(y, x) \in f^{-1}$ پس معکوس گزینه‌ها را صدق می‌دهیم:

$$۱) (۶۶, ۴) \Rightarrow ۴ = ۶۶^3 + \sqrt{۶۶} \quad \times$$

$$۲) (۱, ۳) \Rightarrow ۳ = ۱^3 + \sqrt{۱} \quad \times$$

$$۳) (۴, ۶۶) \Rightarrow ۶۶ = ۴^3 + \sqrt{۴} \quad \checkmark$$

$$۴) (۲, ۱) \Rightarrow ۱ = ۲^3 + ۱ \quad \times$$

متوسط

۱۶- گزینه «۴»

با توجه به $g^{-1}(۱۶)$ پس $g(x) = ۱۶$

$$f(3x - 4) = ۱۶$$

$$(3x - 4, ۱۶) \in f \Rightarrow (۱۶, 3x - 4) \in f^{-1}$$

$$3x - 4 = ۱۶ + ۴ \Rightarrow 3x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸$$

دشوار

۱۷- گزینه «۲»

با توجه به $g^{-1}(۶)$ پس $(x, ۶) \in g$

$$۶ = f(x) + \sqrt{f(x)} \xrightarrow{f(x)=t} t + \sqrt{t} - ۶ = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{t} + ۳)(\sqrt{t} - ۲) = 0$$

$$\sqrt{t} = -۳ \text{ (غ ق)}, \sqrt{t} = ۲ \Rightarrow t = ۴$$

$$f(x) = ۴ \Rightarrow (x, ۴) \in f \Rightarrow (۴, x) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(۴) = \sqrt[3]{۲(۴)} = ۲$$

دشوار

۱۸- گزینه «۳»

$$D_{f^{-1}} = R_f, D_f = R_{f^{-1}}$$

می‌دانیم

پس به محاسبه برد تابع می‌پردازیم:

$$0 \leq \sqrt{x-1} \Rightarrow 0 \geq -\sqrt{x-1} \Rightarrow 3 \geq 3 - \sqrt{x-1} \geq 0$$

$$\sqrt{3} \geq \sqrt{3 - \sqrt{x-1}} \geq 0 \Rightarrow [0, \sqrt{3}]$$

دشوار

۱۲- گزینه «۴»

علاوه بر رسم توابع می‌توان با یک خروجی تعداد ورودی‌ها را حساب کرد پس:

$$۱) y = x^5 - x + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 1 = x^5 - x + 1 \Rightarrow x^5 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$$

$$x = 0, x = 1, x = -1$$

نیست.

$$۲) y = |x| + \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow |x| + \sqrt[3]{x} = 0$$

$$\Rightarrow |x| = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow x = -1, x = 0$$

یک‌به‌یک نیست

$$۳) y = |x-2| + \sqrt{x} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = |x-2| + \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} x \geq 2: 2 = x - 2 + \sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 4 = 0 \\ x < 2: 2 = -x + 2 + \sqrt{x} \Rightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 1$$

یک‌به‌یک نیست.

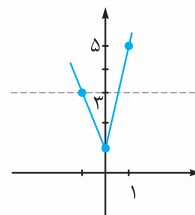
دشوار

۱۳- گزینه «۴»

با استفاده از نقطه‌دهی و رسم گزینه‌ها به رد گزینه می‌پردازیم:

$$۱) y = 3|x| + x + 1$$

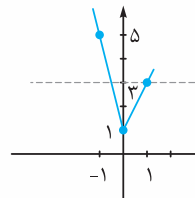
x	-۱	۰	۱
y	۳	۱	۵



یک‌به‌یک نیست پس معکوس‌پذیر نیست.

$$۲) y = 3|x| - x + 1$$

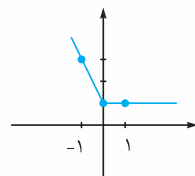
x	-۱	۰	۱
y	۵	۱	۳



یک‌به‌یک نیست معکوس‌پذیر نیست.

$$۳) y = |x| - x + 1$$

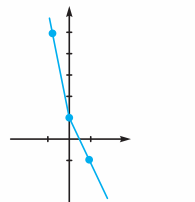
x	-۱	۰	۱
y	۳	۱	۱



یک‌به‌یک نیست

$$۴) y = |x| - 3x + 1$$

x	-۱	۰	۱
y	۴	۱	-۱



یک‌به‌یک است و معکوس‌پذیر

۱۹- گزینه «۱۴»

دشوار

ریشه داخل قدر مطلق $x=2$ است پس:

$$x \leq 2: f(x) = 2x - 4 + 2x \Rightarrow f(x) = 4x - 4$$

$$x \leq 2 \Rightarrow 4x \leq 8 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$$

$$x > 2: f(x) = 2x + 4 - 2x \Rightarrow f(x) = 4 \text{ یک به یک نیست}$$

پس $f(x) = 4x - 4$ با $D_f = (-\infty, 2]$, $R_f = (-\infty, 4]$ داریم:

$$y = 4x - 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$$

۲۰- گزینه «۱۴»

دشوار

f, f^{-1} اگر متقاطع باشند روی نیمساز اول و سوم متقاطع هستند پس

می توان نوشت:

$$x^2 + 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3$$

ریشه ندارد پس غیر متقاطع هستند.

۲۱- گزینه «۲»

دشوار

حواستون باشه! تابع چندضابطه ای وقتی یک به یک است که

(۱) اولاً در هر ضابطه یک به یک باشد.

(۲) برد ضابطه ها اشتراک نداشته باشند.

$$x > 3 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow 2x + a > 6 + a \Rightarrow y > 6 + a$$

$$x \leq 3 \Rightarrow x - 3a \leq 3 - 3a \Rightarrow y \leq 3 - 3a$$

کافی است بنویسیم:

$$3 - 3a \leq 6 + a \Rightarrow 4a \geq -3 \Rightarrow a \geq -\frac{3}{4}$$

۲۲- گزینه «۱۴»

دشوار

حواستون باشه! تابع هموگرافیک زمانی وارون پذیر نیست که یک به یک نباشد

و زمانی یک به یک نیست که $ad - bc = 0$ باشد پس:

$$5 - (-8m) = 0 \Rightarrow 5 = -8m \Rightarrow m = -\frac{5}{8}$$

۲۳- گزینه «۱۴»

آسان

اگر $(x, y) \in f$ پس $(y, x) \in f^{-1}$

اگر $(4, 1) \in f$ از وارون f می گذرد پس $(1, 4) \in f^{-1}$ پس:

$$4 = a + 1 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = 3x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \xrightarrow{(10, 3)} \frac{10-1}{3} = 3$$

۲۴- گزینه «۲»

متوسط

تقارن نسبت به نیمساز ربع اول یعنی دو تابع وارون یکدیگرند پس:

$$2x - 3y = b \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{b}{3} = y$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{b}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + \frac{b}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x + \frac{b}{2}$$

پس $f^{-1}(x)$ با $ax + by = 8$ باید برابر باشد پس:

$$ax - 8 = -by$$

$$-\frac{ax}{b} + \frac{8}{b} = y = f^{-1}(x)$$

$$-\frac{a}{b}x + \frac{8}{b} = \frac{3}{2}x + \frac{b}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{b} = \frac{b}{2} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\ -\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b=4}{b=-4} \rightarrow a = -6 \\ \frac{b=-4}{b=4} \rightarrow a = 6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{a=-6}{b=4} \rightarrow a+b = -2, \frac{a=6}{b=-4} \rightarrow a+b = +2$$

۲۵- گزینه «۱»

متوسط

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 4$$

$$y + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow \sqrt{y+4} = |x-2| \xrightarrow{x < 2} \sqrt{y+4} = -(x-2)$$

$$\Rightarrow (x-2) = -\sqrt{y+4}$$

$$x = 2 - \sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4}$$

۲۶- گزینه «۱»

متوسط

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} \\ y > 0 &\Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) \\ x < 0 &\Rightarrow f(x) = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} \\ y < 0 &\Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) \end{aligned}$$

۲۷- گزینه «۲»

دشوار

$$x \leq 1 \Rightarrow -2x \geq -2 \Rightarrow -2x + 3 \geq 1 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} \Rightarrow x \geq 1$$

$$y = -2x + 3 \Rightarrow x = -2y + 3 \Rightarrow x - 3 = -2y \Rightarrow \frac{x-3}{-2} = y = f^{-1}(x)$$

$$x > 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} < 1 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} \Rightarrow x < 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 3$$

آسان

۳۱- گزینه «ا»

$$f(2) = a$$

$$f^{-1}(a) = 2$$

$$f^{-1}(f(5)) = f^{-1}(3) = 5$$

$$a + a = 5 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

پس:

آسان

۳۲- گزینه «د»

با توجه به زوج مرتب‌های داده شده

$$f^{-1}(5) = 1$$

$$f^{-1}(4) = -2$$

$$1 + (-2) = 3k \Rightarrow -1 = 3k \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

آسان

۳۳- گزینه «ا»

$$f = \{(\underbrace{2, 1}_{a-b=2})(\underbrace{1, a-b}_{a+b=2})\} \Rightarrow a = 2 \text{ و } b = 0 \Rightarrow a + b = 2$$

آسان

۳۴- گزینه «د»

$$y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow y + 1 = \sqrt{x} \Rightarrow (y + 1)^2 = x$$

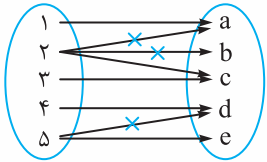
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x + 1)^2 \Rightarrow \text{گزینه ۴ درست است}$$

آسان

۳۵- گزینه «ب»

تابعی یک‌به‌یک است که هر عضو از دامنه تنها به یک عضو از برد مرتبط شده

باشد در نتیجه:



پس حداقل با حذف ۳ پیکان به منظور موردنظر خواهیم رسید.

آسان

۳۶- گزینه «ب»

$$\text{تعریف یک‌به‌یک} \Rightarrow a^2 - 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$a = 2: f = \{(3, 1)(2, 3)(4, -1)(2, 5)(3, 1)\}$$

$$a = -2: f = \{(3, 1)(-2, 3)(4, -1)(2, 5)(3, 1)\}$$

آسان

۳۷- گزینه «ب»

ابتدا ضابطه را مربع کامل و با توجه به دامنه داده شده آن را وارون می‌کنیم.

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1 \Rightarrow y = (x - 1)^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{جنر}} \sqrt{y - 1} = |x - 1|$$

$$\sqrt{y - 1} = |x - 1| \xrightarrow{x < 1} \sqrt{y - 1} = -x + 1 \Rightarrow \sqrt{y - 1} - 1 = -x$$

$$-\sqrt{y - 1} + 1 = x \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x - 1} + 1$$

متوسط

۲۸- گزینه «ب»

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

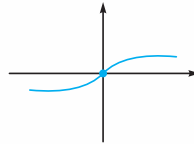
$$D_f = R_{f^{-1}} = y \geq 0$$

$$R_f = D_{f^{-1}} = x \geq 0$$

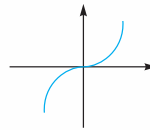
$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x}$$

$$D_f = R_{f^{-1}} = y < 0$$

$$R_f = D_{f^{-1}} = x < 0$$



روش دوم:



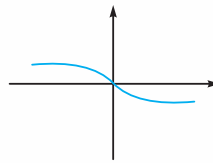
$$\text{نمودار تابع } f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

می‌باشد. وارون آن را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم.

متوسط

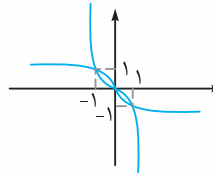
۲۹- گزینه «ب»

$$\text{نمودار تابع } y = -x^3 \text{ است که وارون آن به شکل}$$



است.

بنابراین همدیگر را در ۳ نقطه قطع می‌کنند.



روش دوم:

توابع همواره نزولی وارون خود را ممکن است روی خط $y = -x$ قطع کنند.

$$-x^3 = -x \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x = 0, -1, 1$$

دشواری

۳۰- گزینه «ا»

چون در وارون یک تابع جای دامنه و برد جابه‌جا است پس:

$$f: \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \\ x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} < \frac{1}{x} \Rightarrow y < \frac{1}{x} \end{cases}$$

حالا برای یافتن ضابطه‌ها

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \Rightarrow \sqrt{y - 1} = x$$

$$\sqrt{x - 1} = f^{-1}(x) \Rightarrow x \geq 1$$

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y - \frac{1}{x} = x \Rightarrow x - \frac{1}{x} = f^{-1}(x) \Rightarrow x < \frac{1}{x}$$

آسان

۴۲- گزینه «۲»

وقتی دو تابع به صورت زوج مرتب وارون هم باشند یعنی جای مولفه‌های اول و دوم عوض می‌شود پس:

$$\begin{aligned} \{(2, 2b+3) \in f \\ (b+4, 2) \in g\} &\Rightarrow 2b+3 = b+4 \Rightarrow b=1 \\ \{(a-1, 6) \in f \\ (3c, 1) \in g\} &\Rightarrow \begin{cases} 3c=6 \Rightarrow c=2 \\ a-1=1 \Rightarrow a=2 \end{cases} \Rightarrow a+b-c=2+1-2=1 \end{aligned}$$

آسان

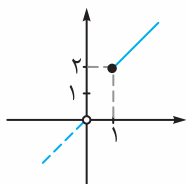
۴۳- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = \alpha &\Rightarrow (y, \alpha) \in f^{-1} \Rightarrow (\alpha, y) \in f \\ \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha = y &\Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - y = 0 \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \\ 1\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 - 8 = 0 &\Rightarrow (\alpha+1)^3 - 8 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \\ (\alpha+1)^3 = 8 &\Rightarrow \alpha+1=2 \Rightarrow \alpha=1 \end{aligned}$$

متوسط

۴۴- گزینه «۳»

با رسم شکل خواهیم داشت:



پس ax باید به گونه‌ای باشد که در نقطه صفر، y آن از یک کمتر باشد و همچنین باید شیب مثبت داشته باشد پس تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد.

آسان

۴۵- گزینه «۳»

برای یافتن وارون تابع f باید جای دامنه و برد آن نیز تغییر کند پس:

$$f: \begin{cases} x > 1 \xrightarrow{\times 2} 2x > 2 \xrightarrow{\text{پس}} y > 2 \\ x \leq 1 \xrightarrow{-3} x-3 \leq 2 \Rightarrow y \leq -2 \end{cases}$$

در نتیجه دامنه‌های تابع g , $x > 2$, $x \leq -2$ است. در نتیجه گزینه ۳ پاسخ است. (با عدد گذاری هم می‌توان به جواب رسید)

متوسط

۴۶- گزینه «۳»

تابع یک به یک بودن $\rightarrow$ شرط وارون پذیری

$$n^2 - 8 = 1 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow n = \pm 3$$

$$n = 3 \Rightarrow \{(1, 4)(m+9, -2)(1, 4)(2, 4)(3, m+3)\}$$

یک به یک نیست.

$$n = -3 \Rightarrow \{(1, 4)(m+9, -2)(1, 4)(2, -2)(3, m-3)\}$$

در نتیجه:

$$m+9=2 \Rightarrow m=-7$$

متوسط

۳۸- گزینه «۴»

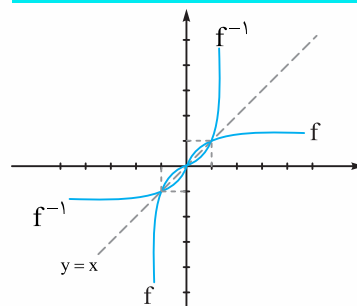
دامنه محدود وارون پذیر درجه ۲ از رابطه $(-\infty, x_s], [x_s, +\infty)$ به دست می‌آید پس:

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow D_{\text{محدود}} = (-\infty, -1] \text{ یا } D_{\text{محدود}} = [-1, +\infty)$$

در نتیجه رأس ۱- نمی‌تواند درون دامنه باشد و (۱-) تنها در گزینه ۴ درون بازه است.

متوسط

۳۹- گزینه «۴»



$$x < 0 \rightarrow -x^2 = x \Rightarrow x = 0 \text{ و } -1$$

$$x \geq 0 \rightarrow \sqrt{x} = x \Rightarrow x = 0 \text{ و } 1$$

با توجه به نمودار تابع f و وارون آن (قرینه نسبت به خط $y=x$)

می‌بینیم که دو تابع در سه نقطه برخورد دارند.

متوسط

۴۰- گزینه «۲»

وارون تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y^{-1} = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است و در صورتی f و f^{-1} برابرند که $a=-d$ باشد.

$$f(x) = \frac{3m^2x-1}{(6m+3)x-3} \Rightarrow 3m^2=3 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1$$

$$\text{اگر } m=1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{9x-3} = \frac{3x-1}{3(3x-1)} = \frac{1}{3} \leftarrow \text{تابع ثابت است و وارون پذیر نیست.}$$

$$\text{اگر } m=-1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{-3x-3} \leftarrow \text{قابل قبول است.}$$

پس به ازای یک مقدار m دو تابع برهم منطبق هستند.

متوسط

۴۱- گزینه «۴»

$$f = \{(-2, b+1)(a, 1-b)(-2, 4)(0, c)\}$$

$$f^{-1} = \{(b+1, 2)(1-b, a)(4, -2)(c, 0)\}$$

اول از همه این که با توجه به تابع بودن f داریم: $b+1=4$ و بنابراین $b=3$

$$f = \{(-2, 4)(a, -2)(0, c)\}$$

$$f^{-1} = \{(4, -2)(-2, a)(c, 0)\} \Rightarrow a=4 \Rightarrow \begin{cases} f = \{(-2, 4)(4, -2)(0, c)\} \\ f^{-1} = \{(4, -2)(-2, 4)(c, 0)\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c=0 \Rightarrow a+b+c=7$$



آسان

-۱

$$1) \ D_f = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\}$$

$$D_f = \{1, -2, 0\} \quad D_g = \{1, 2, 0\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 0\}$$

یعنی در تابع g ، y برابر صفر داشته باشیم که نداریم $\Rightarrow g(x) = 0$

$$D_f = \{1, 0\} - \{0\} = \{1\}$$

$$\frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{2}{5} \Rightarrow (1, \frac{2}{5})$$

$$\frac{f}{g}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{7}{-1} = -7 \Rightarrow (0, -7)$$

$$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{5}), (0, -7)\}$$

$$2) \ D_{f-g} = \{D_f \cap D_g\} = \{1, 0\}$$

$$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 2 - 5 = -3$$

$$(f-g)(0) = f(0) - g(0) = 7 - (-1) = 8$$

$$f-g = \{(1, -3), (0, 8)\}$$

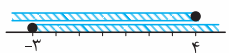
دشوار

-۲

$$f+g = \{D_f \cap D_g\}$$

$$D_f: x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

$$D_g: 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x$$

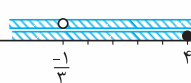


$$f+g = \sqrt{x+3} + \sqrt{4-x}$$

$$D_{f+g} = [-3, 4]$$

$$D_g: 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x$$

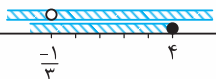
$$D_h: x \neq -\frac{1}{3}$$



$$g-h = \sqrt{4-x} - \frac{x+3}{3x+1}$$

$$D_{g-h} = (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, 4]$$

$$gh \Rightarrow \{D_g \cap D_h\}$$



$$gh = (\sqrt{4-x}) \left(\frac{x+3}{3x+1} \right)$$

$$D_{\frac{f}{g}} \Rightarrow \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = [-3, 4] - \{0\} = [-3, 4]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x} = 0 \Rightarrow 4-x = 0 \Rightarrow 4 = x \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{4-x}}$$

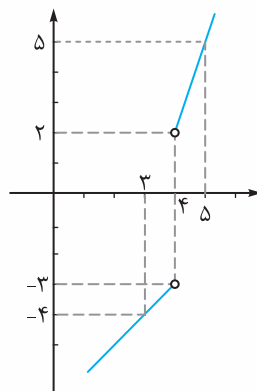
$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$(f \times h)(1) = f(1) \cdot h(1) = (2) \left(\frac{4}{1} \right) = 8$$

متوسط

۴۷-گزینه «۴»

با رسم تابع f ، حدود m رو پیدا می‌کنیم:



$$x < 4 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline x-7 & -4 \end{array}$$

$$x > 4 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 3x-10 & 2 \end{array}$$

با توجه به نمودار، در $x=4$ ، مقدار y باید مقداری بین خود -3 تا خود 2

شود تا تابع یک‌به‌یک بماند پس:

$$-3 \leq m-5 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq m \leq 7$$

آسان

۴۸-گزینه «۴»

در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ در صورتی تابع با وارون خودش برابر است

که $a = -d$ پس:

$$m = -2$$

دشوار

۴۹-گزینه «۳»

با توجه به این که در تابع $f(x) = \frac{3x-1}{4x-3}$ داریم: $a = -d$ بنابراین

$f^{-1}(x) = f(x)$ و اگر به تعداد زوج تابع f^{-1} (یا همان f) روی یک نقطه اثر کند، مقدار برابر همان نقطه (عدد) هست و اگر به تعداد فرد روی آن اثر کند، برابر مقدار تابع به ازای آن نقطه است.

در اینجا چون 1353 بار اثر کرده و 1353 عددی فرد است باید $f^{-1}(5)$ رو به دست بیاریم که همان $f(5)$ است و داریم:

$$f(5) = \frac{15-1}{20-3} = \frac{14}{17}$$

دشوار

۵۰-گزینه «۱»

تابع خطی در صورتی بر وارون خود منطبق است که یا نیمساز اول و سوم باشد

یا خطی موازی (یا خود) نیمساز دوم و چهارم.

و از اونجایی که عرض از مبدأ داریم پس شیب باید -1 باشد.

$$2m-3 = -1 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

متوسط

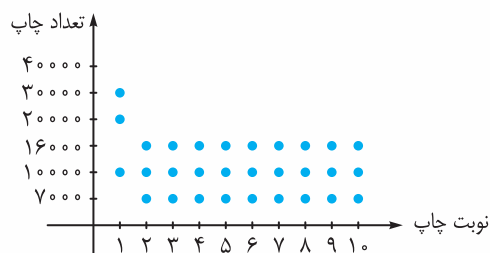
-۶

$$1) f(n) = \begin{cases} 10000 & n=1 \\ 7000 & n>1 \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} 20000 & n=1 \\ 9000 & n>1 \end{cases}$$

$$2) h(n) = f(n) + g(n) = \begin{cases} 30000 & n=1 \\ 16000 & n>1 \end{cases}$$

(ب)



دشوار

-۷

ابتدا به دامنه $\sqrt{\frac{f}{g}}$ توجه می‌کنیم

$$\frac{f}{g} \geq 0$$

با توجه به شکل ریشه‌های تابع $f \leftarrow x = 0, 1, 3$

و همچنین ریشه‌های تابع $g \leftarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
f	+	+	0	+	-	+
g	+	0	+	+	+	+
$\frac{f}{g}$	+	+	0	+	-	+

چون در دامنه نیستند.

$$\frac{f}{g} \text{ دامنه } [0, 1] \cup \{3\}$$

دشوار

-۸

$$1) D_f \cap D_g \xrightarrow{\quad} \{4\}$$

$$D_f: 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x$$

$$D_g: x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

چون فقط یک نقطه مشترک است.

$$(f \times g)(4) = f(4) \times g(4) = 0 \times 0 = 0$$

متوسط

-۹

$$D_f: x \geq 0$$

$$D_g: -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$D_f \cap D_g$$



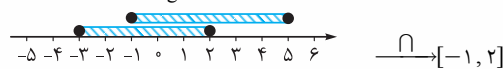
$$D_f \cap D_g = \{0\}$$

دشوار

-۱۰

طبق تعریف کتاب می‌دانیم که شرط تشکیل $f+g$ داشتن اشتراک دامنه‌هاست پس:

$$D_f = [-3, 2], D_g = [-1, 5]$$



شروع به نوشتن ضابطه‌های موجود در تابع g می‌کنیم.

$$g(x) = \begin{cases} 1x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

شروع به نوشتن ضابطه‌های موجود در تابع f می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & -3 \leq x \leq -1 \\ -1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

حاصل اشتراک دامنه‌های f و g را به دست آورده و در اشتراک، y های موجود را جمع می‌کنیم.

$$f+g = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + x + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 3 + 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f+g = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

آسان

-۱۱

برای آنکه $f \times g$ موجود باشد باید دامنه آن‌ها اشتراک داشته باشد.

$$D_f: x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow [3, +\infty)$$

$$D_g: 3-x > 0 \Rightarrow 3 > x \Rightarrow (-\infty, 3)$$

اشتراک $D_f \cap D_g$ به صورت $\emptyset$ است و چون

اشتراک تهی است پس $f \times g$ موجود نمی‌باشد.

دشوار

-۱۲

ابتدا اشتراک دامنه‌ها را بین f و g می‌یابیم.

$$D_f: x \geq 0$$

$$D_g: \{0, -2, 4, 5, 9\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{0, 4, 5, 9\}$$

حال ابتدا $2g$ را به دست می‌آوریم که به معنای ۲ برابر کردن y های g است

$$2g = \{(0, -6), (-2, 2), (4, 6), (5, 0), (9, 22)\}$$

دامنه قابل قبول برای $\frac{f-g}{2g}$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f-g} = \{0, 4, 5, 9\}$$

$$D_{2g} = \{0, -2, 4, 5, 9\}$$

$$\{D_{f-g} \cap D_{2g}\} - \{2g(x) = 0\} = \{0, 4, 5, 9\} - \{5\} = \{0, 4, 9\}$$

$$\left(\frac{f-g}{2g}\right)(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{f-g}{2g}\right)(4) = \frac{5}{6}$$

$$\left(\frac{f-g}{2g}\right)(9) = \frac{8}{11}$$

کم‌ترین مقدار به معنای کم‌ترین y است که $-\frac{1}{2}$ کم‌ترین مقدار خواهد بود.

متوسط

-۱۶

$$D_f = \mathbb{R}, D_g : x \neq \pm 3$$

$$D_f \cap D_g = \{x \neq \pm 3\}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^3 - 9x) \left(\frac{2}{x^2 - 9} \right)$$

$$= (x(x^2 - 9)) \left(\frac{2}{x^2 - 9} \right) = 2x$$

$$(f \cdot g)(x) = 2x$$

آسان

-۱۷

$$D_f = x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 4$$

$$D_g = x^2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, 1 \quad g(x) = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{x \neq \pm 4, 0, 1\} - \{-3\}$$

$$= \mathbb{R} - \{\pm 4, -3, 0, 1\}$$

$$\mathbb{R} = \{-4, -3, 0, 1, 4\}$$

دشوار

-۱۸

$$D_f : 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_g : x \geq 0, x \neq \pm 1$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g \Rightarrow$$

$$[-2, 2] - \{\pm 1\}$$

$$\frac{D_{f-g}}{D_f} = \{D_{f-g} \cap D_f\} - \{f(x) = 0\}$$

$$\{[-2, 2] - \{\pm 1\}\} - \{x \neq \pm 2\} = (-2, 2) - \{\pm 1\}$$

متوسط

-۱۹

$$D_f = [-4, 4] \quad D_g = [-2, 2]$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{[-2, 2]\} - \{\pm 2\} = (-2, 2)$$

دشوار

-۲۰

$$D_f : x \neq -4, D_g : x \neq -5$$

$$D_{\frac{f}{g}} : \{x \neq -4, -5\} - \{4x - 8 = 0\} = \mathbb{R} - \{-4, -5, 2\}$$

$$D_g = \{x \neq -4, -5\} - \{x + 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{-4, -5, -2\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \Rightarrow$$

$$= \mathbb{R} - \{-5, -4, 2, -2\}$$

متوسط

-۱۰

$$\sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$$

$$\text{اشتراک دامنه‌ها} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{1\}$$

آسان

-۱۱

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{2, -3\}$$

متوسط

-۱۲

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{4\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \neq \{-3, 4\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \neq -3, 4\} - \left\{ \frac{x+2}{x-4} = 0 \right\}$$

$$\{x \neq -3, 4\} - \{x = -2\} = \{x \neq -3, 4, -2\}$$

آسان

-۱۳

$$D_f = x - 1 \geq 0 \quad D_g = \mathbb{R}$$

اشتراک دامنه‌ها $x \geq 1$ است.

$$2f(x) - g(x) = 2\sqrt{x-1} - (x+1)^2$$

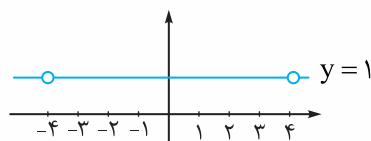
متوسط

-۱۴

شرط استفاده از ضرب دو تابع اشتراک دامنه‌هاست پس:

$$f(x) \times g(x) = \frac{x+4}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4} = 1$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{x \neq 4\} \cap \{x \neq -4\} \Rightarrow \mathbb{R} - \{4, -4\}$$



دشوار

-۱۵

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\}$$

$$D_f : x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{اشتراک}$$

$$D_g : -x + 2 > 0 \Rightarrow 2 > x$$

$$\Rightarrow (-1, 2)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{-x+2}} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (-1, 2) - \{0\} \Rightarrow$$

تنها عدد صحیح موجود در این بازه $\{1\}$ است.

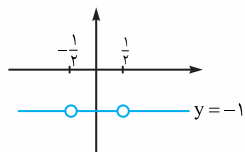
متوسط

-۲۷

$$D_f = \{x \neq -\frac{1}{2}\}, D_g = \{x \neq \frac{1}{2}\}$$

$$D_{f \times g} = \{x \neq \pm \frac{1}{2}\}$$

$$(f \times g)(x) = \frac{2x-1}{2x+1} \times \frac{-2x-1}{2x-1} = -1$$



آسان

-۲۸

$$D_f \cap D_g = \{-1, 0, 1\}$$

$$(f-g)(-1) = f(-1) - g(-1) = -1 - 4 = -5$$

$$(f-g)(0) = f(0) - g(0) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \{(-1, -5), (0, -1), (1, 2)\}$$

$$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 3 - 1 = 2$$

دشوار

-۲۹

$$D_f : x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \{2\}$$

$$D_g : 2-x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 0 \Rightarrow 2-x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{2\} - \{2\} = \emptyset$$

متوسط

-۳۰

$$D_f : x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \{2, 6\}$$

$$D_g = \{0, 1, 2, 6\}$$

$$\frac{f}{g}(2) = \frac{0}{5} = 0 \Rightarrow (2, 0)$$

$$\Rightarrow \{(2, 0), (6, \frac{1}{6})\}$$

$$\frac{f}{g}(6) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow (6, \frac{1}{4})$$



متوسط

-۱ گزینه «ا»

ابتدا دامنه‌های مشترک $f-g$, $f+g$ را حساب می‌کنیم.

$$f+g = \{(1, 4), (2, 8), (4, 8)\}, f-g = \{(1, 0), (2, -2), (4, 2)\}$$

$$(f+g)(f-g) = \{(1, 0), (2, -16), (4, 16)\}$$

متوسط

-۲ گزینه «ب»

$$f(1) = 4, g(1) = \sqrt{14} \Rightarrow (f \times g)(1) = 4\sqrt{14}$$

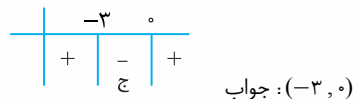
$$f(0) = 2, g(0) = 3 \Rightarrow (f+g)(0) = 5 \Rightarrow \frac{(f \times g)(1)}{(f+g)(0)} = \frac{4\sqrt{14}}{5}$$

دشوار

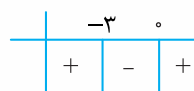
-۲۱

$$D \sqrt{\frac{-3}{x^2+3x}} \Rightarrow \frac{-3}{x^2+3x} \geq 0 \Rightarrow x^2+3x < 0$$

$$\Rightarrow x(x+3) < 0 \Rightarrow -3 < x < 0$$



$$D \sqrt{x^2+3} \Rightarrow x^2+3 \geq 0 \Rightarrow x(x+3) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$$



$$D_{\text{جمع}} = \text{اشتراک دامنه‌ها} = \text{تهی}$$

متوسط

-۲۲

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}} \Rightarrow D_f : 2+x > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$g(x) = x\sqrt{2+x} \Rightarrow 2+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{x > -2\} - \{0, -2\}$$

$$= \{x > -2\} - \{0\}$$

متوسط

-۲۳

$$(rf-g)(3) = rf(3) - g(3) = 2\sqrt{4} - (\frac{3+2}{3-4}) = 4 - (-5) = 9$$

آسان

-۲۴

$$D_f : 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_g : \{-2, 0, 2\}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{-2, 0, 2\}$$

آسان

-۲۵

$$D_f \cap D_g = \{0, 1\}$$

$$\frac{f(0)+3}{-g(0)} = \frac{3+3}{-2} = -3$$

$$\frac{f(1)+3}{-g(1)} = \frac{2+3}{-(-1)} = 5$$

$$\Rightarrow \{(0, -3), (1, 5)\}$$

آسان

-۲۶

$$f^2 = f \times f = \{(1, 4), (0, 9)\}$$

$$f^2(x) + 3f(x) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow f^2(1) + 3f(1) = 4 + 3(2) = 10 \\ x=0 \rightarrow f^2(0) + 3f(0) = 9 + 3(3) = 18 \end{cases}$$

آسان

۸- گزینه «ب»

$$D_{\frac{f}{g}} = \{1, 2, 3\} - \{3\} = \{1, 2\}$$

$$\frac{2f}{g}(1) = \frac{2f(1)}{g(1)} = \frac{2(2)}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow (1, \frac{4}{5})$$

$$\frac{2f}{g}(2) = \frac{2f(2)}{g(2)} = \frac{2(3)}{6} = 1 \Rightarrow (2, 1)$$

متوسط

۹- گزینه «ب»

$$f(\sqrt{3}) \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 = 1$$

$$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 - 2[-\frac{1}{2}] = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

آسان

۱۰- گزینه «ب»

$$D_f = (0, +\infty), D_g = (-\infty, 2)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} \Rightarrow (0, 2)$$

متوسط

۱۱- گزینه «ا»

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow \{x \neq 2\} \cap D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

پس D_g نیز $\mathbb{R} - \{2\}$ بوده است در نتیجه در مخرج مربع کامل با ریشه $\{2\}$ داریم:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

آسان

۱۲- گزینه «ب»

$$2f(-2) - f(4) = 5 \Rightarrow \frac{f(-2)=4}{f(4)=8+a} \Rightarrow 2(4) - 8 - a = 5 \Rightarrow a = -5$$

متوسط

۱۳- گزینه «ب»

$$f(x) \xrightarrow{\text{تبدیل به مکعب}} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$$

$$g(x) \xrightarrow{\text{تبدیل به مکعب}} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

$$f(\sqrt[3]{2}-1) = (\sqrt[3]{2}-1+1)^3 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$g(\sqrt[3]{2}+1) = (\sqrt[3]{2}+1-1)^3 + 1 = 3$$

$$\text{حاصل} = 1 + 3 = 4$$

متوسط

۱۴- گزینه «ا»

$$D_f = \{x+5 > 0\} \Rightarrow x > -5$$

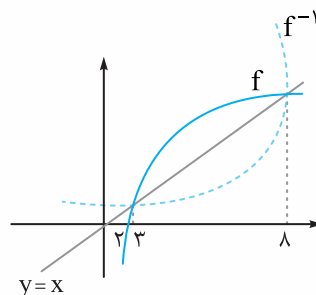
$$D_g = \{x+5 > 0\} \Rightarrow x > -5$$

$$\{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{x > -5\} - \{1\} = (-5, +\infty) - \{1\}$$

متوسط

۱۳- گزینه «ب»

با توجه به نمودار می‌توان به راحتی f^{-1} را رسم کرد پس



دامنه رادیکال: $x - f^{-1}(x) \geq 0$

$$x \geq f^{-1}(x)$$

بازه‌ای که وارون تابع f از $y = x$ پایین‌تر است دقیقاً $[3, 4]$ است.

متوسط

۱۴- گزینه «ب»

$$x^3 - 8 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$$

$$D_f : [2, +\infty)$$

متوسط

۵- گزینه «ب»

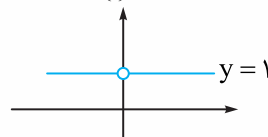
ابتدا دامنه f, g را به دست می‌آوریم.

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R}$$

$$fg = (x + \frac{1}{x})(\frac{x}{x^2+1}) = (\frac{x^2+1}{x})(\frac{x}{x^2+1}) = 1$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$



آسان

۶- گزینه «ب»

با توجه به مقدار توابع از روی شکل

$$f(2) = 2$$

$$g(4) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow g(1) = -2$$

$$\text{حاصل} = \frac{2+0}{-2} = -1$$

متوسط

۷- گزینه «ا»

ابتدا g^{-1} را به دست آورید:

$$g^{-1} = \{(-1, 2)(4, -1)(-2, 3)(-3, -4)\}$$

$$g^{-1}(f(a)) = 3 \Rightarrow (f(a), 3) \in g^{-1} \Rightarrow f(a) = -2 \Rightarrow (a, -2) \in f$$

چون خروجی تابع f ، -2 است پس باید در ضابطه $-\sqrt{-x}$ صدق کند پس:

$$-\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

آسان

۱۱- گزینه ۲»

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow (g(2a), 6) \in f^{-1} \Rightarrow (6, g(2a)) \in f$$

پس $g(2a) = 3$ است پس

$$(2a, 3) \in g \Rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \Rightarrow 6a-3=2a \Rightarrow 4a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

آسان

۲۲- گزینه ۱»

$$f(x - [x]) = [x - [x]] \xrightarrow[\text{عدد صحیح است خارج می شود}]{\text{چون } [x]} [x] - [x] = 0$$

$$f(0) = [0] = 0$$

متوسط

۲۳- گزینه ۴»

با استفاده از تعریف معکوس تابع

$$f^{-1}(g(a)) = 5 \Rightarrow (g(a), 5) \in f^{-1}$$

$$(5, g(a)) \in f$$

$$f(5) = g(a) \xrightarrow{f(5)=2(5)-3} 7 = g(a)$$

$$(a, 7) \in g$$

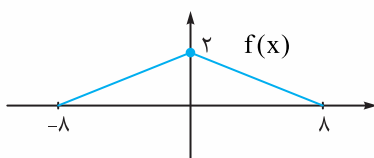
پس a باید صفر باشد که $(0, 7) \in g$

دشوار

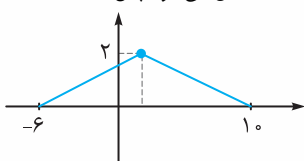
۲۴- گزینه ۳»

حواستون باشه! ابتدا نمودار $f(x)$ را می‌خواهیم به دست بیاوریم که به

معنای آن است که هر x باید دو برابر شود تا به $f(x)$ برگردد پس:



حال هر نقطه به اندازه ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌شود پس:



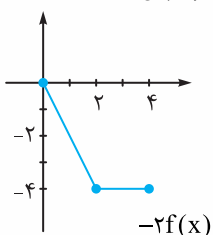
متوسط

۲۵- گزینه ۳»

حواستون باشه! $y = kf(x)$ به معنای آن است که y های تابع f در (-2)

ضرب شود چون ضرب منفی است به معنای قرینه شدن تمام y های شکل

است و در نتیجه شکل نسبت به محور x ها قرینه می‌شود. پس:



متوسط

۱۵- گزینه ۲»

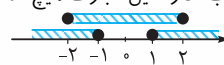
$$D_f = \{x^2 - 1 \geq 0\} \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

$$D_g = \{4 - x^2 \geq 0\} \Rightarrow 4 \geq x^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = -x \xrightarrow{x < 0} x^2 - 1 = x^2 - 1 \neq 0$$

جواب ندارد این عبارت هیچ گاه صفر نمی‌شود.

$$D_{\frac{g}{f}} = \{D_f \cap D_g\} = [-2, -1] \cup [1, 2]$$



متوسط

۱۶- گزینه ۲»

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} + 1}{-\frac{1}{x} + a} = \frac{\frac{-1+x}{x}}{\frac{-1+ax}{x}} = \frac{-1+x}{-1+ax}$$

$$\frac{x+1}{x+a} \times \frac{-1+x}{-1+ax} = -1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{-x+ax^2-a+ax^2} = -1 \Rightarrow x^2-1 = x - ax^2 + a - ax^2$$

$$= x - ax^2 + a - ax^2 \Rightarrow x^2 - 1 = -ax^2 + (1-a)x + a \Rightarrow a = -1$$

آسان

۱۷- گزینه ۳»

در تعیین دامنه‌ها اجازه ساده کردن عبارت را نداریم.

متوسط

۱۸- گزینه ۳»

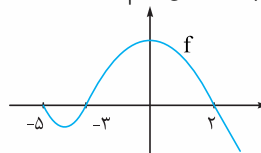
$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{-2, 0, 2\} - \emptyset = \{-2, 0, 2\}$$

دشوار

۱۹- گزینه ۴»

ابتدا از روی $f(x-2)$ نمودار $f(x)$ را می‌یابیم و از روی نمودار آن دامنه $x \cdot f(x) \geq 0$ را می‌یابیم. (۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.)



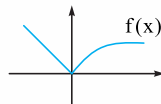
X	-5	-3	0	2	
X	-	-	-	+	+
f(x)	+	-	+	+	-
xf(x)	-	+	-	+	-

$$[-5, -3] \cup [0, 2]$$

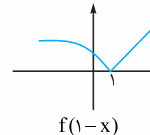
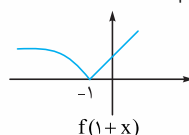
دشوار

۲۰- گزینه ۱»

ابتدا از روی $f(x-1)$ به نمودار $f(x)$ می‌رسیم. (یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.)



برای رسم $f(1-x)$ از روی $f(x)$ ، ابتدا یک واحد به سمت چپ سپس نمودار را سپس نمودار را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم.





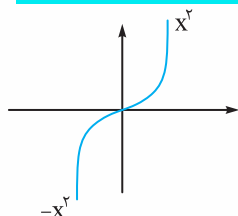
متوسط

-۱

(آ) نادرست - برد باید زیرمجموعه هم دامنه باشد اما $[-1, 5] \not\subset [-2, 4]$
 (ب) درست - چون یک به یک نیست.
 (پ) نادرست - تابع معروف $y = x - [x]$ دارای برد $[0, 1)$ است پس
 $y = 2x - 2[x]$ دارای برد $[0, 2)$ است.

متوسط

-۲



(آ)

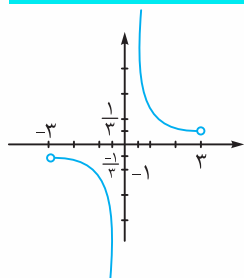
(ب) دارای دامنه‌های برابر و به ازای x های برابر $f(x) = g(x)$ باشد.

(پ) $R: y \leq 1, D: 2 \geq x$

(ت) $\mathbb{R} - \{3\}$

آسان

-۳



متوسط

-۴

ابتدا دامنه توابع را بررسی می‌کنیم.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = D_g$$

حال باید به ازای x های یکسان y برابر تولید کنند.

$$g(1) = 4$$

$$f(1) = \frac{4-1}{1+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow g(1) \neq f(1)$$

پس دو تابع برابر نیستند.

متوسط

۲۶- گزینه «۳»

با توجه به دامنه تابع g می‌توانیم آن را به صورت زوج مرتب بنویسیم:

$$g = \{(1, 2)(2, 4)(3, 6)(4, 8) \dots\}$$

$$f = \{(1, 2)(2, 3)(3, 5)(4, 7) \dots\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f + g = \{(1, 4)(2, 7)(3, 11)(4, 15) \dots\}$$

متوسط

۲۷- گزینه «۳»

$$D_f = \{x \neq 2\}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_g : x \neq \frac{1}{2}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\}$$

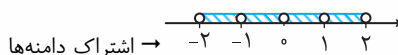
$$\{x \neq \frac{1}{2}, -2\} - \{x = \pm 1\} = \mathbb{R} - \{-1, -2, \frac{1}{2}, 1\}$$

دشواری

۲۸- گزینه «۲»

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$[x] + [-x] \neq 0 \rightarrow \begin{cases} [x] + [-x] = 0 & x \in \mathbb{Z} \\ [x] + [-x] = -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow [x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$



متوسط

۲۹- گزینه «۴»

$$f + g = \{(1, 7)(-1, 5) \dots\}$$

$$f \times g = \{(1, 10)(-1, 0) \dots\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{7}{5}) \dots\}$$

$$\frac{g}{f} = \{(1, \frac{5}{7})(-1, 0) \dots\}$$

آسان

۳۰- گزینه «۱»

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} + 2$$

$$f(\sqrt{2}) + f(-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 2 = 1$$

دشوار

-۹

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2 & -3 \leq x < 0 \\ 2x-2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f-g = \begin{cases} (x+2)-(-2) & -2 \leq x < 0 \\ 2-(2x-2) & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f-g = \begin{cases} x+4 & -2 \leq x < 0 \\ -2x+4 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

متوسط

-۱۰

$$D_f: 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x \quad D_g: x \neq 2 \quad (A)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\}$$

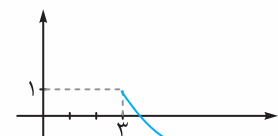
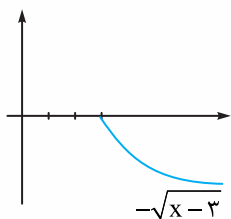
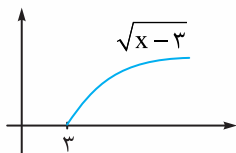
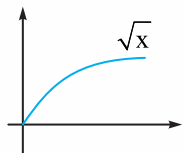
$$= \{(-\infty, 2) \cup (2, 4]\} - \{x=1\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 4]$$

(ب)

$$(f-3g)(-5) = f(-5) - 3g(-5) = 3 - 3\left(\frac{-6}{-5}\right) = 3 - \frac{18}{5} = \frac{3}{5}$$

متوسط

-۱۱



$$D: [3, +\infty)$$

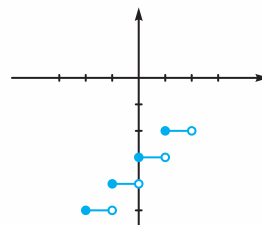
$$R: (-\infty, 1]$$

متوسط

-۵

نمودار $y = [x] - 3$ را بررسی می‌کنیم:

x	[x]	[x] - 3
$-2 \leq x < -1$	-2	-5
$-1 \leq x < 0$	-1	-4
$0 \leq x < 1$	0	-3
$1 \leq x < 2$	1	-2



آسان

-۶

$$[2x] - 3 = 5 \Rightarrow [2x] = 8$$

اگر براکت ۸ شود یعنی داخل براکت بین ۸ و ۹ بوده است.

$$8 \leq 2x < 9 \Rightarrow 4 \leq x < \frac{9}{2}$$

متوسط

-۷

$$1 \leq 2x < 4 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$$

دشوار

-۸

تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد پس:

$$y_1 = y_2$$

$$\frac{2x_1 - 1}{x_1 + 3} = \frac{2x_2 - 1}{x_2 + 3}$$

$$\cancel{2x_1}x_2 + 6x_1 - x_2\cancel{3} = \cancel{2x_2}x_1 + 6x_2 - x_1\cancel{3} \Rightarrow 7x_1 = 7x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ است یک‌به‌یک}$$

$$y = \frac{2x - 1}{x + 3}$$

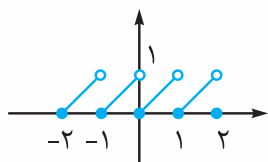
$$xy + 3y = 2x - 1 \Rightarrow xy - 2x = -3y - 1 \Rightarrow x(y - 2) = -3y - 1$$

$$x = \frac{-3y - 1}{y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x - 1}{x - 2}$$

دشوار

-۴

x	$[x]$	$x - [x]$
$-2 \leq x < -1$	-2	$x + 2$
$-1 \leq x < 0$	-1	$x + 1$
$0 \leq x < 1$	0	x
$1 \leq x < 2$	1	$x - 1$
$x = 2$	2	$x - 2$

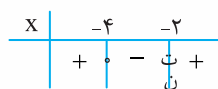


دشوار

-۵

$$D_f: \begin{cases} x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > -2 = (-2, +\infty) = D_f$$

$$D_g: \frac{x+4}{x+2} \geq 0$$



$$(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty) = D_g$$

چون دامنه دو تابع برابر نیست پس تابع ها برابر نیستند.

دشوار

-۶

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9$$

$$D_{\text{محدود}} = [3, +\infty)$$

$$D = [3, +\infty)$$

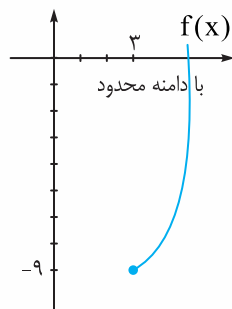
$$y = (x-3)^2 - 9$$

$$y + 9 = (x-3)^2$$

$$\sqrt{y+9} = x-3$$

$$\sqrt{y+9} + 3 = x$$

$$\sqrt{x+9} + 3 = f^{-1}(x)$$



سوالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

متوسط

-۱

آ) نادرست - چون اگر برد دو تابع یکسان باشد الزاما دو تابع با یکدیگر برابر نخواهند بود.

ب) درست

پ) نادرست - چون $D_g = \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

دشوار

-۲

آ) ابتدا $x^2 - 6x + 9 - 9$ را به مربع کامل تبدیل کنید:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9$$

$$6x - x^2 = -(x^2 - 6x + 9 - 9) = -(x-3)^2 + 9$$

پس:

$$f(x) = [(x-3)^2 - 9] - [-(x-3)^2 + 9]$$

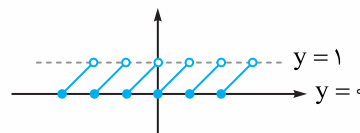
$$f(3 - \sqrt{5}) = [(3 - \sqrt{5} - 3)^2 - 9] - [-(3 - \sqrt{5} - 3)^2 + 9]$$

$$= [-4] - [-4] = -8$$

ب) ضابطه های آن ها برابر نیستند.

$$g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x = f(x)$$

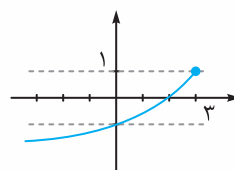
پ) $(0, 1)$ با توجه به شکل معروف آن



متوسط

-۳

$$f(x) = 1 - \sqrt{3-x}$$



چون هر خط موازی محور xها شکل را در یک نقطه قطع می کند پس یک به یک است.

$$y = 1 - \sqrt{3-x}$$

$$x = 1 - \sqrt{3-y}$$

$$\sqrt{3-y} = 1-x$$

$$3-y = (1-x)^2$$

$$3 - (1-x)^2 = y \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - (1-x)^2$$

متوسط

-۱۱

$$f(x) = \frac{3x}{[x] + [-x]}$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

همونطوری که از تعریف عبارت مخرج مشخصه، اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، اونوقت مخرج صفر می‌شه پس دامنه تابع f به صورت $x \notin \mathbb{Z}$ است یا:

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$



دشوار

-۱ گزینه «۲»

حواستون باشه! وارون کردن بعضی از توابع کار ساده‌ای نیست پس بهتر آن است که f را با نیمساز ناحیه اول و سوم قطع دهیم. بجای آنکه f و f^{-1} را قطع دهیم چون اگر تابع f ، f^{-1} را قطع کرده باشد این تقاطع روی نیمساز ناحیه اول و سوم اتفاق افتاده است.

حالا چون f^{-1} ، f نسبت به $y = x$ قرینه‌اند، خود f نیز $y = -x$ را قطع می‌کند.

$$x - \frac{2}{x} = -x \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

چون حالا که نمودار f خط $y = -x$ را در نقطه $(-1, 1)$ قطع می‌کند پس f^{-1} را در نقطه $(1, -1)$ قطع می‌کند پس $x = 1$ (در ربع چهارم x مثبت است)

متوسط

-۲ گزینه «۳»

چون $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است پس $g(12)$ یعنی در تابع f بجای y از ۱۲ استفاده کنیم و $g(6)$ یعنی در تابع $f(x)$ به جای y از ۶ استفاده کنیم:

$$x + \sqrt{x} = 12 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 12 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 3) = 0$$

$$\sqrt{x} = -4, \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow g(12) = 9$$

$$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

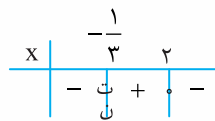
$$\sqrt{x} = -3, \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow g(6) = 4$$

$$g(6) + g(12) = 4 + 9 = 13$$

دشوار

-۷

ابتدا با توجه به تعیین علامت محدوده x را مشخص می‌کنیم:



$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6$$

$[3x]$ به معنای اعداد صحیح در این بازه است.

$$-1 < 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1$$

$$0 \leq 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0$$

$$1 \leq 3x < 2 \Rightarrow [3x] = 1$$

$$2 \leq 3x < 3 \Rightarrow [3x] = 2$$

$$3 \leq 3x < 4 \Rightarrow [3x] = 3$$

$$4 \leq 3x < 5 \Rightarrow [3x] = 4$$

$$5 \leq 3x < 6 \Rightarrow [3x] = 5$$

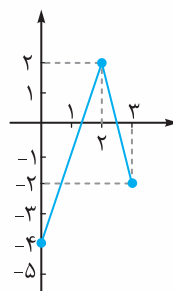
$$3x = 6 \Rightarrow [3x] = 6$$

متوسط

-۸

$-2f(x)$ به معنای ۲ برابر کردن عرض نقاط و قرینه کردن شکل نسبت به

محور x هاست پس:



متوسط

-۹

$$D_f = x \neq -5, D_g = 3 - x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x$$

$$A) \{D_f \cap D_g\} = \{x \leq 3\} - \{-5\} = (-\infty, +3] - \{-5\}$$

$$f + g = \frac{x-2}{x+5} + \sqrt{3-x}$$

$$B) D_{\frac{f+g}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{(-\infty, +3] - \{-5\}\} - \{3\}$$

$$= (-\infty, 3) - \{5\}$$

متوسط

-۱۰

$$f(x) = |x - 2| + 1$$

ریشه داخل قدرمطلق $x = 2$ است و با محدود کردن دامنه به صورت $[2, +\infty)$ تابع یک‌به‌یک می‌شود:

$$y = |x - 2| + 1 \xrightarrow{x \geq 2} y = x - 2 + 1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$\Rightarrow y + 1 = x \Rightarrow x + 1 = f^{-1}(x)$$

۸- گزینه «ب»

متوسط

$$\frac{ax-1}{3x+1} = \frac{5+x}{7} \Rightarrow 7ax-7=16x+3x^2+5$$

$$3x^2+x(16-7a)+12=0 \xrightarrow{\text{مماس}} \Delta=0$$

$16-7a < 0$ ناحیه اول باید ضریب x منفی باشد

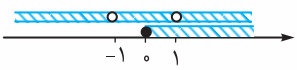
$$(16-7a)^2-144=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \Rightarrow \checkmark \text{ ناحیه اول} \\ a=\frac{4}{7} \end{cases}$$

۹- گزینه «ب»

متوسط

$D: x \geq 0$ رادیکال

$$D: |x|-1 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$$



اشتراک دو جواب

$$[0, +\infty) - \{1\}$$

۱۰- گزینه «ب»

متوسط

$$y=1 \Rightarrow 10-x=-10 \Rightarrow x=20 \Rightarrow (20, 1) \in f$$

$$(1, 20) \in f^{-1} \Rightarrow 1+6+a+1=20 \Rightarrow a=12$$

۱۱- گزینه «ا»

دشوار

$$|x|-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq x^2 \xrightarrow{x \geq 0} x \geq x^2 \Rightarrow 0 \geq x^2-x \Rightarrow 0 \geq x(x-1)$$

X	0	1
+	-	+

$$\Rightarrow [0, 1]$$

$$\xrightarrow{x < 0} -x \geq x^2 \Rightarrow 0 \geq x^2+x \Rightarrow 0 \geq x(x+1) \Rightarrow$$

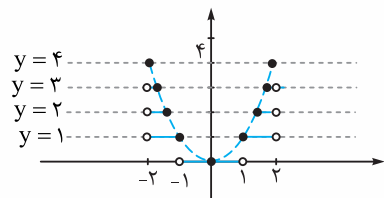
X	-1	0
+	-	+

$$\Rightarrow [-1, 0]$$

از اجتماع دو جواب $-1 \leq x \leq 1$ حاصل می‌شود.

۱۲- گزینه «ب»

دشوار



۱۳- گزینه «ب»

آسان

$$[x^2+x]=-1 \Rightarrow \frac{-1 \leq x^2+x < 0}{\text{همواره برقرار}} \Rightarrow x^2+x < 0$$

$$x(x+1) < 0$$

X	-1	0
+	-	+

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x^2]=0$$

۱۴- گزینه «ب»

متوسط

در ابتدا برای به دست آوردن f^{-1} باید تابع یک به یک باشد چون $f(x)$ بازه $x \geq 1$ هست پس $f(x)$ یک به یک است. $f(x)$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 4$$

$$f(x) = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow y = (x-1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow y+4 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+4} = x-1$$

$$\sqrt{y+4}+1 = x \Rightarrow \sqrt{x+4}+1 = f^{-1}(x)$$

چون درباره نقطه تقاطع f^{-1} و g صحبت شده است پس باید $y_1 = y_2$.

$$\sqrt{x+4}+1 = \frac{x-9}{2}$$

$$2\sqrt{x+4}+2 = x-9 \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(x+4) = x^2 - 22x + 121$$

$$4x+16 = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0 \Rightarrow (x-21)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 21, x_2 = 5 \xrightarrow{\text{صداق در معادله}}$$

$$\begin{cases} x_1 = 21 \Rightarrow 2\sqrt{21+4} = 21-11 \Rightarrow 10 = 10 \text{ (ق ق)} \\ x_2 = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5+4} = 5-11 \Rightarrow 6 = -6 \text{ (غ ق)} \end{cases}$$

۱۴- گزینه «ب»

متوسط

$$x=3 \Rightarrow y = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow (3, \frac{1}{4}) \in f$$

$$(\frac{1}{4}, 3) \in f^{-1} \Rightarrow 3 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a \Rightarrow 3 = \frac{3a}{4} \Rightarrow a = 4$$

۵- گزینه «ا»

متوسط

$$x^2+x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0$$

X	-1	0
+	-	+

$$(-1, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} -1 < x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ 0 < x^2 < 1 &\Rightarrow [x^2] = 0 \\ -1 < x^3 < 0 &\Rightarrow [x^3] = -1 \\ 0 < x^4 < 1 &\Rightarrow [x^4] = 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} -2$$

۶- گزینه «ب»

متوسط

$$f(1) = 2+2a = a+5 \Rightarrow a=3 \Rightarrow f(3) = 3(3)^2+5 = 32$$

۷- گزینه «ب»

آسان

شرط مقاطع بودن

$$\xrightarrow{(-1, 0)} -2+b=0 \Rightarrow b=2$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 2x+b = ax^2+bx-3 \xrightarrow{\frac{b=2}{(-1, 0)}} -2+2 = a-2-3$$

$$0 = a-5 \Rightarrow 5 = a$$

آسان

۱۸- گزینه «۴»

$$D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\} - \{3\} = \{1, 2\}$$

$$\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{4}{5} \Rightarrow (1, \frac{4}{5})$$

$$\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow (2, 1)$$

متوسط

۱۹- گزینه «۳»

$$D_f : x \geq 2$$

$$D_g = \{0, 1, 2, 6\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{2, 6\}$$

$$\{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{2, 6\} - \{0\} = \{2, 6\}$$

$$\frac{f}{g}(2) = 0$$

$$\frac{f}{g}(6) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

متوسط

۲۰- گزینه «۴»

$$D_f : 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_g : x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1, x \geq 0 \Rightarrow [0, +\infty) - \{1\}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [0, 2] - \{1\}$$

$$D_{\frac{f-g}{f}} = \{D_{f-g} \cap D_f\} - \{f(x) = 0\} \Rightarrow \{[0, 2] - \{1\}\} - \{\pm 2\}$$

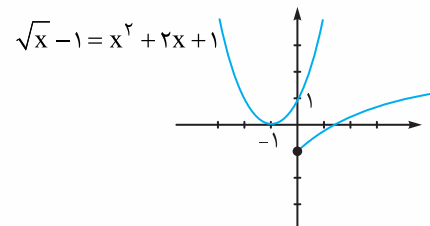
$$= [0, 2) - \{1\}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۴»

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow y = (x+1)^2 \Rightarrow x = (y+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y+1$$

$$\sqrt{x} - 1 = y = f^{-1}(x)$$



روش دوم استفاده از محل تقاطع با نیمساز ربع اول و سوم و Δ است.

متوسط

۱۵- گزینه «۱»

$$D_f = \{x - 1 \geq 0\} \Rightarrow x \geq 1$$

$$R_f = \{\sqrt{x-1} \geq 0\} \Rightarrow -\sqrt{x-1} < 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} < 2 \Rightarrow y \leq 2$$

$$f(x) = y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow x - 2 = -\sqrt{y-1} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y - 1$$

$$x^2 - 4x + 5 = y = f^{-1}(x) \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = \{x \leq 2\}$$

متوسط

۱۶- گزینه «۳»

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1}$$

از حل $\frac{2x+4}{x-1} = \frac{x+4}{x-2}$ محل برخورد به دست می آید.

متوسط

۱۷- گزینه «۲»

نسبت به نیمسازهای اول و سوم متقارن اند یعنی معکوس یکدیگرند پس:

$$\frac{2x}{3} - \frac{b}{3} = y \Rightarrow \frac{2}{3}y - \frac{b}{3} = x \Rightarrow \frac{2}{3}y = x + \frac{b}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{b}{2}$$

چون این معادله با خط $y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$ باید برابر باشد پس:

$$-\frac{a}{b} = \frac{3}{2}, \frac{b}{3} = \frac{1}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$b = 4 \Rightarrow -\frac{a}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2$$

$$b = -4 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2$$



۴- گزینه «۱»

$$xf^{-1}(x) \geq 0$$

$$D_f = [-2, 2], R_f = [-1, 4]$$

ریشه‌های عبارت $xf^{-1}(x)$ را می‌یابیم.

$$D_{f^{-1}} = [-1, 4], R_{f^{-1}} = [-2, 2]$$

$$f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow (x, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, x) \in f$$

در نتیجه $f(0) = 2$ است پس ریشه f^{-1} عدد ۲ است.

x	-۱	۰	۲	۴
x	-	۰	+	+
f ^{-۱}	-	-	۰	+
xf ^{-۱} (x)	+	۰	-	+
	ج	ج	ج	ج

جواب کل: $[-1, 0] \cup [2, 4]$

۵- گزینه «۳»

ابتدا به جای x مقدار ۱ را جایگذاری می‌کنیم تا $f(1)$ را به دست آوریم

$$x = 1 \Rightarrow f(f(1)) = 3f(1) \xrightarrow{f(1)=2} f(2) = 3(2)$$

$$f(2) = 6$$

حالا به جای x مقدار ۲ را جایگذاری می‌کنیم:

$$x = 2 \Rightarrow f(f(2)) = 3f(2) \xrightarrow{f(2)=6} f(12) = 3(6) = 18$$

$$f(12) = 18$$

۶- گزینه «۲»

اگر f تابعی خطی باشد:

$$f(x) = ax + b$$

$$f(2-x) = a(2-x) + b = 2a - ax + b = -ax + 2a + b$$

$$f(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b = ax - a + b$$

پس:

$$-ax + 2a + b - ax + a - b = 3x - m$$

$$-2ax + 3a = 3x - m$$

$$-2a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$3a = -m \Rightarrow 3(-\frac{3}{2}) = -m \Rightarrow m = \frac{9}{2}$$

$$f(2m-1) = f(2(\frac{9}{2})-1) = f(8) = -\frac{3}{2}(8) + b = -12 + b$$

$$f(4m) = f(4(\frac{9}{2})) = f(18) = -\frac{3}{2}(18) + b = -27 + b$$

$$-12 + b + 27 - b = 15$$



۱- گزینه «۲»

چون دامنه f به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ است و در مخرج عبارت درجه دو نوشته شده است پس حتماً عبارت مخرج مربع کاملی با ریشه ۲ بوده است پس:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 8x + 8$$

با مقایسه عبارت به دست آمده با عبارت موجود در مخرج کسر متوجه می‌شویم که $b = -8, c = 8$ است.

همچنین با توجه به نمودار f می‌توان متوجه شد که عبارت صورت مضربی از عبارت مخرج بوده است و دارای ریشه ۲ است پس:

$$2a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$a^2 - b^2 + 2c = 9 - 64 + 16 = -39$$

۲- گزینه «۴»

با توجه به تابع f که رادیکال فرجه زوج در مخرج دارد دامنه آن باید > 0 زیررادیکال باشد پس:

$$3x^2 - bx + c > 0$$

با توجه به دامنه داده شده حتماً عبارت $3x^2 - bx + c$ همواره مثبت بوده است و به ازای ۱ فقط صفر می‌شده است که دامنه آن را $\mathbb{R} - \{1\}$ اعلام کرده است پس:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow b = 6, c = 3$$

$$|c-b| = |3-6| = 3$$

در نتیجه

۳- گزینه «۲»

با توجه به دامنه رادیکال فرجه زوج در صورت:

$$(3-[x])([x]-1) \geq 0$$

$$\begin{cases} 3-[x] \geq 0 \Rightarrow 3 \geq [x] \Rightarrow [x] = 3, 2, 1, 0, -1, \dots \\ [x]-1 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 1 \Rightarrow [x] = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} [x] = 1, 2, 3$$

$$[x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

$$[x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

$$\begin{cases} 3-[x] \leq 0 \Rightarrow 3 \leq [x] \Rightarrow [x] = 3, 4, 5, \dots \\ [x]-1 \leq 0 \Rightarrow [x] \leq 1 \Rightarrow [x] = 1, 0, -1, \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{تهی}$$

اجتماع بازه جواب‌ها $[1, 4)$

از اجتماع دو مجموعه جواب به دست آمده $[1, 4)$ جواب نهایی است.



۱۱- گزینه «۳»

حاصل جمع دو براکت که عدد صحیح است عددی صحیح باید باشد پس x عددی صحیح است. همچنین چون می‌دانیم عدد صحیح از داخل براکت خارج می‌شود پس:

$$x + \left[\frac{3}{y}\right] + 2x + \left[-\frac{24}{y}\right] = x + 6$$

$$3x - 4 = x + 6 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

$$\left[\frac{-5+2}{y}\right] = \left[-\frac{3}{y}\right] = [-1/5] = -2 \quad \text{در نتیجه:}$$

۱۲- گزینه «۲»

$$6 \leq 2x^2 - 3 < 7$$

$$6 \leq x^2 + 1 < 7$$

طرفین را با هم جمع کنیم:

$$12 \leq 3x^2 - 2 < 14$$

پس $[3x^2 - 2]$ شامل اعداد صحیح ۱۲ و ۱۳ خواهد بود.

۱۳- گزینه «۲»

چون خط $5y - 10x = 12$ را در نقطه‌ای به عرض $7/2$ قطع می‌کند پس نقطه $(x, 7/2)$ در خط صدق می‌کند:

$$5(7/2) - 10x = 12$$

$$36 - 12 = 10x \Rightarrow x = 2/4$$

اگر $(2/4, 7/2) \in f^{-1}$ باشد پس $(7/2, 2/4) \in f$

$$2/4 = \sqrt{7/2} \sqrt{7/2m - 1} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{طرفین}} 2/4 \times 2/4 = 7/2(7/2m - 1)$$

$$0/8 = 7/2m - 1 \Rightarrow 1/8 = 7/2m \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = f(4) = \sqrt{16} \sqrt{16\left(\frac{1}{4}\right) - 1} = (4)(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

۱۴- گزینه «۲»

چون x باید عدد صحیح باشد پس $(y^2 - 1)$ باید شمارنده ۷۲ باشد پس:

$$y^2 - 1 = 1 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\left. \begin{aligned} y^2 - 1 = 3 &\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \\ y^2 - 1 = 8 &\Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \\ y^2 - 1 = 24 &\Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

x های یکسان و y متفاوت ایجاد می‌کنند.

پس با حذف حداقل ۳ عضو f تابع می‌شود.

۷- گزینه «۱»

ابتدا f را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow[R[-\frac{1}{4}, +\infty)]{D[\frac{1}{4}, +\infty)} f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$D_{f^{-1}} = [-\frac{1}{4}, +\infty)$$

۸- گزینه «۲»

$$f(x) = 3 - \sqrt{1-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = -(-x+3)^2 + 1$$

$$D_f: 1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x \quad f^{-1}(x) = -(x^2 - 6x + 9) + 1$$

$$R_f: (-\infty, 3] \quad f^{-1}(x) = -x^2 + 6x - 9 + 1$$

$$f^{-1}(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad D_{f^{-1}}: x \leq 3$$

۹- گزینه «۳»

قرینه تابع f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم به معنای یافتن وارون تابع f است.

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-6}{4x-1} = g(x)$$

$$g(x-1) = \frac{3(x-1)-6}{4(x-1)-1} = \frac{3x-3-6}{4x-4-1} = \frac{3x-9}{4x-5}$$

محل برخورد با محور x ها به معنای $y=0$ است پس:

$$\frac{3x-9}{4x-5} = 0$$

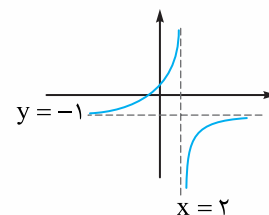
$$3x-9=0 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$$

۱۰- گزینه «۱»

ابتدا ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را با توجه به معادله خطها می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b &\Rightarrow f(x) = x - 2 \xrightarrow{\text{پس}} \frac{g}{f} = \frac{-x}{x-2} \quad D: x \neq 2 \\ g(x) = ax + b &\Rightarrow g(x) = -x \end{aligned}$$

این تابعی هموگرافیک است پس:





۱۷- گزینه «۴»

محل برخورد f^{-1} با $y = 12 - x$ نقطه‌ای است به عرض ۱۰

با جایگذاری $y = 10$ در $y = 12 - x$ محل برخورد f^{-1} با نقطه $(2, 10)$ به دست می‌آید پس $(10, 2)$ در تابع f صدق می‌کند.

$$2 = \sqrt{10 - 2\sqrt{10m - 1}} \Rightarrow 4 = 10 - 2\sqrt{10m - 1}$$

$$2\sqrt{10m - 1} = 6 \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow 10m - 1 = 9$$

$$\Rightarrow 10m = 10 \Rightarrow m = 1$$

سوال $f(1+4)$ را می‌خواهد در نتیجه:

$$f(5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5 - 1}} = \sqrt{5 - 4} = 1$$

۱۸- گزینه «۲»

اگر (x, y) عبور کند پس خود تابع f از (y, x) عبور می‌کند پس می‌توان وارون گزینه‌ها را در صورت سوال امتحان کرد و با رد گزینه به جواب درست رسید.

$$1) (-1, -2) \xrightarrow{f^{-1}} (-2, -1) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -1 = (-2)^3 - (-2) + 1 \\ \Rightarrow -1 \neq -8 + 2 + 1$$

$$2) \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{f^{-1}} \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{5}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 \quad \checkmark$$

$$3) (1, 2) \xrightarrow{f^{-1}} (2, 1) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 = 2^3 - 2 + 1 \Rightarrow 1 \neq 8 - 2 + 1$$

$$4) \left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8}\right) \xrightarrow{f^{-1}} \left(-\frac{11}{8}, -\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -\frac{1}{2} \neq \left(-\frac{11}{8}\right)^3 - \left(-\frac{11}{8}\right) + 1$$

۱۹- گزینه «۴»

ابتدا عبارت داده شده را تعیین علامت کنید:

$$4 - 2x = 0 \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2$$

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\frac{1}{3}$	2
$4 - 2x$	+	+
$3x + 1$	-	+
y	-	+

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, 2\right]$$

پس $-\frac{1}{3} < x \leq 2$ است حاصل طرفین در عدد ۳ ضرب شود تا $3x$ ساخته شود:

$$-1 < 3x \leq 6$$

$[3x]$ به معنای اعداد صحیح بین -۱ تا ۶ است پس:

$$[3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

۱۵- گزینه «۱»

ضابطه $f(x)$ را مرتب می‌نویسیم پس:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & x \leq -\frac{3}{2} \\ 2 + 2mx - x^2 & x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

در ضابطه اول با توجه به $x \leq -\frac{3}{2}$ برد ضابطه اول را به دست می‌آوریم:

$$R_f = \left[-\frac{13}{2}, +\infty\right)$$

پس به ازای $x = -\frac{3}{2}$ ، ضابطه دوم باید کمتر از $\frac{13}{2}$ یا در نهایت مساوی $\frac{13}{2}$ باشد پس:

$$2 + 2m\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{13}{2} \Rightarrow 2 - \frac{9}{4} - 3m \leq \frac{13}{2} \Rightarrow -3m \leq \frac{13}{2} + \frac{1}{4} \\ m \geq -\frac{9}{4} \quad (1)$$

همچنین چون شرط وارون‌پذیری یک‌به‌یک بودن تابع است و سهمی به طور کلی یک به یک نیست پس با توجه به رأس سهمی:

$$x_s = m \Rightarrow 2 + 2m^2 - m^2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m^2 + 2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m^2 < \frac{9}{2} \\ \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} < m < \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

از اشتراک دو شرط (۱) و (۲) داریم: $m = -2$

$$f^{-1}(19) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -19 \Rightarrow 2 - 4\alpha - \alpha^2 = -19 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + 4\alpha - 21 = 0 \Rightarrow (\alpha - 3)(\alpha + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -7 \text{ ق ق غ} \\ \alpha = 3 \text{ ق ق ق} \end{cases}$$

۱۶- گزینه «۳»

فرض کنید ریشه‌های $2x^2 - ax + b = 0$ ، α ، β باشند پس ریشه‌های

$$2ax^2 + ax - 6 = 0 \text{ به صورت } \alpha - \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2} \text{ خواهد بود. در هر دو معادله } s$$

و p معادله را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 - ax + b = 0 \Rightarrow s = \alpha + \beta = \frac{a}{2}, \quad p = \alpha\beta = \frac{b}{2}$$

$$2ax^2 + ax - 6 = 0 \Rightarrow s = \alpha - \frac{1}{2} + \beta - \frac{1}{2} = -\frac{a}{2a} \Rightarrow \alpha + \beta - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{a}{2} \text{ جایگذاری}} \frac{a}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

همچنین برای p در این معادله داریم:

$$p = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) = \alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4} = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{b}{2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{ab}{4}\right] = \left[-\frac{6}{4}\right] = \left[-1\frac{1}{2}\right] = -2$$

۲۰- گزینه «۴»

حواستون باشه! نقطه تلاقی دو نمودار یعنی دو نمودار x, y یکسانی دارند

پس:

$$2y = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} x = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 3} - \sqrt{\frac{x^2}{2} - 3}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 = \frac{x^2}{2} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} - 2\sqrt{\frac{x^4}{4} - 9} - 9$$

$$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 2\sqrt{\frac{x^4}{4} - 9} - 9 \Rightarrow \frac{x^4}{4} - 9 = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{4} = 9$$

$$\Rightarrow x^4 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$\text{با جایگذاری } x \text{ در عبارت } y = \frac{x^2}{2} \leftarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

بنابراین نقطه تلاقی دو شکل $(\sqrt{6}, 3)$ است پس فاصله آن تا مبدا مختصات:

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$