پاسخنامه
سؤالات تشریحی
بخش ۱

۱- آسان

$f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$

$a=۲$ در دامنه تابع نیست و **f** در آن تعریف نشده است اما در اطراف $a=۲$ داریم:

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

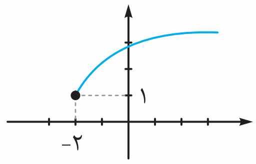
x	۱/۸۰	۱/۹	۱/۹۹	۲	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۰۲
f	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	?	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۰۲

توی جدول مقادیر بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ۲ رو نگاه کن! هر چقدر به عدد ۲ نزدیک‌تر میشیم مقدار **f** به ۴ نزدیک میشه پس:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۴$$

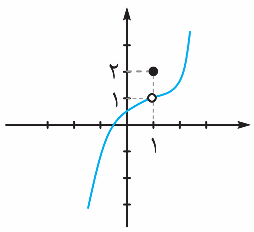
۲- آسان

آ)



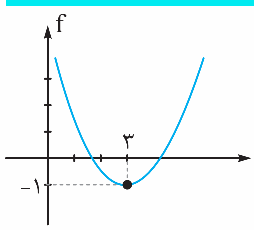
در همسایگی راست عدد ۲- نمودار وجود دارد اما در سمت چپ ۲- نموداری نداریم.

ب)

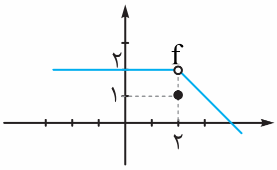


$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۱ \Rightarrow f(۱)=۲$$

۳- آسان

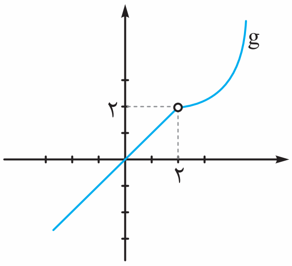


۴- آسان



$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۲$$

$f(۲)=۱$



$$\lim_{x\to ۲} g(x)=۲$$

$g(۲)=$ وجود ندارد

۵- متوسط

$D_f=(-\infty\,,۳]$

با توجه به دامنه تابع، تابع **f** در همسایگی چپ ۳ تعریف شده و در همسایگی راست آن تعریف نشده است پس حد ندارد.

$$\lim_{x\to ۳^-}\sqrt{۳-x}=\sqrt{۳-۳}=۰$$

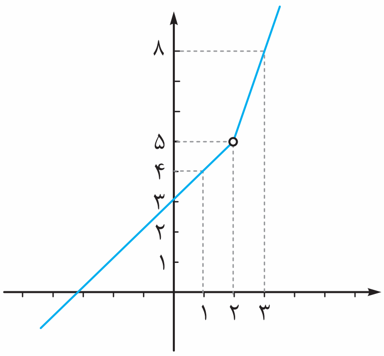
اما حد چپ آن در ۳ برابر ۰ است.

۶- آسان

آ) تابع **f** در $x=۲$ تعریف نشده است زیرا هیچ‌یک از زیربازه‌ها شامل عدد ۲ نمی‌شوند (هیچ‌کدام مساوی ندارند)

ب)

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x>۲ \xrightarrow{\text{خطی}} \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline ۳x-۱ & ۵ & ۸ \end{array} \\[2ex] x+۳ & x<۲ \xrightarrow{\text{خطی}} \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline x+۳ & ۴ & ۵ \end{array} \end{cases}$$

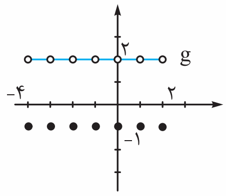


همان‌طور که از روی نمودار پیداست، حد تابع **f** در $x=۲$ برابر ۵ است پس:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۵$$

۷- آسان

آ) **x** به هر عددی میل کند، به عدد صحیح نمی‌رسد و جواب ضابطه‌ای است که عضو $\mathbb{Z}$ نباشد.



ب) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=۲$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}} g(x)=۲$

۸- متوسط

آ) درست

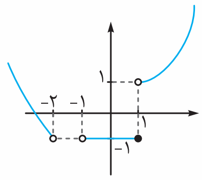
ب) نادرست (در سمت چپ $x=-۱$ تابع تعریف نشده است)

پ) درست (وجود ندارد $\lim\limits_{x\to(-۲)^{+}} f(x)=$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^{-}}=-۱$)

ت) درست $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=-۱$

ث) درست

ج) درست $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=-۱, f(۱)=-۱$

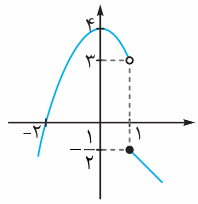


۹- آسان

$\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\frac{-۱}{۲}$

$\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=۳$

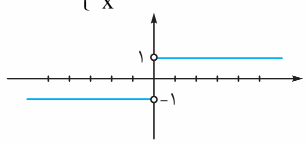
تابع در $x=۱$ حد ندارد زیرا: $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)\neq\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)$



۱۰- دشوار

اول بیا **f** رو به صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>۰\\ \frac{-x}{x} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}\quad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$



$\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=۱$

$\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=-۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$ وجود ندارد

سؤالات تستی پاسخنامه

بخش ۱

۱- گزینه «۴» آسان

$D_f=[-۳,۰]$

$\lim\limits_{x\to -۳^{+}} f(x)=۰$

$\lim\limits_{x\to -۳^{-}} f(x)=$ وجود ندارد

همان‌طوری که از روی نمودار پیداست، تابع در سمت چپ ۳- تعریف نشده (نمودار نداریم) و بنابراین حد چپ وجود ندارد و حد تابع نیز وجود ندارد.

۲- گزینه «۳» آسان

سطر بالای جدول رو ببین! عددها چه از سمت چپ و چه از سمت راست به عدد ۳ نزدیک میشن پس $a=۳$.

حالا به سطر پایین جدول نگاه کن! عددها از هر دو طرف چپ و راست، به عدد ۱ نزدیک میشن پس $L=۱$.

$a+L=۳+۱=۴$

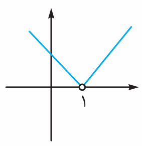
۳- گزینه «۲» آسان

۱) دامنه تابع بازه $(-\infty,۱]$ است و برای $x>۱$ تعریف نشده.

۲) به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{(x-۱)^{۲}}{x-۱} & x>۱\\ \frac{-(x-۱)^{۲}}{x-۱} & x<۱\end{cases}=\begin{cases}(x-۱) & x>۱\\ -(x-۱) & x<۱\end{cases}$$

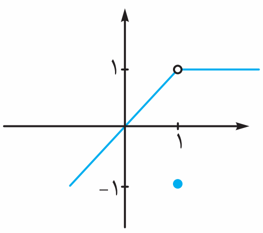
نمودار **f** به‌صورت زیر



می‌باشد و طبق نمودار $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=۰$ پس گزینه ۲ درست است.

۳) دامنه تابع، بازه $(-\infty,۰]$ است و برای $x>۰$ تعریف نمی‌شود.

۴) نمودار تابع به صورت رو به رو است:



$\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=۱, f(۱)=-۱$

۴- گزینه «۴» متوسط

۱) مقدار تابع به حد چپ و راست وابسته نیست.

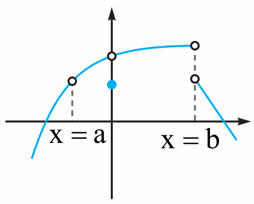
۲) ممکن است حد چپ و راست موجود ولی با هم برابر نباشند.

۳) نکته گزینه (۱)

۴) درست است زیرا وقتی حد تابعی برابر عدد **L** است پس حد چپ و راست هر دو برابر **L** خواهد بود.

۵- گزینه «۲» آسان

باتوجه به نمودار مقابل تابع در $x=a$ و $x=b$ مقدار ندارد ولی در $x=a$ حد دارد پس فقط در یک نقطه مقدار ندارد ولی حد دارد گزینه ۲ درست است.



۶- گزینه «۲» دشوار

۱)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4,\ f(2)=0$$

۲)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=4,\ f(0)=4$$

۳) $f(0)$ تعریف شده ولی در $x=0$ حد ندارد زیرا حد چپ و راست برابر نیست.

۴) حد ندارد

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4,\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$

پس گزینه ۲ درست است.

۷- گزینه «۱» متوسط

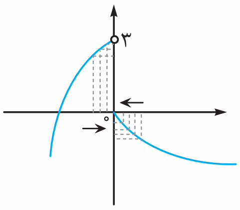
وقتی x با مقادیر بیشتر از ۱- نزدیک می‌شود، $x+2$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود پس $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x+2)=f(1^+)=-1$

وقتی x با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، $-x$ با مقادیر بیشتر از (۱-) به (۱-) نزدیک می‌شود و در نتیجه $(2-x)$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود پس:

$$\lim_{x\to 1^-} f(2-x)=f(1^+)=-1$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}(x+2)+\lim_{x\to 1^-} f(2-x)=(-1)+(-1)=-2$$

۸- گزینه «۴» آسان



هرچه از سمت راست به صفر نزدیک می‌شویم مقدار تابع نیز به صفر نزدیک میشه پس:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

هرچقدر با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شیم مقدار **y** به عدد ۳ نزدیک میشه پس:

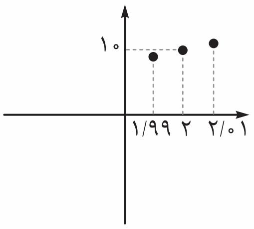
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=3 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to 0^-} f(x)=0+3=3$$

۹- گزینه «۴» آسان

$$2\lim_{x\to 2^+} f(x)+\lim_{x\to 2^-} f(x)-f(2)=2(1)+4-2=4$$

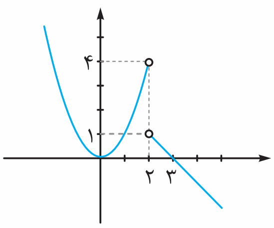
۱۰- گزینه «۴» آسان

تابع **f** شامل ۳ نقطه است و در اطراف $x=2$ نمودار وجود ندارد.



۱- آسان

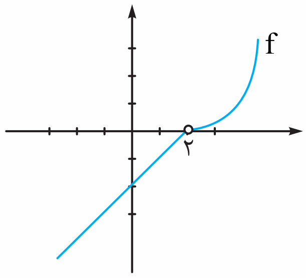
$$f(x)=\begin{cases}-x+3 & x>2 \xrightarrow{\text{خطی}} \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline -x+3 & 1 & 0\end{array} \\ x^2 & x<2 \xrightarrow{\text{سهمی}} \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline x^2 & 0 & 1 & 4\end{array}\end{cases}$$



حد چپ $=4$، حد راست $=1$ $\quad 1\neq 4 \Rightarrow$ f در $x=2$ دارای حد نیست.

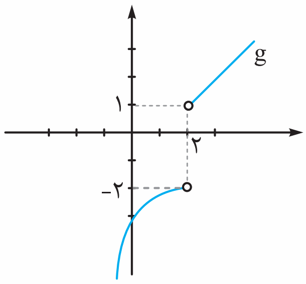
۲- متوسط

آ)



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۰$

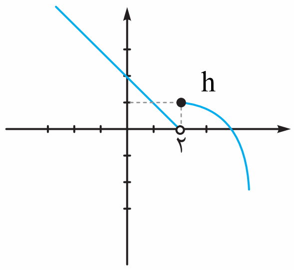
ب)



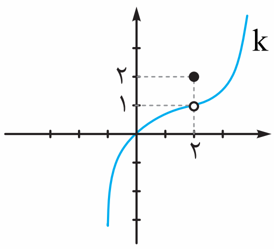
$\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)=۱$

$\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=-۲ \quad ۱\neq -۲$

پ)



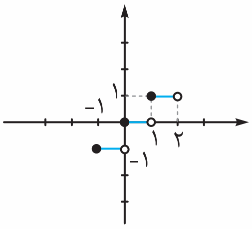
$\lim\limits_{x\to ۲^-} h(x)=۰ \qquad \lim\limits_{x\to ۲^+} h(x)=۱$



$\lim\limits_{x\to ۲} k(x)=۱$

$f(۲)=۲$

۳- آسان



$\lim\limits_{x\to ۱^-} [x]=۰$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} [x]=۱$

$۰\neq ۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}[x]=$ وجود ندارد.

و یادت بمونه به طور کلی تابع جزءصحیح در اعداد صحیح دارای حد نیست.

۴- دشوار

$\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{[x]}{x}=\dfrac{[۰^+]}{۰^+}=\dfrac{۰}{۰^+}=۰$

حواست باشه که صفری که در صورت کسر از داخل براکت خارج میشه دقیقاً صفر هست و بهش می‌گیم «صفر مطلق»! اما ۰^+ یعنی عددی خیلی نزدیک بـه صفر و سمت راست اون که بهش می‌گیم صفر حدی (۰^- هم همینطوره) و می‌دونیم حاصل تقسیم صفر بر هر عددی، مساوی صفر هستش.

یه نکته دیگه: برای هر عدد صحیح:

$[n^+]=n$

$[n^-]=n-۱$

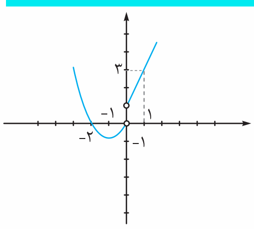
۵- آسان

$$g(x)\begin{cases}\dfrac{x-۳}{x-۳}=۱ & x>۳\\[2mm] \dfrac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱ & x<۳\end{cases}$$

آ) نادرست　　ب) درست　　پ) درست

ت) درست　　ث) نادرست

۶- آسان



$$f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x>۰\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱\\ \hline ۲x-۱ & ۱ & ۳\end{array}\\[4mm] x^۲+۲x & x<۰\Rightarrow x=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{-۲}{۲}=-۱ \quad \begin{array}{c|ccc} x & -۲ & ۱ & ۰\\ \hline x^۲+۲x & ۰ & -۱ & ۰\end{array}\end{cases}$$

f در $x=۰$ حد ندارد زیرا حد چپ برابر صفر و حد راست برابر ۱ است و حد چپ و راست برابر نیستند.

۷- متوسط

$f(x)=\sqrt{x^۲-x}$

$x^۲-x\ge ۰ \Rightarrow x(x-۱)\ge ۰ \Rightarrow x\le ۰ \cup x\ge ۱$

$D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)$

تابع تنها به ازای مقادیر بزرگ‌تر و مساوی ۱ تعریف شده و بنابراین حد چپ تابع در $x=۱$ وجود ندارد زیرا سمت چپ ۱ تابع تعریف نشده است.

۸- متوسط

$f(x)=\dfrac{x}{[x]-۲}$

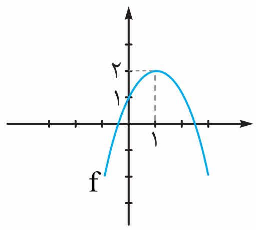
$[x]-۲=۰ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow \underbrace{۲\le x<۳}_{\text{مقادیر صفرکننده مخرج}}$

$D_f=(-\infty,۲)\cup[۳,+\infty)$

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است بنابراین حد راست تابع در $x=۲$ وجود ندارد.

۹- دشوار

$f(x)=-(x-۱)^۲+۲$



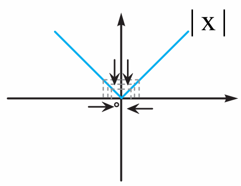
آ) با توجه به شکل، در همسایگی ۱ داریم: $۱<f(x)<۲$ و بنابراین:

$[f(x)]=۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}[f(x)]=\lim_{x\to ۱}۱=۱$

ب) $[\lim_{x\to ۱} f(x)]=[۲]=۲$

نتیجه‌ای که از مقایسه آ و ب داریم این هست که $\lim_{x\to ۱}[f(x)]\ne[\lim_{x\to ۱} f(x)]$

۱۰- متوسط



آ) $\lim_{x\to ۰}|x|=۰$

ب) $f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\ge ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$

$a>۰ \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(x)=a=|a|$

$a<۰ \Rightarrow \lim_{x\to a}(-x)=-a=|a|$ $\quad\Rightarrow \lim_{x\to a}|x|=|a|$

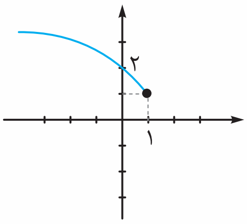
۱۱- متوسط

$\lim_{x\to ۱^-}(x-[x])=۱-[۱^-]=۱-۰=۱$

$\lim_{x\to ۱^+}(x-[x])=۱-[۱^+]=۱-۱=۰$

$۱\ne ۰ \Rightarrow$ تابع **f** در $x=۱$ دارای حد نیست.

۱۲- آسان



تابع **f** در همسایگی راست ۱ تعریف نشده است بنابراین در $x=۱$ حد ندارد.

۱۳- متوسط

وقتی $x\to ۲^+$ یعنی $x>۲$ پس از ضابطه اول برای محاسبه حد راست استفاده می‌کنیم:

$\lim_{x\to ۲^+}\sqrt{۲x^۲-۴a}=\sqrt{۲(۲)^۲-۴a}=\sqrt{۸-۴a} \Rightarrow \sqrt{۸-۴a}=۲$

$\Rightarrow ۸-۴a=۴ \Rightarrow ۴a=۴ \Rightarrow a=۱$

f در $x=-۲$ دارای حد است پس حد چپ و حد راست در $x=-۱$ برابر است:

حد چپ $=\lim_{x\to -۲^-}(x^۲+bx+۳a)=۴-۲b+۳a$

حد راست $=\lim_{x\to -۲^+}(x+b)=-۲+b$

$\Rightarrow ۴-۲b+۳=-۲+b$

$۹=۳b \Rightarrow b=۳$

۱۴- متوسط

آ) $\lim_{x\to (-۱)^+}\dfrac{x}{[x]+۱}=\dfrac{-۱}{[(-۱)^+]+۱}=\dfrac{-۱}{-۱+۱}=\dfrac{-۱}{۰}$ تعریف نشده

ب) $x^۲+x+۲\ge ۰ \Rightarrow D=(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$

چون ۲^- در دامنه وجود ندارد پس این تابع در ۲ حد ندارد.

پ) $\lim_{x\to ۱^+}(x^۲[x])=۱[۱^+]=۱$

$\lim_{x\to ۱^-}(x^۲[x])=۱[۱^-]=۱(۰)=۰$

$۱\ne ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۱}x^۲[x]=$ وجود ندارد

۱۵- متوسط

آ) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}(x-3)[x]=0\cdot[3^-]=0\cdot(2)=0\\ \lim\limits_{x\to3^+}(x-3)[x]=0\cdot[3^+]=0\cdot(3)=0\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to3}(x-3)[x]=0$ پس حد وجود دارد

ب) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}(x+3)[x]=6(2)=12\\ \lim\limits_{x\to3^+}(x+3)[x]=6(3)=18\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to3}(x+3)[x]=$ وجود ندارد

پ) $x^2-9\ge0 \Rightarrow x^2\ge9 \Rightarrow x\le-3 \cup x\ge3$

با توجه به دامنه، تابع فقط دارای حد راست است و داریم:

$$\lim_{x\to3^+}\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9-9}=0$$

و حد کلی در $x=3$ وجود ندارد.

ت) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ $\quad 9-x^2\ge0 \Rightarrow -3\le x\le3$

با توجه به دامنه تابع، این تابع فقط در همسایگی چپ ۳ تعریف شده پس فقط حد چپ داریم:

$$\lim_{x\to3^-}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9}=0$$

و حد کلی تابع در $x=3$ وجود ندارد.

۱۶- متوسط

چون گفته شده $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ موجود است پس آن را $\lim\limits_{x\to a}f(x)=M$ درنظر می‌گیریم

آ) $\lim\limits_{x\to a}c(f(x))=\lim\limits_{x\to a}cM=cM\,,\ c(\lim\limits_{x\to a}f(x))=cM$

ب) $\lim\limits_{x\to a}f^2(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x).f(x)=(\lim\limits_{x\to a}f(x))(\lim\limits_{x\to a}f(x))$

$=(\lim\limits_{x\to a}f(x))^2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}(-f(x))=\lim\limits_{x\to a}(-1)\times\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\lim\limits_{x\to a}f(x)$

۱۷- آسان

ابتدا باید چک کنیم هر یک از توابع **f** و **g** بـه تنهـایی در $x=2$ دارای چـه حدی است.

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(x-5)=-3\,,$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(1-x^2)=1-4=-3$

$\lim\limits_{x\to2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(4-x)=2\,,\ \lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(4-x)=2$

$\lim\limits_{x\to2}f+g=\lim\limits_{x\to2}f(x)+\lim\limits_{x\to2}g(x)=-3+2=-1$

$\lim\limits_{x\to2}f-g=\lim\limits_{x\to2}f(x)-\lim\limits_{x\to2}g(x)=-3-2=-5$

$\lim\limits_{x\to2}f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to2}f(x)\times\lim\limits_{x\to2}g(x)=(-3)(2)=-6$

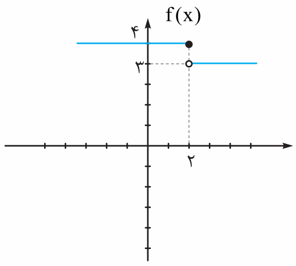
$\dfrac{\lim\limits_{x\to2}f(x)}{\lim\limits_{x\to2}g(x)}=\dfrac{-3}{2}$

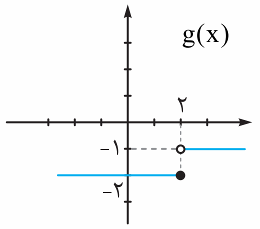
۱۸- دشوار

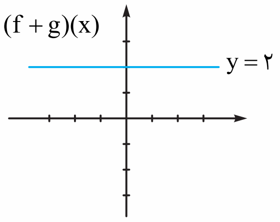
آ) $(f+g)(x)=\begin{cases}(-1)+3 & x>2\\ (-2)+4 & x\le2\end{cases} \Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}2 & x>2\\ 2 & x\le2\end{cases}$

پس تابع $(f+g)$ تابع ثابت است. $\quad (f+g)(x)=2$

ب)







پ) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=3\,,\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to2}f(x)=$ حد ندارد

$\lim\limits_{x\to2^+}g(x)=-1\,,\ \lim\limits_{x\to2^-}g(x)=-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to2}g(x)=$ حد ندارد

ت) چون $f+g=2$ و تابعی ثابت است پس در $x=2$ حد دارد.

$x^2+x\ge0 \Rightarrow x(x+1)\ge0 \Rightarrow x\le-1$ یا $x\ge0$

ث) تابع فقط برای $x\ge0$ تعریف شده و سمت چپ صفـر در دامنـه تعریـف نشده پس حد ندارد.

$\lim\limits_{x\Rightarrow0^+}\sqrt{x+x}=0\ ,\ \lim\limits_{x\Rightarrow0^-}\sqrt{x^2+x}=$ وجود ندارد

۱۹- آسان

آ) $\lim\limits_{x\to-1}x^4=1$

ب) $\lim\limits_{x\to10}(5(10)^3-6(10)+1)=5000-60+1=4941$

پ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)^2}{4(8)-7(2)+1}=\dfrac{16}{32-14+1}=\dfrac{16}{19}$

ت) $\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{x-[x]}{1-x}=\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{x-0}{1-x}=\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{\frac12}{\frac12}=1$

۲۰- آسان

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

چون 2^+ در دامنه $\sqrt{x-2}$ قرار دارد پس اجازه داشتن حد را داریم.

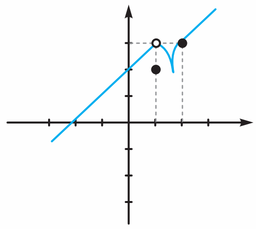
۲۱- آسان

آ) $\lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \dfrac{-\pi}{-\pi} = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}} \dfrac{\sin\frac{\pi}{۳}}{\cos\frac{\pi}{۳}} = \dfrac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$

۲۲- آسان

خیر



۲۳- آسان

آ) $\lim\limits_{x\to ۹} (\sqrt{x}-۹)^۳ = -۶^۳ = -۲۱۶$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} (-۶x^۷ - ۴x^۲ + ۵) = ۶ - ۴ + ۵ = ۷$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۵}{۳}} \dfrac{(-\frac{۵}{۳}+\pi)\overbrace{(-۵+۵)}^{۰}}{(-۵+۶)(-\frac{۱۲۵}{۲۷}+۱)} = ۰$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^+} \dfrac{۱-x^۲}{x^۲-۴} = \dfrac{۱-۲}{۲-۴} = \dfrac{-۱}{-۲} = \dfrac{۱}{۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \sqrt{۴x^۲+۶x} = \sqrt{۴(\frac{۱}{۴})+۶(\frac{۱}{۲})} = \sqrt{۱+۳} = ۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x}{x+\cos x} = \dfrac{۰^+}{۰^+ + ۱^-} = \dfrac{۰^+}{۱} = ۰$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \dfrac{|\cos x|}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \dfrac{-\cos x}{x-\pi} = \dfrac{۰}{-\frac{\pi}{۲}} = ۰ ,\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \dfrac{|\cos x|}{x-\pi}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \dfrac{\cos x}{x-\pi} = \dfrac{۰}{-\frac{\pi}{۲}} = ۰$

۲۴- آسان

می‌توان تابع ثابت $g(x) = ۱۲$ را در نظر گرفت.

$\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۱۲}{x^۲-۱} = \dfrac{۱۲}{۳} = ۴$

می‌توان هر تابعی که با جایگذاری $x = ۲$ عدد ۱۲ تولید کند به جای $g(x)$ در نظر گرفت. می‌توان $g(x) = ۲x^۲ + ۴$ را درنظر گرفت و ...

$\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۲x^۲+۴}{x^۲-۱} = \dfrac{۱۲}{۳} = ۴$

۲۵- آسان

$\lim\limits_{x\to a} (f(x) - L) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} L = L - L = ۰$

عکس: $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - L) = ۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} L = ۰$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

۲۶- آسان

$\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۹}{x-۳} = \dfrac{۹-۹}{۳-۳} = \dfrac{۰}{۰}$

تو محاسبه حدها اول عدد رو جایگذاری می‌کنیم اگر به حالت صفر صفرم که یک حالت مبهم هست برسیم باید رفع ابهام کنیم. تو این سوال با تجزیه کردن، عامل صفرکننده صورت و مخرج رو از بین می‌بریم و بعد حد رو حساب می‌کنیم.

$\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۹}{x-۳} = \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}} = \lim\limits_{x\to ۳} (x+۳) = ۳+۳ = ۶$

۲۷- آسان

$\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۴} = \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\cancel{(x-۲)}(x-۲)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)} =$

$\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x-۲}{x+۲} = \dfrac{۲-۲}{۲+۲} = \dfrac{۰}{۴} = ۰$

۲۸- متوسط

آ) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x} = \dfrac{۰}{۰}$

عامل صفرکننده $(x+۱)$

یادت باشه که اگر $x \to a$، آن‌گاه عامل صفر کننده $(x-a)$ است و می‌دونیم در حالت $\frac{۰}{۰}$ حتماً عامل $(x-a)$ در صورت و مخرج وجود داره، توی تجزیه ازشون کمک می‌گیریم.

$= \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{\cancel{(x+۱)}(۲x-۱)}{۳x\cancel{(x+۱)}} = \dfrac{۲(-۱)-۱}{۳(-۱)} = \dfrac{-۳}{-۳} = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x^۲[x]-۸}{x-۲}$

توی حدهایی که $\frac{۰}{۰}$ میشن و شامل جزءصحیح هستند اول براکت‌ها رو جایگذاری کن و بعد تجزیه کن:

$= \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۲x^۲-۸}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۲\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{x-۲}} = ۲(۲+۲) = ۸$

۲۹- آسان

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x).g(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x+1}{2x^2-x-1}\times\frac{2x+1}{x}$$

عامل صفر کننده $=2x+1$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(x+1)\cancel{(2x+1)}}{\cancel{(2x+1)}(x-1)(x)}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{3}{\cancel{4}_{2}}}=\frac{2}{3}$$

۳۰- آسان

آ) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=2+2=4$

ب) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$ رفع ابهام $\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{x+2}}=-2+3=1$

پ) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ رفع ابهام $\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=3$

۳۱- متوسط

آ) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{x+2}}=4+4+4=12$

ب) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-2}{[x]+1}=\frac{3-2}{[3^+]+1}=\frac{1}{4}$

پ) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{[x]}=\frac{2}{[2^+]}=\frac{2}{2}=1$

ت) $\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]-3}{x}=\frac{[1^+]-3}{1}=1-3=-2$

ث) $\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]}{x}=\frac{2}{2}=1$

$\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]}{x}=\frac{[2^-]}{2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{[x]}{x}=$ وجود ندارد

۳۲- متوسط

آ) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+4)}=\frac{1}{2+4}=\frac{1}{6}$

ب) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$

پ) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$

عامل صفرکننده $=(x-1)$

اگر در تجزیه، چندجمله‌ای داریم که به راحتی قابل تجزیه نیست، لازمه با تقسیم بر عامل صفر کننده، عبارت رو تجزیه کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^3}-x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
\ominus\cancel{2x^3}\oplus 2x^2 & 2x^2+2x+1 \\ \hline
\cancel{2x^2}-x-1 & \\
\ominus\cancel{2x^2}\oplus 2x & \\ \hline
x-1 & \\
x-1 & \\
- \quad + & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(2x^2+2x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{2+2+1}{1+1}=\frac{5}{2}$$

ت) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}=\frac{0}{0}$

عامل صفر کننده $=(x+2)$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3}-x^2-x+10 & x+2 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3}\mp 2x^2 & x^2-3x+5 \\ \hline
-\cancel{3x^2}-x & \\
\oplus\cancel{3x^2}\oplus 6x & \\ \hline
5x+10 & \\
5x+10 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-3x+5)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\frac{4+6+5}{-2+1}=-15$$

۳۳- متوسط

آ) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(2x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$

حواست باشه که وقتی $x\to 1^+$ یعنی $x>1$ و بنابراین $|x-1|=x-1$

ب) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{|x^2-5x+6|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{|(x-2)(x-3)|}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}|x-3|}=\frac{4}{|2-3|}=4$$

۳۴- متوسط

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2[x]-16}{x[x]-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2[2^-]-16}{x[2^-]-4}$$

آ) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=2+4=6$

ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x-|x|}{[x+1]-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-(-x)}{[0^-+1]-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-x}=-2$

حواست باشه وقتی $x\to 0^-$ آن‌گاه: $|x|=-x$, $[0^-+1]=[1^-]$

۳۵- متوسط

آ) $\lim_{x\to -۱} \frac{(\cancel{x+۱})(x^۲-x+۱)}{x(\cancel{x+۱})} = \frac{۱+۱+۱}{-۱} = -۳$

ب) $\lim_{x\to ۲} \frac{x(\cancel{x-۲})(x+۱)}{(\cancel{x-۲})(x+۲)} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$

۳۶- متوسط

آ) $\frac{\sin\pi\times\cos\pi}{۱+\cos^۲\pi} = \frac{۰\times(-۱)}{۱+۱} = \frac{۰}{۲} = ۰$

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{(۱-\cos x)} = \lim_{x\to ۰}(۱+\cos x) = ۱+\cos ۰ = ۱+۱ = ۲$

پ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{(۱-\sin x)}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} (۱+\sin x) = ۱+\sin\frac{\pi}{۲} = ۱+۱ = ۲$$

۳۷- متوسط

$$\lim_{x\to -۲}\left(\frac{x^۲-۴}{۲x^۲+۵x+۲}\times\frac{x-۳}{x^۲}\right) = \lim_{x\to -۲}\frac{(x-۲)(\cancel{x+۲})(x-۳)}{(\cancel{x+۲})(۲x+۱)(x^۲)}$$

$$= \frac{(\cancel{-}\cancel{۴})(-۵)}{(\cancel{-}۳)(\cancel{۴})} = \frac{-۵}{۳}$$

۳۸- دشوار

$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۶x+۵}{x^۲+ax+b} = ۲ \Rightarrow \frac{۰}{۱+a+b} = ۲$

از اونجایی که کسری داریم با صورت صفر که مقدار حد اون کسر برابر ۲ شده، معنی این هست که حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ بوده و بعد از رفع ابهام برابر ۲ شده به عبارتی $x=۱$ ریشه مخرج نیز هست:

$$x^۲+ax+b \xrightarrow{x=۱} ۱+a+b = ۰ \Rightarrow a+b = -۱$$

۳۹- متوسط

فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L$ آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f^۲(x)+۹}{f(x)} = \frac{L^۲+۹}{L} = ۶ \Rightarrow L^۲+۹ = ۶L \Rightarrow L^۲-۶L+۹ = ۰$$

$$(L-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow L = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = ۳$$

۴۰- دشوار

از اونجایی که مخرج کسر به ازای جایگذاری $x=۱$ صفر شده و مقدار حد برابر عدد شده یعنی حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ بوده پس صورت هم در $x=۱$ صفر می‌شود:

$$x^۳+۲x^۲+ax+۲ \xrightarrow{x=۱} ۱+۲+a+۲ = ۰ \Rightarrow a = -۵$$

حال مقدار حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۲x^۲-۵x+۲}{x^۲+۳x-۴} = \lim_{x\to ۱}\frac{(\cancel{x-۱})(x^۲+۳x-۲)}{(\cancel{x-۱})(x+۴)}$$

$$= \frac{۱+۳-۲}{۱+۴} = \frac{۲}{۵}$$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^۳}+۲x^۲-۵x+۲ & x-۱ \\ \hline
\ominus\cancel{x^۳}\oplus x^۲ & x^۲+۳x-۲ \\ \hline
\quad\cancel{۳x^۲}-۵x & \\
\quad\cancel{-۳x^۲}\oplus ۳x & \\ \hline
\qquad -۲x+۲ & \\
\qquad -۲x+۲ & \\ \hline
\qquad\quad ۰ &
\end{array}$$

۴۱- آسان

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳+x-۲}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{(\cancel{x-۱})(x^۲+x+۲)}{\cancel{x-۱}} = ۱+۱+۲ = ۴$$

$$\begin{array}{l|l}
x^۳+x-۲ & x-۱ \\ \hline
\ominus x^۳\oplus x^۲ & x^۲+x+۲ \\ \hline
x^۲+x & \\
\ominus x^۲\oplus x & \\ \hline
\quad ۲x-۲ & \\
\quad ۲x-۲ & \\ \hline
\qquad ۰ &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} ax-۳ = a-۳ = ۴ \to a = ۷$$

۴۲- متوسط

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}[x] = [۲^-] = ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\left([-x]+\frac{a|x-۲|}{x-۲}\right) = \lim_{x\to ۲^+}([-x]+a)$$

$$= -۳+a$$

$$-۳+a = ۱ \Rightarrow a = ۴$$

به ازای $a=۴$ تابع در $x=۲$ دارای حد است و مقدار این حد برابر ۱ است.

۴۳- متوسط

برای وجود حد کافی است مقدار حد چپ و مقدار حد راست را با هم مساوی قرار دهیم:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2-3x}a=\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x(x-3)}a=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{x(x-3)}a$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-a}{x}=\frac{-a}{3}$$

$$\lim_{x\to 3^+}[x]=[3^+]=3$$

$$\frac{-a}{3}=3\Rightarrow a=-9$$

۴۴- آسان

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-5}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+5)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{x(x+1)}=\frac{7}{(1)(2)}=\frac{7}{2}$$

۴۵- متوسط

$$\lim_{x\to 2^-}(a[x]+3[-x])=a(1)+3(-2)=a-6$$

$$\lim_{x\to 2^+}(a[x]+3[-x])=a(2)+3(-3)=2a-9$$

حد راست = حد چپ $\Rightarrow a-6=2a-9\Rightarrow 3=a$

۴۶- دشوار

عامل صفرکننده $(x-2)$ در مخرج کسر وجود دارد اما مقدار حد برابر عدد شده پس حالت مبهم $\frac{0}{0}$ بوده است و عامل صفر کننده در صورت کسر هم وجود دارد.

$$x^2+ax-10=0\Rightarrow (x-2)(x+?)$$

به جای علامت سوال عددی قرار می‌دهیم که ضرب آن در ۲- برابر ۱۰- است یعنی $?=5$ و داریم:

$$x^2+ax-10=(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$$

$$\Rightarrow a=3$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+5)=7\Rightarrow b=7$$

۴۷- دشوار

تنها گزاره پ درست است و در بقیه موارد نمی‌توان نظر قطعی داد مثلاً داریم:

$$f(x)=\begin{cases}2 & x>1\\ -2 & x\le 1\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}-2 & x>1\\ 2 & x\le 1\end{cases}$$

f و **g** در ۱ حد ندارند اما $(f\times g)(x)=-4\,,\,(f+g)(x)=0$ که هر دو در $x=1$ دارای حد هستند.

و یا اگر $f(x)=\begin{cases}3 & x>1\\ -1 & x\le 1\end{cases}\,,\,g(x)=0$ آن‌گاه $(f\times g)(x)=0$ در $x=1$ حد دارد.

۴۸- دشوار

$$(f-g)(x)=[x]-(x-[x])=-x+2[x]$$

این تابع در نقاط $\mathbb{Z}$ حد نداره مثلاً فرض کن $a\in\mathbb{Z}$، اون‌وقت:

$$\lim_{x\to a^+}(-x+2[x])=-a+2a=a$$

$$\lim_{x\to a^-}(-x+2[x])=-a+2(a-1)=a-2$$

و هیچ‌وقت تساوی $a=a-2$ برقرار نیست بنابراین گزاره‌های آ و ب درست و گزاره پ نادرست است.

۴۹- دشوار

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}=\frac{0}{0}$$

پس عامل $(x-1)$ هم در صورت و هم در مخرج وجود دارد. با دسته‌بندی در صورت و مخرج، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x+2ax^2-2a}{ax^2+x-ax-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-1)+2a(x^2-1)}{ax(x-1)+(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x+2a)}{\cancel{(x-1)}(ax+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x+2a)}{ax+1}=\frac{(2)(2a+1)}{a+1}$$

$$\Rightarrow\frac{4a+2}{a+1}=1\Rightarrow 4a+2=a+1\Rightarrow 3a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

۵۰- متوسط

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^8-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3)^2-1}{(x^4)^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{(x^4-1)(x^4+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)(x^3+1)}{\underbrace{\cancel{(x^2-1)}}_{\cancel{(x-1)}(x+1)}(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{(3)\cancel{(2)}}{(2)(2)\cancel{(2)}}=\frac{3}{4}$$

پاسخنامه سؤالات تستی
بخش ۲

۱- گزینه «۴» متوسط

f در $x=1$ حد داره معنیش اینه که حد چپ و حد راست تابع برابر هستند.

$$\underset{(x<1)}{\text{حد چپ}}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2}{|x|}+2m\right)=2+2m$$

$$\underset{(x>1)}{\text{حد راست}}=\lim_{x\to 1^+}(mx-1)=m-1$$

$$\Rightarrow 2+2m=m-1\Rightarrow m=-3$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-3x-1 & x>1\\ \dfrac{2}{|x|}-6 & x<1\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ \downarrow\\ -1<1}}f(x)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{2}{|x|}-6\right)=2-6=-4$$

۲- گزینه «۲»
متوسط

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[-x]=[0^-]=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1-0=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}(f+g)=0+1=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(f+g)=-1+0=-1\end{cases}\Rightarrow$$ حد ندارد $x=0$ در $(f+g)$

۳- گزینه «۳»
متوسط

$$f(x)=[\frac{3x}{2}]$$

$$\lim_{x\to 0} f(4-3x^2)=f(\underbrace{\lim_{x\to 0}(4-3x^2)}_{4-3(0)=4})=f(4^-)=[\frac{3(4)^-}{2}]=[6^-]=5$$

۴- گزینه «۳»
دشوار

حد چپ $=\lim\limits_{x\to 1^-}(f(x^2-1)+f(1-|x|))$

$$=f(\underbrace{\lim_{x\to 1^-}(x^2-1)}_{1^--1=0^-})+f(\underbrace{\lim_{x\to 1^-}(1-|x|)}_{1-1^-=0^+})=f(0^-)+f(0^+)$$

از روی نمودار واضح است که حد تابع **f** در صفر از چپ و راست به ترتیب ۱ و ۲ است و بنابراین:

حد چپ $=1+2=3$

$$\lim_{x\to 1^+}(f(x^2-1)+f(1-|x|))=f(0^+)+f(0^-)=2+1=3$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)=0^+\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(1-|x|)=1-1^+=0^-\end{cases}$$

پس حد کل وجود دارد و برابر ۳ است.

۵- گزینه «۴»
دشوار

$$\lim_{x\to(-3)^-} fof(x)=\lim_{x\to(-3)^-} f(f(x))=f(\lim_{x\to(-3)^-} f(x))=f(3)$$

برای یافتن $f(3)$، معادله خطی که $f(3)$ روی اون قرار دارد رو پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}(0,-1)\\(2,0)\end{cases}\Rightarrow y-0=\frac{0+1}{2-0}(x-2)\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y(3)=\frac{1}{2}(3-2)=\frac{1}{2}$$

۶- گزینه «۳»
متوسط

$$\lim_{x\to 1^-}(fof)(x)+\lim_{x\to 1^+}(fof)(x)=f(0^-)+f(0^+)=1+(-1)=0$$

۷- گزینه «۲»
آسان

$$\lim_{x\to 0^-} x-x^2=\lim_{x\to 0^-} x(1-x)=0^-\times(1-0)=0^-\times 1=0^-$$

$$\lim_{x\to 0^-}[g(x)]=\lim_{x\to 0^-}[f(x-x^2)]=\lim_{x\to 0^-}[f(0^-)]=[(-1)^-]=-2$$

۸- گزینه «۴»
دشوار

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{2[f(x)]+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)-1}{2[\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)]+1}=\frac{-1-1}{2[(-1)^-]+1}$$

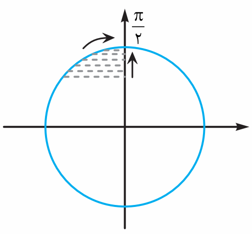
$$=\frac{-2}{2(-2)+1}=\frac{-2}{-4+1}=\frac{2}{3}$$

حواست باشه که وقتی $x\to 0^+$، نمودار به ۱- از سمت پایین نزدیک میشه

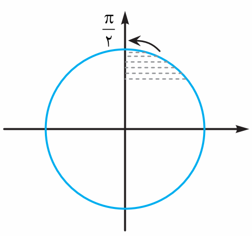
یعنی $(-1)^-$.

۹- گزینه «۱»
دشوار

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}[f(\sin\frac{\pi x}{2})]=[f(1^-)]=[(-1)^+]=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\sin\frac{\pi x}{2}=\sin\frac{\pi}{2}^+=1^-\end{cases}$$



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}[f(\sin\frac{\pi x}{2})]=[f(1^-)]=[(-1)^+]=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\sin\frac{\pi x}{2}=\sin\frac{\pi}{2}^-=1^-\end{cases}$$



۱۰- گزینه «۲»
متوسط

$$\lim_{x\to 2^-}(f(x-2)+f(2-x))=f(0^-)+f(0^+)=2+1=3$$

$$\lim_{x\to 2^+}(f(x-2)+f(2-x))=f(0^+)+f(0^-)=1+2=3$$

$3=3\Rightarrow$ مقدار حد وجود دارد و برابر ۳ است.

۱۱- گزینه «۴»
دشوار

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{4})^-}[4x+1]=[4(-\frac{1}{4})^-+1]=[(-1)^-+1]=[0^-]=-1$$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{4})^+}[4x+1]=[4(-\frac{1}{4})^++1]=[(-1)^++1]=[0^+]=0$$

حد راست یک واحد بیشتر از حد چپ است.

۱۲- گزینه «۲»
دشوار

$$f(2x-1)=\frac{3-x}{4-3x}$$

برای محاسبه $\lim_{x\to 6} f(x)$ باید $2x-1=6$ یعنی $x=\frac{7}{2}$.

$$\lim_{x\to 6} f(x)=\lim_{x\to\frac{7}{2}}\frac{3-x}{4-3x}=\frac{3-\frac{7}{2}}{4-3(\frac{7}{2})}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{13}{2}}=\frac{1}{13}$$

۱۳- گزینه «۴»
متوسط

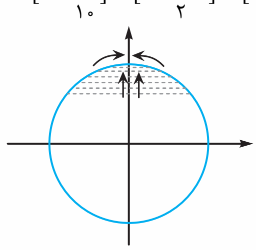
می‌دانیم که در محاسبه حد، ما به (-1) نزدیک میشیم اما بـه خـود ۱- نمی‌رسیم بنابراین برای محاسبه هر دو حد چـپ و راسـت از ضـابطه اول $(x\neq -1)$ اسـتفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{-1+1}=\frac{-2}{0}=$$ وجود ندارد

۱۴- گزینه «۱»
متوسط

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{10}}[\sin 5x]=[\lim_{x\to\frac{\pi}{10}}\sin 5x]$$

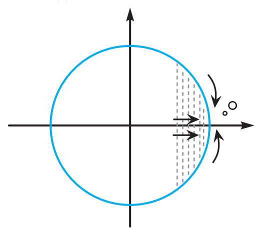
$$=[\sin\frac{5\pi}{10}]=[\sin\frac{\pi}{2}^{\pm}]=[1^-]=0$$



۱۵- گزینه «۳»
دشوار

$$\lim_{x\to 0^-}[\frac{-3}{2\cos x+1}]=[\frac{-3}{2\cos(0)^{\pm}+1}]$$

$$=[\frac{-3}{2(1)^-+1}]=[\frac{-3}{3^-}]=[-(1^+)]=[(-1)^-]=-2$$



۱۶- گزینه «۱»
دشوار

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}([\frac{3}{x}]+[\frac{-2}{x}])=[\frac{3}{(-\frac{1}{2})^-}]+[\frac{-2}{(-\frac{1}{2})^-}]$$

$$=[(-6)^+]+[4^-]=-6+3=-3$$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}([\frac{3}{x}]+[\frac{-2}{x}])=[\frac{3}{(-\frac{1}{2})^+}]+[\frac{-2}{(-\frac{1}{2})^+}]$$

$$=[(-6)^-]+[4^+]=-7+4=-3$$

برای محاسبه براکت این جور کسرها عددگذاری و مقایسه کن.

۱۷- گزینه «۱»
متوسط

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-[x]}{2|x|+[x]}=\frac{-x-[0^-]}{-2x+[0^-]}=\frac{-x-(-1)}{-2x+(-1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x+1}{2x-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

۱۸- گزینه «۴»
متوسط

تابع در $x=12$ حد دارد پس حد چپ و حد راست آن‌ها برابر است.

$$\text{حد چپ}=a[-\frac{12^-}{4}]+[\frac{12^-}{3}]=a[\underbrace{-(\underbrace{3^-}_{2/9})}_{-2/9}]+[4^-]=a[(-3)^+]+3=-3a+3$$

$$\text{حد راست}=a[-\frac{12^+}{4}]+[\frac{12^+}{3}]=a[\underbrace{-(\underbrace{3^+}_{3/1})}_{-3/1}]+[4^+]=a[(-3)^-]+4=-4a+4$$

$$-3a+3=-4a+4\ \Rightarrow\ a=1$$

۱۹- گزینه «۲»
آسان

$$\text{حد چپ در } x=1 = a[1^-]+[\underbrace{\underbrace{1^-}_{0/9}+1}_{1/9}]=0+1=1$$

$$\Rightarrow\ a+2=1\ \Rightarrow\ a=-1$$

$$\text{حد راست در } x=1 = a[1^+]+[\underbrace{1^++1}_{2^+}]=a+2$$

۲۰- گزینه «۲»
متوسط

۱) درست است زیرا $\sqrt{x}$ در همسایگی چپ صفر تعریـف نشـده و حـد چـپ ندارد.

۳) درست است زیرا می‌دانیم $[x]+[-x]$ به ازای $x\notin\mathbb{Z}$ برابر ۱- اسـت و وقتی $x\to 1^+$ یعنی عدد صحیحی نداریم.

۴) درست است زیرا حدهای چپ و راست متفاوت هستند.

بررسی گزینه ۲: وجود ندارد $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{[x]-2}=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0}$

۲۱- گزینه «۴»
متوسط

$$\lim_{x\to 2^+}[f(f(x))]=\lim[f(2^-)]=\lim_{x\to 2^+}[1^-]=\lim_{x\to 2^+}0=0$$

۲۲- گزینه «۴» — متوسط

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^+}([\frac{-۲}{x}]-[-۴x^۲]) = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^+}([۴^+]-[-۴(\frac{۱}{۴})^-]) = ۴-[(-۱)^+]$$

$$= \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^+} ۴-۱=۳$$

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^-}([-\frac{۲}{x}]-[-۴x^۲]) = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^-}([۴^-]-[-۴(\frac{۱}{۴})^+])$$

$$=۳-[(-۱)^-]=۳-(-۲)=۳+۲=۵$$

۲۳- گزینه «۲» — متوسط

$$\lim_{x\to ۰^-} f(g(x)) = f(\lim_{x\to ۰^-} g(x)) \Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} g(x) = \lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲-x}{-x} =$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x(x-۱)}{-x} = \lim_{x\to ۰^-}(-x+۱)=۱^+$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}[۲x]=[۲^+]=۲$$

۲۴- گزینه «۳» — متوسط

$$(\lim_{x\to ۲} f(x))(\lim_{x\to ۲} g(x))$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۴)=۰$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-}(۴-۲x)=۰$$

$$x\in Q \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x)\times g(x) = ۰\times(-۳)=۰$$

$$x\notin Q \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x)\times g(x) = ۰\times ۲=۰$$

در نتیجه حد ضرب آن‌ها نیز موجود و برابر با صفر خواهد بود.

۲۵- گزینه «۱» — متوسط

ابتدا حد توابع **f** و **g** را در $x=۱$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}(۳x^۲-[x]) = \lim_{x\to ۱^+}(۳x^۲-۱)=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-}(۳x^۲-۰)=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^+} g(x) = \lim_{x\to ۱^+}[x]+۴=۱+۴=۵$$

$$\lim_{x\to ۱^-} g(x) = \lim_{x\to ۱^-}[x]+۴=۰+۴=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)+g(x)=۲+۵=۷$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)+g(x)=۳+۴=۷$$

پس حد $(f+g)$ در $x=۱$ برابر ۷ است.

۲۶- گزینه «۳» — آسان

$$\lim_{x\to ۲} f(x)g(x) = \lim_{x\to ۲}(\frac{x+۱}{۲x^۲-x+۱}\times\frac{۲x+۱}{x}) = \frac{۳}{۷}\times\frac{۵}{۲}=\frac{۱۵}{۱۴}$$

۲۷- گزینه «۲» — متوسط

$$\lim_{x\to -۲}\frac{۳x-۶-۸x-۴}{(x-۲)(x+۲)(۲x+۱)} = \lim_{x\to -۲}\frac{\overset{-۵\cancel{(x+۲)}}{\cancel{-۵x-۱۰}}}{(x-۲)\cancel{(x+۲)}(۲x+۱)}$$

$$=\frac{-۵}{(-۴)(-۳)}=-\frac{۵}{۱۲}$$

۲۸- گزینه «۲» — متوسط

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲-۲[x]x}{x(x-۲)} = \lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)} = \lim_{x\to ۲^-}\frac{\overset{-۱}{\cancel{۲-x}}}{x\underset{۱}{\cancel{(x-۲)}}} = \frac{-۱}{۲}$$

۲۹- گزینه «۴» — متوسط

$$\lim_{x\to -۲^+}\frac{|x^۲-۴|}{-x^۲-x+۲} = \lim_{x\to -۲^+}\frac{|(x-۲)(x+۲)|}{-(x^۲+x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to -۲^+}\frac{|x-۲|\cancel{(x+۲)}}{-\cancel{(x+۲)}(x-۱)}=\frac{۴}{۳}$$

۳۰- گزینه «۳» — آسان

فرض کنید $x=t^{۱۲}$، در این صورت $t\Rightarrow ۱$ و داریم:

$$\lim_{t\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{t^{۱۲}}-\sqrt{t^{۱۲}}}{\sqrt[۴]{t^{۱۲}}-\sqrt{t^{۱۲}}} = \lim_{t\to ۱}\frac{t^۴-t^۶}{t^۳-t^۶} = \lim_{t\to ۱}\frac{\overset{۱}{\cancel{t^۴}}(۱-t^۲)}{\underset{۱}{\cancel{t^۳}}(۱-t^۳)}$$

$$=\lim_{t\to ۱}\frac{۱\times(۱-t)(۱+t)}{۱\times(۱-t)(۱+t+t^۲)}=\frac{۲}{۳}$$

۳۱- گزینه «۱» — آسان

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}[۴\cos^۲\pi x]=[۴\cos^۲\frac{\pi}{۶}^+]=[۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲}^-)^۲]=[۴(\frac{۳}{۴})^-]=[۳^-]=۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{۲-۱۲x}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$$

چون صورت کسر به ازای $x=\frac{۱}{۶}$، صفر شده پس مخرج نیز باید صفر باشد.

$$a(\frac{۱}{۶})+b=۰\Rightarrow b=\frac{-۱}{۶}a\Rightarrow a=-۶b$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۶}^+}\frac{۲-۱۲x}{-۶bx+b}=\lim_{x\to\frac{۱}{۶}^+}\frac{۲(۱-۶x)}{b(۱-۶x)}=\frac{۲}{b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=۴, a=-۲۴$$

$$a+b=-۲۰$$

پاسخنامه
سؤالات تشریحی
بخش ۳

۱- آسان

شرط پیوستگی که باید هر سه برقرار باشند اینهاست:

۱) **f** در عدد تعریف شده باشه ۲) **f** در عدد دارای حد باشه

۳) مقدار حد با مقدار تابع در اون عدد یکی باشه.

$f(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}, D_f=\mathbb{R}-\{۳\} \Rightarrow$ شرط اول رو نداره

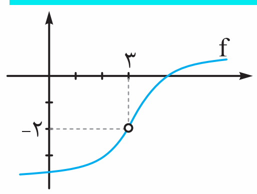
پس **f** در $x=۳$ پیوسته نیست.

$\lim\limits_{x\to ۳} g(x)=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}(x+۳)=۶$

$g(۳)=۶$

در **g** هر سه شرط پیوستگی در $x=۳$ برقرار است پس **g** در $x=۳$ پیوسته است.

۲- آسان



اما $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=-۲$

همانطوری که از نمودار مشخص هست این تابع در $x=۳$ ناپیوسته است.

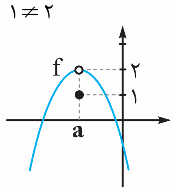
۳- آسان

$a\in D_f$

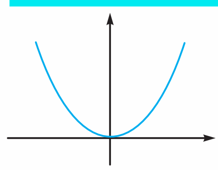
$\lim\limits_{x\to a} f(a)=۲$

$f(a)=۱$

$۱\neq ۲$

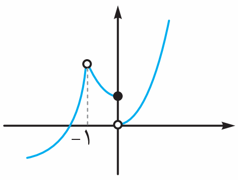


۴- آسان



خط‌ها، سهمی‌ها و به طور کلی توابع چندجمله‌ای از انواع توابعی هستند که همواره پیوسته هستند.

۵- آسان



این تابع در $x=۰$ به دلیل عدم وجود حد و در $x=-۱$ به دلیل تعریف نشدن در (-۱) ناپیوسته است اما در بقیه نقاط محور، تعریف شده است.

۶- آسان

۱) $f(۰)=۲$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-}(۳x^۲+x)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۰^+}(۲\cos x-\sin x)=۲(۱)-۰=۲$

$۰\neq ۲$

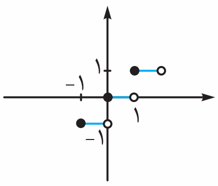
تابع در $x=۰$ حد ندارد و بنابراین در صفر پیوسته نیست. ولی پیوستگی راست دارد.

۷- متوسط

آ) تابع جزء صحیح در نقاط صحیح دارای حد نیست و بنابراین ناپیوسته است اما در نقاط غیر صحیح پیوسته است پس **f** تنها در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته است.

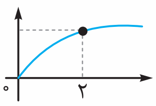
ب) تابع **f** در همه نقاط صحیح پیوستگی راست داره پس در $x=۲, x=۰$ پیوستگی راست داره.

پ) **f** در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوستگی کامل دارد اما در هیچکدام از این نقاط دارای تنها پیوستگی چپ نیست.



۸- متوسط

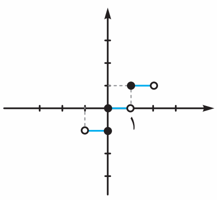
آ) نادرست ـ همانطور که از نمودار مشخص هست تابع **f** در این بازه پیوستگی دارد.



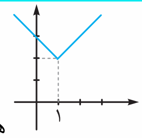
یادت باشه که در $x=۰$ تنها داشتن پیوستگی راست و در $x=۲$ تنها داشتن پیوستگی چپ کافی هست.

ب) درست ـ به نمودار $f(x)=[x]$ توجه کن.

در بازه $(۰,۱)$ پیوسته است اما در $[۰,۱]$ پیوسته نیست زیرا در ۱ پیوستگی چپ ندارد.

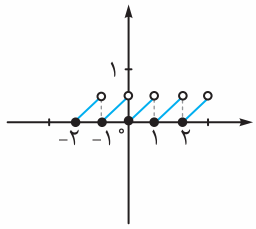


۹- متوسط

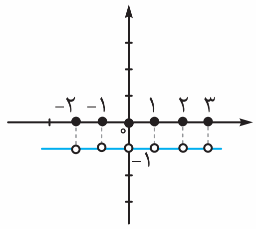


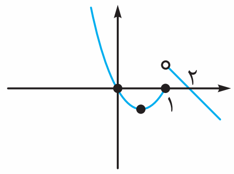
آ) همواره پیوسته است.

ب) در اعداد صحیح ناپیوسته است اما پیوستگی راست دارد.



پ) در اعداد صحیح ناپیوسته است و پیوستگی یک طرفه ندارد.





ت) در $x=۱$ ناپیوسته است.

۱۰- آسان

برای پیوسته بودن و یافتن مجهول‌ها کافیه سه تا مقدار برابر باشند:

حد چپ، حد راست و مقدار تابع

آ) حد چپ $=۲(۱)-۱=۱$

حد راست $=-۱+۲=۱$

$f(۱)=a$

$\Rightarrow a=۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{x-۱}\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}(x+۲)=۳$

$g(۱)=a \Rightarrow a=۳$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{\cancel{\sqrt{x}-۱}}{(\cancel{\sqrt{x}-۱})(\sqrt{x}+۱)}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$

$\lim\limits_{x\to ۱^+}([x]+a)=[۱^+]+a=۱+a$

$۱+a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^-}([x]-a)[x]=-a(۰)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۱^+}([x]-a)[x]=(۱-a)(۱)=۱-a \Rightarrow ۱-a=۰ \Rightarrow a=۱$

۱۱- متوسط

آ) $\lim\limits_{x\to ۰^-} x=۰$

$\lim\limits_{x\to ۰^+}(۲x+۱)=۱$

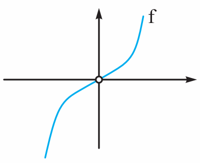
$۰\neq ۱ \Rightarrow$ حد ندارد $\Rightarrow$ پیوسته نیست

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{ax}{|x|}= \begin{cases} \xrightarrow{x\to ۰^+} \frac{ax}{x}=a \\ \xrightarrow{x\to ۰^-} \frac{ax}{-x}=-a \end{cases} \Rightarrow a=-a \Rightarrow a=۰$

$f(۰)=۱ \Rightarrow ۰\neq ۱ \Rightarrow$ پیوسته نیست $x=۰$ در g

۱۲- آسان

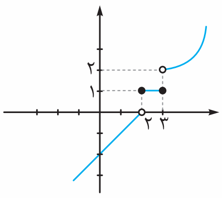
آ)



$۰\notin D_f$

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$

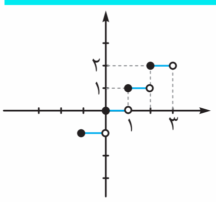
ب)



پ) $x=-۲, x=۲$ در دامنه تابع نیستند و بنابراین f در این نقاط ناپیوسته است و f در بقیه اعداد حقیقی پیوسته است.

$f(x)=\frac{۱}{x^۲-۴}$

۱۳- آسان



تابع جزء صحیح روی هر پله پیوسته است و چون جزء صحیح اصلی را داریم، طول پله‌ها یک واحد است بنابراین حداکثر مقداری که k می‌تواند بگیرد ۳ است.

۱۴- متوسط

$f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$

$۳-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۳$

هر زیر مجموعه‌ای از این دامنه، می‌تواند جواب مسأله باشد برای مثال: $[۰,۱]$

۱۵- متوسط

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{ax+|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax-|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(a-1)}{x}=a-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^3+4b=0+4b=4b \qquad f(0)=2$$

$$a-1=2\Rightarrow a=3\ ,\ 4b=2\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

۱۶- آسان

آ) یک سهمی در هر عدد حقیقی پیوسته است پس در $x=1$ نیز پیوسته است.

ب) $g(x)=\begin{cases}1 & x\geq 1\\ -1 & x<1\end{cases} \Rightarrow$ در $x=1$ ناپیوسته است

پ) حد چپ $=-1+2=1$

$f(1)=2$

حد راست $=1$ $\Rightarrow$ در $x=1$ ناپیوسته است

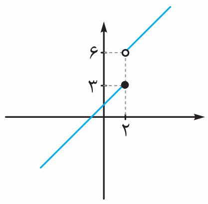
۱۷- آسان

$$\lim_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3$$

$$\lim_{x\to 2^+}(3x)=3(2)=6$$

$3\neq 6 \Rightarrow$ در $x=2$ پیوسته نیست

به نمودار توجه کنیم:



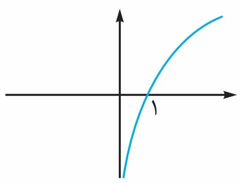
ناپیوستگی از روی نمودار هم مشهود است.

۱۸- آسان

آ) درست ـ چند جمله‌ای‌ها در کل $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

ب) نادرست ـ توابع سینوس و کسینوس در کل $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

پ) درست ـ از روی نمودار کاملا واضح است.



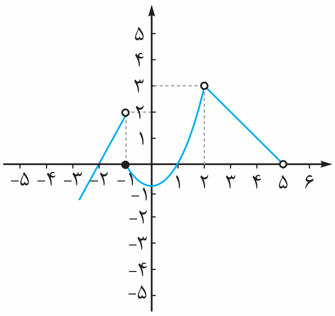
ت) درست

ث) درست

ج) درست ـ شبیه قسمت (پ)، این تابع روی $(0,+\infty)$ پیوسته است پس روی هر زیر بازه آن پیوسته است.

۱۹- متوسط

آ)



ب) $D_f=(-\infty,5)-\{2\}$

$R_f=(-\infty,3)$

پ) $[-1,1] \Rightarrow$ پیوسته

$(2,5) \Rightarrow$ پیوسته

$[-2,0] \Rightarrow$ ناپیوسته در $x=-1$

۲۰- آسان

آ) نادرست ـ زیرا در $x=-1$ پیوستگی چپ ندارد.

ب) درست ـ زیرا در این بازه کاملا پیوسته است.

پ) نادرست ـ زیرا مقدار تابع در $x=2$ و $x=5$ تعریف نشده است.

ت) نادرست ـ زیرا تابع در همسایگی راست ۵ تعریف نشده است و حد ندارد.

ث) درست

ج) نادرست ـ **f** در بازه در این $x=-1$ ناپیوسته است.

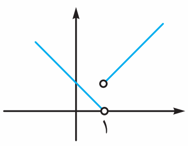
۲۱- آسان

آ) تابع در $[-1,1]$ پیوسته است و در $[-1,2]$ ناپیوسته است.

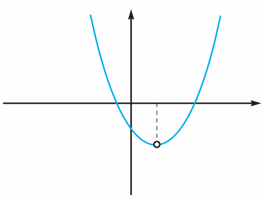
ب) **f** در $[2,4)$ پیوسته و در $[2,4]$ ناپیوسته است.

۲۲- آسان

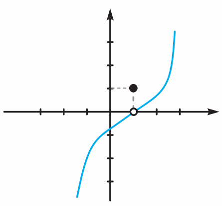
آ)



ب)



پ)



۲۳- دشوار

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(\sqrt[۳]{x+۸}-۲)(\sqrt[۳]{(x+۸)}^{۲}+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴)}{x(\sqrt[۳]{(x+۸)}^{۲}+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x+۸-۸}{x(\sqrt[۳]{(x+۸)}^{۲}+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴)}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}+۲\sqrt[۳]{۸}+۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

$f(۰)=a$

مقدار حد $=(x=۰)$ مقدار تابع در $\Rightarrow a=\frac{۱}{۱۲}$

۲۴- متوسط

آ) $\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۲-۴}{(x-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}$

$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{\sqrt{x+۲}+۲}=\frac{۱}{۴}$

$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۱}{x^۲+۴}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$ $\Rightarrow$ f در $x=۲$ پیوسته است.

$f(۲)=\frac{۱}{۴}$

ب) $\lim_{x\to ۲^-}x[x]=۲[۲^-]=۲$

$\lim_{x\to ۲^-}x[x]=۲[۲^+]=۴$

$f(۲)=۲[۲]=۴$

f در $x=۲$ ناپیوسته است اما پیوستگی راست دارد.

۲۵- متوسط

اگر **f** بخواهد در $x=۱$ پیوستگی راست داشته باشد لازم است مقدار تابع یعنی $f(۱)$ با حد راست تابع برابر باشد:

حد راست $=a[\underbrace{\underbrace{۱-۱^+}_{۰^-}}_{-۱}]+[۱^+]=-a+۱$

$f(۱)=a[۱-۱]+[۱]=۱$

$-a+۱=۱\ \Rightarrow\ a=۰$

۲۶- متوسط

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(\cancel{x-۱})(x+۱)}{\cancel{x-۱}}=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(\cancel{x-۱})(x+۱)}{-(\cancel{x-۱})}=-۲$$

تابع در $x=۱$ دارای حد نیست و هیچ مقداری وجود ندارد که به جای **a** قرار دهیم و **f** پیوسته شود.

۲۷- متوسط

$\lim_{x\to ۰^-}(\sin x+\cos x)=\sin ۰+\cos ۰=۰+۱=۱$

$\lim_{x\to ۰^+}(x^۲+۱)=۰+۱=۱$

$f(۰)=\sqrt{۲}$

$\lim_{x\to ۰}f(x)\neq f(۰)$ تابع **f** در $x=۰$ ناپیوسته است.

۲۸- متوسط

$\lim_{x\to ۰^-}(-۲x+a)=-۲(۰)+a=۰+a=a$

$\lim_{x\to ۰^+}(x^۲+۲)=۰+۲=۲$

$f(۰)=b+۱$

$a=۲\ ,\ b+۱=۲\Rightarrow b=۱$

۲۹- متوسط

چون در صورت گفته نشده چه نقطه‌ای بررسی کنیم، روی نقطه مرز $(x=۲)$ بررسی می‌کنیم.

$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۲b}{x^۲-۲}=\frac{۲+۲b}{۴-۲}=\frac{۲(۱+b)}{۲}=۱+b$

$f(۲)=۲a+۲+۱=۲a+۳$

$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=۲b+۵=۱+b\Rightarrow b-۴$

$۲a+۳=۱+b\xrightarrow{b=-۴}۲a+۳=-۳\Rightarrow ۲a=-۶\Rightarrow a=-۳$

$\Rightarrow a-b=-۳-(-۴)=۱$

۳۰- متوسط

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{x-۱}{[x^۲]}$

$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{[x^۲]}=\lim\frac{x-۱}{[۰^+]}=\frac{-۱}{۰}=\infty$

تابع $\frac{g}{f}$ در $x=۰$ دارای حد نیست بنابراین پیوسته نیست.

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۳

۱- گزینه «۲» آسان

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<-2\\ x^2+1 & -2\le x\le 2\\ 2x+1 & x>2\end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-2)^-}(2x+1)=2(-2)+1=-4+1=-3\\ \lim\limits_{x\to(-2)^+}(x^2+1)=(-2)^2+1=4+1=5\end{array}\right. \Rightarrow$$ در $x=-2$ ناپیوسته

$$\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1)=2^2+1=4+1=5\\ \lim\limits_{x\to 2^+}2x+1=2(2)+1=4+1=5\end{array}\right. \Rightarrow$$ در $x=2$ پیوسته

$f(2)=5$

۲- گزینه «۲» متوسط

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}\\ \lim\limits_{x\to a^+}(1-\frac{x}{4})=1-\frac{a}{4}\end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{a}=1-\frac{a}{4}\xrightarrow{\times 4a}4=4a-a^2$$

$$\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow (a-2)^2=0 \Rightarrow a=2$$

۳- گزینه «۴» متوسط

۱- ضرب یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته ممکن است پیوسته باشد. (عامل صفرکنندگی داشته باشد)

۲- گر دو تابع ناپیوسته باشد، باید آن را بررسی کنیم.

۳- اگر جمع دو تابع پیوسته باشد ممکن است هر دو ناپیوسته باشد.

۴- گزینه «۳» متوسط

$$\lim_{x\to 1^-}(ax-a+2)=a-a+2=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x^2-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{1}}{1}=2$$

$f(1)=a(1)-a+2=2$

همانطور که مشخص است هر سه مقدار حد چپ و راست و مقدار تابع بدون این که به مقدار **a** وابسته باشند برابر هستند و بنابراین تابع به ازای هر مقدار **a** پیوسته است.

۵- گزینه «۱» متوسط

جداکننده بازه بالا و پایین اعداد صحیح است، پس پیوستگی را در اعداد صحیح بررسی می‌کنیم:

می‌دانیم که به ازای $x\notin\mathbb{Z}$ داریم: $[x]+[-x]=-1$ و داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای پیوسته بودن باید $a=-1$.

۶- گزینه «۳» متوسط

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(x+2)}=\frac{-1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x-2)}=\frac{1}{-2}\end{array}\right.\Rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

۷- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to 2^-}3x-[x]=3(2)-[2^-]=6-1=5$$

$$\lim_{x\to 2^+}(x+2)=2+2=4$$

چون حد چپ و راست نا برابرند تابع نمی‌تواند در $x=2$ پیوسته باشد و مقداری برای a به‌دست نمی‌آید.

۸- گزینه «۲» آسان

$$\lim_{x\to 6^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 6^+}(a+\cos^2\frac{\pi x}{36})=a+\cos^2\frac{\pi}{6}=a+\frac{3}{4}$$

$$a+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{-1}{4}$$

۹- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to\pm 1}\frac{(x^2+2)(x^2-1)}{(x^2-1)}=\lim_{x\to\pm 1}x^2+2=1+2=3$$

$f(\pm 1)=a\Rightarrow a=3$

۱۰- گزینه «۳» آسان

$$\lim_{x\to 8^-}[x]-[\frac{x}{4}]=[8^-]-[\frac{8}{4}^-]=7-[2^-]=7-1=6$$

$$\lim_{x\to 8^+}[x]-[\frac{x}{4}]=[8^+]-[\frac{8}{4}^+]=8-[2^+]=8-2=6$$

$$f(8)=[8]-[\frac{8}{4}]=8-2=6$$

۱۱- گزینه «۳» — متوسط

باید نقاط مرز $x=۱$ و $x=-۱$ را بررسی کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵x^۲-۴x} & x<-۱\\ ۲x-۱ & -۱\le x\le ۱\\ \sqrt{۵x^۲-۴x} & x>۱۱\end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\sqrt{۵x^۲-۴x}=\sqrt{۵+۴}=۳\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-}۲x-۱=-۲=-۳\end{array}\right.$$ در $x=-۱$ ناپیوسته

$$\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۱^-}۲x-۱=۲-۱=۱\\ \lim\limits_{x\to۱^+}\sqrt{۵x^۲-۴x}=\sqrt{۵-۴}=۱\end{array}\right. \Rightarrow$$ در $x=۱$ پیوسته

۱۲- گزینه «۴» — متوسط

پیوستگی را در نقطه مرز $x=۱$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to۱^-}\frac{|x^۲+x-۲|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{|(x+۲)(x-۱)|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)}=۳$$

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{|x^۲+x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{|(x+۲)(x-۱)|}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)}=۳$$

حد چپ و راست برابر نیست پس مقداری برای a به‌دست نمی‌آید.

۱۳- گزینه «۲» — آسان

$$\lim_{x\to۲^-}(x-۱)[x]=(۲-۱)[۲^-]=۱$$

$$\lim_{x\to۲^+}(a+۲\sin\frac{\pi}{x})=a+۲\sin\frac{\pi}{۲}=a+۲$$

$a+۲=۱ \Rightarrow a=-۱$

۱۴- گزینه «۳» — آسان

$$f(x)=\begin{cases}x[x] & -۱<x<۱\\ ax+b & x\le -۱\cup x\ge ۱\end{cases}$$

پیوستگی در -۱: $-۱[(-۱)^+]=-a+b \Rightarrow b-a=۱$

پیوستگی در ۱: $۱[۱^-]=a+b \Rightarrow a+b=۰$

$$\begin{cases}b-a=۱\\ b+a=۰\end{cases}$$

$۲b=۱ \Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

۱۵- گزینه «۱» — آسان

برای پیوستگی در بازه $[۲,۳)$ لازم است در ۲ پیوستگی راست داشته باشد.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to۲^+}\frac{x-[x]}{x^۳-x-۶}=\lim_{x\to۲}\frac{\cancel{x-۲}}{(\cancel{x-۲})(x^۲+۲x+۳)}=\frac{۱}{۱۱}$$

$f(۲)=a \Rightarrow a=\frac{۱}{۱۱}$

۱۶- گزینه «۴» — متوسط

$f(۲)=۲a+[۲-۱]=۲a+۱$

$$\lim_{x\to۲^-}a\sqrt{x+۲}+[x-۱]=۲a+[۲^--۱]=۲a+[۱^-]=۲a+۰=۲a$$

$۲a+۱=۲a$ جواب ندارد.

۱۷- گزینه «۱» — متوسط

به ازای $x=۱$ و $x=۲$، $[\frac{۲}{x}]$ ناپیوسته است پس تابع **f** در صورتی در این نقاط پیوسته خواهد شد که عامل صفرکنندگی داشته باشد.

یعنی $-۳x^۲+ax+b$ به‌ازای $x=۱$ و $x=۲$ صفر شود.

جمع ریشه‌ها $=۱+۲=۳$ و ضرب ریشه‌ها $=۱\times۲=۲$

$$-۳x^۲+ax+b=۰\begin{cases}\text{جمع ریشه‌ها}=\frac{a}{۳}=۳\Rightarrow a=۹\\ \text{ضرب ریشه‌ها}=\frac{b}{-۳}=۲\Rightarrow b=-۶\end{cases}$$

$a+۲b=۹+۲(-۶)=-۳$

۱۸- گزینه «۲» — آسان

$$\lim_{x\to-۱^-}\frac{۲-\sqrt{۳-x}}{x+۱}=\lim_{x\to-۱^-}\frac{\cancel{۴-۳+x}}{(\cancel{x+۱})(۲+\sqrt{۳-x})}=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to-۱^+}(ax+۱)=-a+۱$$

$-a+۱=\frac{۱}{۴} \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$

۱۹- گزینه «۲» — آسان

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۲^-}(x-۱)[x]=۱\\ \lim\limits_{x\to۲^+}(a+۲\sin\frac{\pi}{x})=a+۲\end{array}\right. \Rightarrow a+۲=۱ \Rightarrow a=-۱$$

۲۰- گزینه «۱» — آسان

$$\lim_{x\to۱^+}(-x^۲+۴)=۳$$

$$\lim_{x\to۱^-}(ax+۵x-a)=۵$$

$۳\ne۵ \Rightarrow$ به ازای هیچ مقداری پیوسته نیست.

۲۱- گزینه «۴» — آسان

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x^۲-x-۱}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(۲x+۱)}{x-۱}=۳$$

$$\lim_{x\to۱}(ax-a+۳)=۳$$

بدون توجه به مقدار **a** به هرحال این تابع پیوسته است. $\Rightarrow ۳=۳$

۲۲- گزینه «۲» — متوسط

توابع براکتی به ازای مقادیری که داخل براکت را به عدد صحیح تبدیل می‌کنند ناپیوسته هستند مگر اینکه ریشه عبارت پشت براکت باشد!

این تابع در $x=\pm1$ که داخل براکت صحیح است و ریشه (x^2-1) هستند پیوسته است.

۲۳- گزینه «۴» — متوسط

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{0}{0^+}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$f(0)=\frac{[0]}{0}=$ تعریف نشده

$0\notin D_f$

۲۴- گزینه «۱» — متوسط

$x=-1$ پیوسته در $\Rightarrow\ -a+b=(-1)[(-1)^+]$

$\Rightarrow -a+b=1$

$x=1$ پیوسته در $\Rightarrow\ a+b=1[1^-]\ \Rightarrow\ a+b=0$

$$\begin{cases}-a+b=1\\ a+b=0\end{cases}$$

$$2b=1\ \Rightarrow\ b=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a=-\frac{1}{2}$$

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & |x|\ge 1 \xrightarrow{x=3} y=\frac{-3}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{2}=-1\\ x[x] & |x|<1 \xrightarrow{x=3}\end{cases}$ غ‌ق (در بازه نیست)

۲۵- گزینه «۱» — متوسط

از اونجایی که $f+g\,,\,f-g$ هر دو در x پیوسته هستند پس جمع و تفریق آن‌ها هم پیوسته است:

$f+g+f-g=2f$ پیوسته

$\Rightarrow f$ پیوسته

$f+g-(f-g)=f+g-f+g=2g$ پیوسته $\Rightarrow g$ پیوسته

بنابراین **f** و **g** پیوسته هستند.

۲۶- گزینه «۱» — متوسط

اگر x زوج: $x=2k$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2k^+}(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x=(-1)^{2k}\sin\frac{\pi}{2}\times 2k\\ =\underbrace{1\times\sin k\pi}_{0}=0\\ \lim\limits_{x\to 2k^-}(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x=(-1)^{2k-1}\sin\frac{\pi}{2}\times 2k\\ =\underbrace{(-1)\sin k\pi}_{0}=0\end{cases}$$

$\sin k\pi$ عامل صفر کنندگی است.

اگر x فرد: $x=2k+1$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(2k+1)^+}(-1)^{2k+1}\sin\frac{\pi}{2}(2k+1)\\ =(-1)\times\pm1=\pm1\\ \lim\limits_{x\to(2k+1)^-}(-1)^{2k}\sin\frac{\pi}{2}(2k+1)\\ =1\times(\pm1)=\pm1\end{cases}$$

فقط در اعداد زوج پیوسته است.

۲۷- گزینه «۴» — متوسط

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-1 & x\in\mathbb{Z}\\ f(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}0-1 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\ \Rightarrow\ g(x)=-1$$

بنابراین تابع **g** یک تابع ثابت است و روی این بازه نقطه ناپیوستگی ندارد.

۲۸- گزینه «۳» — دشوار

اگر توان داخل جز صحیح زوج باشد، بهتر است بازه منفی و مثبت را جدا کنیم و در $x=0$ پیوسته است.

ابتدا بازه $(-1,2)$ را بررسی کرده و در نقاط $x=-1$ پیوستگی راست و در $x=2$ پیوستگی چپ را بررسی می‌کنیم.

$-1<x<0\Rightarrow 0<x^2<1\Rightarrow$ عدد صحیح در این بازه وجود ندارد

$0<x<2\Rightarrow 0<x^2<4\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x^2=1\Rightarrow x=1\\ x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}\\ x^2=3\Rightarrow x=\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow$ ۳ نقطه

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-1)^+}[x^2]=[1^-]=0\\ f(-1)=[1]=1\end{array}\right\}\Rightarrow$ ۱ نقطه

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}[x^2]=[4^-]=3\\ f(2)=[4]=4\end{array}\right\}\Rightarrow$ ۱ نقطه

در ۵ نقطه ناپیوسته است.

۲۹- گزینه «۳» دشوار

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{-1}{2} \quad \lim_{x\to 0^-} g(x)=0 \quad \lim_{x\to 0^-} f\times g=\frac{-1}{2}\times 0=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \quad \lim_{x\to 0^+} g(x)=1 \quad \lim_{x\to 0^+} f\times g=0\times 1=0$$

تابع $f\times g$ در $x=0$ پیوسته است.

۳۰- گزینه «۱» آسان

$$k(x)=f+g=\begin{cases} 2x+a+1 & x<1 \\ \dfrac{a}{x+1}+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} k(x)=3+a$$

$$\lim_{x\to 1^+} k(x)=1+\frac{a}{2}$$

$$3+a=1+\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}=-2 \Rightarrow a=-4$$

۱- متوسط

آ) نادرست ـ

$$\lim_{x\to 3^-} g(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6,\quad \lim_{x\to 3^+} g(x)=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=6$$

دارای حد است.

ب) نادرست ـ چون حد ندارد

پ) درست ـ تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح دارای حد نمی‌باشد و در دیگر نقاط دارای حد است.

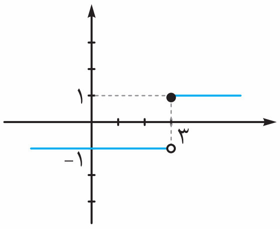
۲- متوسط

آ) وجود ندارد چون $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} (4x^2-7)=-7$

پ) در نقطه $x=2$ حد ندارد چون تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح دارای حد نیست.

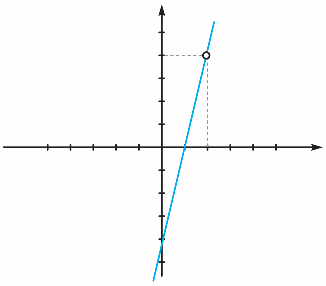
۳- آسان



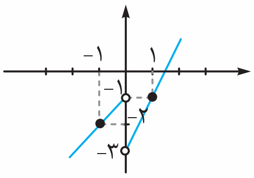
$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 3 \\ -1 & x<3 \end{cases}$$

۴- متوسط

$$f(x)=\frac{4x^2-12x+8}{x-2}$$



۵- متوسط



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

پس در $x=0$ حد ندارد.

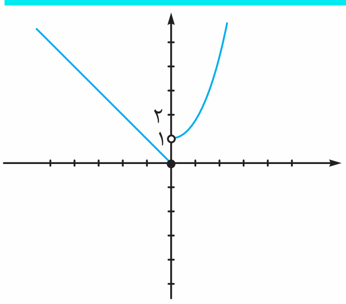
۶- متوسط

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$$

چون حد چپ و راست برابر است پس در $x=2$ حد دارد.

۷- متوسط



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

حد ندارد.

۸- متوسط

$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}$ مبهم $\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=$

$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{x-۱}}{(\cancel{x-۱})(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۲}$

$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(x-\frac{۱}{۲})=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$

چون حد چپ و راست برابرند پس در $x=۱$ حد دارد.

۹- متوسط

$\lim_{x\to -۳^+} f(x)=\lim_{x\to -۳^+} x-b=-۳-b$

$\lim_{x\to -۳^-} f(x)=\lim_{x\to -۳^-}\frac{x^۲+۴}{-x}=\frac{۱۳}{۳}$

چون در $x=-۳$، حد دارد پس حد چپ و راست برابرند.

$-۳-b=\frac{۱۳}{۳}\Rightarrow -۳-\frac{۱۳}{۳}=b\Rightarrow \frac{-۲۲}{۳}=b$

۱۰- دشوار

آ) $\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)^۲}{(x^۲-۹)}=\frac{۰}{۰}$ مبهم $\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)^{\cancel{۲}}}{(\cancel{x-۳})(x+۳)}$

$\lim_{x\to ۳}\frac{x-۳}{x+۳}=\frac{۰}{۶}=۰$

ب) $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۱۵}-۴}{x-۱}=\frac{۰}{۰}$ مبهم $\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۱۵}-۴}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۱۵}+۴}{\sqrt{x+۱۵}+۴}$

$\lim_{x\to ۱}\frac{x+۱۵-۱۶}{(x-۱)(\sqrt{x+۱۵}+۴)}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{x-۱}}{(\cancel{x-۱})(\sqrt{x+۱۵}+۴)}=\frac{۱}{۸}$

پ) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱}=\frac{۱-۱}{\frac{۳}{۵}-۲+۱}=\frac{۰}{-\frac{۲}{۵}}=۰$

۱۱- دشوار

$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x-a)=۴-a$

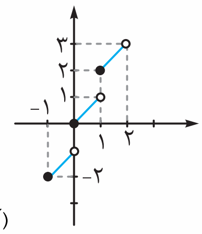
$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(a^۲x^۲+۱)=۴a^۲+۱$

$f(۲)=۴-a$

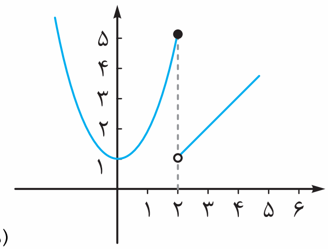
شرط پیوستگی $\Rightarrow ۴-a=۴a^۲+۱=۴-a$

$\Rightarrow ۴a^۲+a-۳=۰\Rightarrow (۴a-۳)(a+۱)=۰\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}, a=-۱$

۱۲- متوسط



آ) در نقاط صحیح ناپیوستگی دارد. $(x\in\mathbb{Z})$



ب) در $x=۲$ ناپیوستگی دارد.

۱۳- متوسط

$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(\cancel{x-۱})(x+۱)}{\cancel{x-۱}}=۲$

$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(\cancel{x-۱})(x+۱)}{\cancel{x-۱}}=۲$

$f(۱)=۱$

چون حد تابع با مقدار تابع برابر نیست پس در $x=۱$ پیوسته نیست.

۱- متوسط

آ) درست $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۴$ $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۴$

ب) نادرست ـ با توجه به دامنه **f** که $\mathbb{R}-\{۱\}$ است مقدار تابع در $x=۱$ وجود ندارد.

پ) نادرست - $D_f: ۲-x\geq ۰\Rightarrow ۲\geq x$ پس حد راست با توجه به دامنه تابع **f** حد راست وجود ندارد.

۲- دشوار

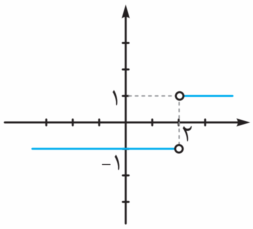
آ) $k=۳$

ب) نیست چون حد چپ و راست برابر نیستند.

پ) نیستند.

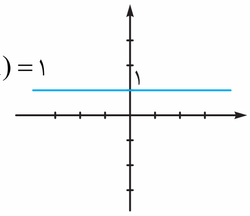
۳- متوسط

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۲ \\ -۱ & x<۲ \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۱ \quad \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۱ \Rightarrow$ f در $x=۲$ حد ندارد

$g(x)=۱$



$\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۱$

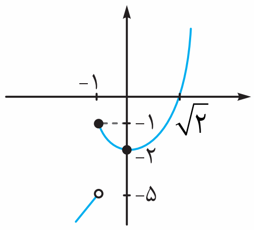
g در $x=۲$ حد دارد.

۴- متوسط

آ) $\dfrac{۳\lim\limits_{x\to ۱} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۱} g(x)-۲\lim\limits_{x\to ۱} h(x)}=\dfrac{۳(۳)}{-۴-۲(۰)}=\dfrac{۹}{-۴}$

ب) $[\lim\limits_{x\to ۱} h(x)]^۳=۰^۳=۰$

۵- متوسط



آ) چون دامنه **f** برابر $\mathbb{R}$ است پس تابع اطراف (-۱) تعریف شده است.

ب)

$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱}(x^۲-۲)=-۱$

$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^-}(۲x-۳)=-۵$

حد چپ و راست برابر نیست پس در $x=-۱$ دارای حد نیست.

پ)

$f(-۱)=x^۲-۲=(-۱)^۲-۲=-۱$

۶- متوسط

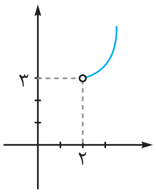
$D_f \Rightarrow x^۲-۳x\geq ۰ \Rightarrow x(x-۳)=۰ \Rightarrow x=۰, x=۳$

x		۰		۳	
f	+		−		+

$D_f:(-\infty,۰)\cup(۳,+\infty)$

با توجه به دامنه **f** حد چپ در $x=۳$ وجود ندارد، پس تابع در $x=۳$ حد ندارد.

۷- متوسط



این تابع می‌تواند حد راست داشته باشد.

۸- متوسط

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{[x]-۳}{|x-۱|}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{۲-۳}{x-۱}=\dfrac{-۱}{۱}=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(۲x-b)=۴-b$

چون دارای حد است پس حد چپ و راست باید برابر باشد پس:

$۴-b=-۱ \Rightarrow ۵=b$

۹- آسان

چون تابع **g** در $x=a$ حد ندارد پس $f+g$ در $x=a$ دارای حد نخواهد بود.

۱۰- دشوار

آ) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\dfrac{۲x^۲+x-۱}{۴x^۲-۱}=\dfrac{۰}{۰}$ مبهم $\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\dfrac{\cancel{(۲x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(۲x-۱)}(۲x+۱)}=\dfrac{\frac{۳}{۲}}{۲}=\dfrac{۳}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}=\dfrac{۰}{۰}$ مبهم $\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}(\cancel{\sqrt{x}-۱})}{\cancel{\sqrt{x}-۱}}=۱$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} ۱+\sin x=۱+\sin\dfrac{\pi}{۲}=۱+۱=۲$

۱۱- متوسط

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}[x]+a=۱+a$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\dfrac{۰}{۰}$ مبهم $\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}$

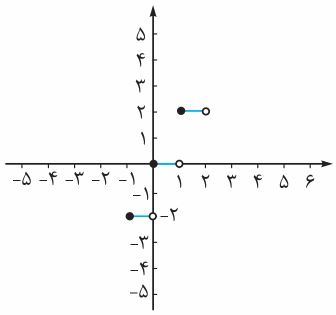
$\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{(x-۱)}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\dfrac{۱}{۲}$

$f(۱)=۱+a$

اگر پیوسته باشد $۱+a=\dfrac{۱}{۲}=۱+a$ پس $a=-\dfrac{۱}{۲}$.

۱۲- دشوار

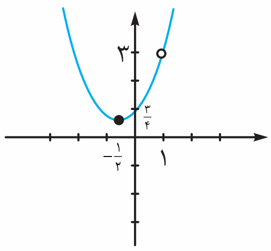
آ) $f(x)=[x]+[x]=۲[x]$



در نقاط صحیح ناپیوستگی دارد $(x\in\mathbb{Z})$

ب) $g(x)=\dfrac{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}{(x-۱)}=x^{۲}+x+۱\ ,\ D_g:x\neq ۱$

در $x=۱$ ناپیوسته است.



$g(x)=x^{۲}+x+۱$

$x_s=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{-۱}{۲}$

$y_s=-\dfrac{\Delta}{۴a}=\dfrac{-(۱-۴)}{۴}=\dfrac{۳}{۴}$

۱۳- متوسط

$\lim\limits_{x\to -۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱} x^{۳}=-۱$

$\lim\limits_{x\to -۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۱}{x}=-۱$

$f(-۱)=-۱$

چون حد راست و حد چپ و مقدار تابع با هم برابرند پس در $x=-۱$ پیوسته

است.

پاسخنامه سؤالات تستی
آزمون تستی پایانی

۱- گزینه «۴» متوسط

$\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^{۲}-۱۸x+۱۶}=\dfrac{۰}{۰}$ مبهم

$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{(۵x-۸)(x-۲)}\times\dfrac{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^{۲}}}$

$=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۸-(۳x+۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۱۲)}$

$\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۸-۳x-۲}{(۵x-۸)(x-۲)(۱۲)}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۶-۳x}{(۵x-۸)(x-۲)(۱۲)}$

$\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۳(۲-x)}{(۵x-۸)(x-۲)(۱۲)}=\dfrac{-۳}{(۲)(۱۲)}=\dfrac{-۱}{۸}$

روش دیگر حل این سوال استفاده از قاعده هوپیتال است.

۲- گزینه «۳» دشوار

$\lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(۴-x)=f(۴-۳^{-})=f(۱^{+})$

برای محاسبه $f(۱^{+})$ از ضابطه $f(۲x-۱)$ باید استفاده کرد.

$\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}(۲x-۱)=۲$

۳- گزینه «۳» آسان

ابتدا شرط‌های تابع چندضابطه‌ای را ساده می‌کنیم:

$f(x)=\begin{cases}x[x] & -۱<x<۱\\ ax+b & x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱\end{cases}$

پس در $x=-۱, x=۱$ باید پیوسته باشد:

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=a+b\\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=x(۰)=۰\\ f(۱)=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=۰$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -۱^{+}} f(x)=-x=+۱\\ \lim\limits_{x\to -۱^{-}} f(x)=-a+b\\ f(-۱)=-a+b\end{array}\right\}\Rightarrow -a+b=۱$

با حل دستگاه دو معادله داریم:

$\begin{cases}a+b=۰\\ -a+b=۱\end{cases}$

$۲b=۱\Rightarrow b=\dfrac{۱}{۲}, a=-\dfrac{۱}{۲}$

۴- گزینه «۲» آسان

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\frac{۰}{۰}\text{ مبهم}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}=$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱-\cos\pi x)\cancel{(۱+\cos\pi x)}}{\cancel{(۱+\cos\pi x)}}=\lim_{x\to ۱^+}(۱-\cos\pi)=۲$$

۵- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{-۲(x-۲)}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

$$f(۲)=۲$$

تابع پیوستگی راست دارد چون حد راست با مقدار تابع برابر است.

۶- گزینه «۱» آسان

تعریف پیوستگی چپ: $\lim_{x\to -۲^-}f(x)=f(-۲)$

$$\lim_{x\to -۲^-}\frac{۸+x^۳}{|x+۲|}=\lim_{x\to -۲^-}\frac{(۲+x)(۴-۲x+x^۲)}{-(x+۲)}=\frac{۱۲}{-۱}=-۱۲$$

$$f(-۲)=a$$

پس: $a=-۱۲$

۷- گزینه «۳» متوسط

$$f(x)=\frac{f-g+f+g}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{f-g}{۲}+\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{f+g}{۲}\\ =\frac{۵}{۲}+\frac{۰}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{f-g}{۲}+\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{f+g}{۲}\\ =\frac{۳}{۲}+\frac{۲}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵\end{cases}$$

۸- گزینه «۳» آسان

در $x=۲$ باید پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\frac{۰}{۰}\text{ مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}=$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳\cancel{(x-۲)}(۴)}{\cancel{(x-۲)}(x+۱)}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

از هوپیتال برای رفع ابهام هم می‌توانستیم استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to ۲^-}ax-۱=۲a-۱$$

$$f(۲)=۲a-۱$$

شرط پیوستگی $\qquad ۲a-۱=۴$

$$۲a=۵\Rightarrow a=۲/۵$$

۹- گزینه «۳» متوسط

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۰}{۰}\text{ مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}$$

$$\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)\cancel{(\sqrt[۳]{x}+۲)}(\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{۶\cancel{(۲+\sqrt[۳]{x})}}$$

$$\lim_{x\to -۸}\frac{(-۶)(۱۲)}{۶}=-۱۲$$

هوپیتال روش دیگر حل این سوال است.

۱۰- گزینه «۴» آسان

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^\pm}f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^\pm}\frac{(۲\sin x+۱)(\sin x-۱)}{۱-\sin^۲x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^\pm}\frac{(۲\sin x+۱)\cancel{(\sin x-۱)}}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^\pm}\frac{-(۲\sin x+۱)}{۱+\sin x}=\frac{-۳}{۲}=-۱/۵$$

$$f(\frac{\pi}{۲})=a=-۱/۵$$

۱۱- گزینه «۲» متوسط

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\frac{۰}{۰}\text{ مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{۲x+\sqrt{۳x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲\sqrt{x}-۵)(\sqrt{x}-۱)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{۴x^۲-۳x-۱}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(۲\sqrt{x}-۵)\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{(۴x+۱)\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)}$$

$$=\frac{(-۳)(۲+۲)}{(۵)(۲)}=\frac{-۱۲}{۱۰}=\frac{-۶}{۵}=-۱/۲$$

هوپیتال روش دیگر حل این سوال است.

۱۲- گزینه «۳» آسان

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\frac{[(-۲)^-]+۳}{(-۲)^-+۲}=\frac{\text{مطلق }۰}{۰^-}=۰$$

۱۳- گزینه «۴» دشوار

این سوال در سال ۹۹ بحث‌برانگیز شد. ابتدا بدانیم که $x\in[-۲,۲]$ و در این بازه نقاط صحیح نقاط ناپیوستگی $[x]$ را تشکیل می‌دهند اما با توجه به $\sin\pi x$ که در آن ضرب شده است و $\sin\pi,\sin-\pi,\sin۲\pi,\sin-۲\pi$ همان صفر هستند پس براکت در نقاط صحیح صفر می‌شود و درنتیجه پیوسته است. اما در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه را به دلیل آنکه پیوستگی راست و پیوستگی چپ دارند نقاط ناپیوستگی بیان می‌کند پس باید گزینه ۲ جواب مسئله باشد اما سازمان سنجش سال ۹۹ جواب را گزینه ۴ اعلام کرد و سروته بازه را پیوسته درنظر گرفت.

۱۴- گزینه «۱» دشوار

ابتدا بازه‌های شرط را ساده کنید:

$$-1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2$$

$$\Rightarrow x-1\ge 1 \text{ یا } x-1\le -1 \Rightarrow x\ge 2 \text{ یا } x\le 0$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ;0<x<2\\ x^2+ax+b & ;x\ge 2 \text{ یا } x\le 0\end{cases}$$

چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است پس باید در $x=2\,,x=0$ نیز پیوسته باشد

پس:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}(x-1)(0)=0\\ \lim_{x\to 0^-} 0+0+b=b\\ f(0)=0+0+b\end{cases} \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}(x^2+ax+b)=4+2a+b$$

$$\lim_{x\to 2^-}(x-1)(1)=1$$

$$f(2)=4+2a+b$$

$$\Rightarrow 2a+b+4=1 \Rightarrow 2a+b=-3$$

۱۵- گزینه «۱» متوسط

تابع جز صحیح در نقاطی که داخل آن عددی صحیح شود ناپیوسته است.چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است باید $b=0$ باشد تا جز صحیح نداشته باشیم.

$$b=0 \Rightarrow f(x)=-2a \xrightarrow{\text{تابع ثابت}} f(b)=-2a$$

$$\frac{a}{f(b)}=\frac{a}{-2a}=\frac{-1}{2}$$

۱۶- گزینه «۲» دشوار

چون صورت به ازای $x=2$، صفر شده پس مخرج هم باید صفر باشد.

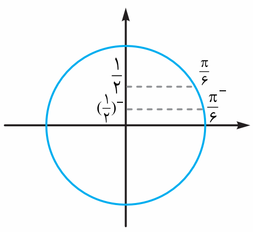
$$\xrightarrow{x=2} ax+b=0 \Rightarrow 2a+b=0 \Rightarrow b=-2a$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}\times\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(ax-2a)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{a\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{3x-2})}=\frac{1}{4a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=-2(\frac{1}{2})=-1$$

۱۷- گزینه «۱» متوسط

از روی دایره مثلثاتی داریم:



پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-}[2\sin\frac{\pi^-}{6}-1]=[2(\frac{1}{2})^- -1]$$

$$=[1^-]-1=0-1=-1$$

۱۸- گزینه «۳» دشوار

$$f \text{ معادله سهمی}: y=a(x-x_s)^2+y_s \Rightarrow 0=a(0-2)^2+1$$

$$0=4a+1 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

$$f(x)=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1$$

$$g \text{ معادله خط}: \text{نقطه } \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \text{ و نقطه } \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+1$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x-2)^2+1+-\frac{1}{4}x+1}{4-x}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}x^2+x-1+1-\frac{1}{4}x+1}{4-x}$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+1}{4-x}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x+1)(x-4)}{4-x}$$

$$=+\frac{1}{4}(x+1)=\frac{5}{4}$$

۱۹- گزینه «۴» متوسط

ابتدا تکلیف قدرمطلق و براکت‌ها را مشخص می‌کنیم:

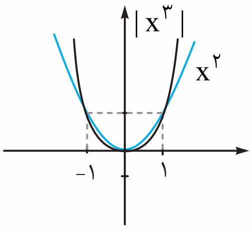
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)+(-1)}{x-0}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1-1}{x}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x}=1$$

۲۰- گزینه «۳» دشوار

ابتدا $|x^3|=x^2$ را ساده‌تر می‌کنیم

$$x^2|x|=x^2 \Rightarrow x^2|x|-x^2=0 \Rightarrow x^2(|x|-1)=0 \Rightarrow x=0,1,-1$$

همچنین با توجه به نکته رسم $|x^3|$ و رسم x^2 داریم:



$$f(x)=\begin{cases}|x|+[-x] & x\in(-1,1)-\{0\}\\ 1+\cos\pi x & x=0,1,-1\\ [x^2]-[x] & ;x<-1 \text{ یا } x>1\end{cases}$$

ضابطه سوم در تمام **x**های منفی و همچنین تمام **x**هایی که در آن x^2 صحیح و **x** غیرصحیح است، ناپیوسته است. پس این تابع در بی شمار نقطه ناپیوسته است.

پاسخنامه
سؤالات تستی
آزمون پلاس

۱- گزینه «۱»

چون در پیوستگی حد چپ و راست باید برابر باشند پس باید **a** ریشه مضاعف زیر رادیکال و همچنین **a** باید ریشه مخرج کسر باشد.

$$\Delta=۰ \Rightarrow (m-۱)^۲-۴(۳)(m-۴)=۰ \Rightarrow m^۲-۲m+۱-۱۲m+۴۸=۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۱۴m+۴۹=۰ \Rightarrow (m-۷)^۲=۰ \Rightarrow m=۷$$

$$a \text{ ریشه مخرج } \Rightarrow a^۳+a^۲=۰ \Rightarrow a^۲(a+۱)=۰ \Rightarrow a=۰, a=-۱$$

$$\lim_{x\to(-۱)^\pm}\frac{\sqrt{۳x^۲+۶x+۳}}{|x^۳+۱|}=\lim_{x\to(-۱)^\pm}\frac{\sqrt{۳}\sqrt{x^۲+۲x+۱}}{|x^۳+۱|}=$$

$$\lim_{x\to(-۱)^\pm}\frac{\sqrt{۳}\,|\cancel{x+۱}|}{|\cancel{x+۱}|\,|x^۲-x+۱|}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$f(-۱)=\frac{۲\sin b}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin b=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow b=\frac{\pi}{۳}$$

۲- گزینه «۱»

a باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد پس $\Delta=۰$ است.

$$\Delta=۰ \Rightarrow (m+۳)^۲-۴(۳m)=۰ \Rightarrow m^۲+۶m+۹-۱۲m=۰ \Rightarrow$$

$$m^۲-۶m+۹=۰ \Rightarrow (m-۳)^۲=۰ \Rightarrow m=۳$$

$$\lim_{x\to a^\pm}\frac{\sqrt{۶x^۲+۶x+\frac{۳}{۲}}}{۲x^۳+a^۲}$$

همچنین حتماً **a** ریشه مخرج نیز بوده است پس:

$$۲a^۳+a^۲=۰ \Rightarrow a^۲(۲a+۱)=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to a^\pm}\frac{\sqrt{۶x^۲+۶x+\frac{۳}{۲}}}{|۲x^۳+\frac{۱}{۴}|}=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^\pm}\frac{\sqrt{۶}\sqrt{x^۲+x+\frac{۱}{۴}}}{۲|x^۳+\frac{۱}{۸}|}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^\pm}\frac{\sqrt{۶}\,|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x+\frac{۱}{۲}|\,|x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}|}=\lim_{x\to(-\frac{۱}{۲})^\pm}\frac{\sqrt{۶}}{۲|\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}|}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲\tan b}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲}\tan b=\frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \tan b=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow b=\frac{\pi}{۶}$$

۳- گزینه «۴»

با کمی دقت متوجه می‌شویم که $x=۱$ ریشه صورت است پس حتماً ریشه مخرج نیز بوده است.

$$a+b=۰ \Rightarrow a=-b$$

$$\lim_{x\to۱}\frac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{-bx+b}=\lim_{x\to۱}\frac{\cancel{b}(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-۱)}{\cancel{b}(-x+۱)}\times\frac{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱}{\underbrace{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-۱}_{۲}}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲-\sqrt[۳]{x}-۱}{(۱-x)\times۲}=\lim_{x\to۱}\frac{۱-\sqrt[۳]{x}}{۲(۱-x)}\times\frac{(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{\underbrace{(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}_{۳}}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(۱-x)}{۲(۱-x)\times۳}=\frac{۱}{۶}$$

از قاعده هوپیتال این سوال راحت‌تر رفع ابهام می‌شود.

۴- گزینه «۴»

اگر تابع را در $x=۳$ یعنی $n=۳$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to۳^+}f(x)=\lim_{x\to۳^+}|[-x]-x|=|[-(۳^+)]-۳|=|-۴-۳|=۷$$

$$f(۳)=|[-۳]-۳|=|-۳-۳|=۶$$

پس تابع در $x=۳$ ناپیوسته است و **n** نمی‌تواند فرد باشد.

اگر تابع را در $x=۲$ و $x=-۲$ بررسی کنیم:

$$\left|\begin{array}{l}\lim_{x\to۲^+}f(x)=k-۲+۲=k\\ \lim_{x\to۲^-}f(x)=|[(-۲^-)]-۲|=|[(-۲^+)]-۲|=|-۲-۲|=۴\\ f(۲)=k\Rightarrow k=۴\end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=k+۲-۲=k$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=|[-(-۲^-)]+۲|=|[۲^+]+۲|=|۲+۲|=۴$$

$$f(-۲)=k\Rightarrow k=۴$$

پس در **n** زوج پیوسته است.

۵- گزینه «۱»

تابع در غیر صحیح پیوسته می‌باشد، بنابراین باید در اعداد صحیح پیوستگی را بررسی کرد:

فرض کنیم: $x=k$ و $k>0$ و زوج

$$\lim_{x\to k^+} f(x)=\lim_{x\to k^+}|x-[x]|=|k-k|=0$$
$$\lim_{x\to k^-} f(x)=\lim_{x\to k^-}|x-[x-a]|=|k-[k-a]|$$
$$|k-[k-a]|=0\Rightarrow k-[k-a]=0\Rightarrow [k-a]=k$$
$$k\le k-a<k+1\Rightarrow 0\le -a<1\Rightarrow -1<a\le 0$$

فرض مسأله $a<-1$ می‌باشد بنابراین هیچ عضوی برای $[a]$ وجود ندارد.

۶- گزینه «۲»

ابتدا معادلات خطوط را نوشته و تابع را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}x & x<0\\ -\frac{\pi}{2}x & x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=\frac{-\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{-\pi^2}{4}$$

$$\lim_{x\to (-\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\frac{2}{\pi}\times\frac{-\pi}{2}=-1$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sin x}{|f(x)|}+\lim_{x\to (-\frac{\pi}{2})^+}\frac{|f(x)|}{\sin x}=\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}}+\frac{1}{-1}=\frac{4}{\pi^2}-1$$

۷- گزینه «۱»

با توجه به بازه $[1,5]$ حتماً تابع در $x=1$ پیوستگی راست دارد پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|(x-1)(x+2)|}{a(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{a(1-x)}=\frac{3}{-a}$$
$$f(1)=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$$

درنتیجه: $\frac{3}{-a}=-1 \Rightarrow a=3$

همچنین این تابع در $x=5$ پیوستگی چپ دارد پس:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}\frac{|(x-1)(x+2)|}{a(1-x)}=\frac{28}{-12}=\frac{7}{-3}$$

$$f(5)=b(5-[-5])=b(10)=10b\Rightarrow 10b=\frac{-7}{3}\Rightarrow b=-\frac{7}{30}$$

درنتیجه $ab=3\times-\frac{7}{30}=-0/7$

۸- گزینه «۱»

تابع f در $x=1$ ناپیوسته است چون مقدار تابع در $x=1$ وجود ندارد پس $x=1$ ریشه صورت کسر هم بوده است که ابهام اتفاق افتاده است در نتیجه:

$$x=1\Rightarrow 1+a+b=0\Rightarrow a+b=-1$$

همچنین چون سوال گفته $x=1$ ریشه $5-a+b=0$ است درنتیجه $5=a-b$.

از حل دستگاه دومعادله خواهیم داشت $a=2, b=-3$ پس:

$$[\frac{-3-4}{3}]=[-\frac{7}{3}]=[-2/\ldots]=-3$$

۹- گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 2^+} a[x]+b[-x]=5\Rightarrow 2a-3b=5$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}+b=-1+b=3\Rightarrow b=4\xrightarrow{\text{جایگذاری}}2a-12=5$$

$$2a=17\Rightarrow a=\frac{17}{2}$$

۱۰- گزینه «۲»

$$\frac{1+2a-1-2a}{a+1-a-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\xrightarrow[\text{بخش‌پذیر است.}\ (x-1)]{\text{صورت و مخرج بر}}$$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3}+2ax^2-x-2a & x-1\\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3}+x^2 & x^2+(2a+1)x+2a\\ \cline{1-1}
\cancel{(2a+1)x^2}-x-2a & \\
-\cancel{(2a+1)x^2}+(2a+1)x & \\ \cline{1-1}
2ax-2a & \\
-2ax+2a & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{ax^2}+x(1-a)-1 & x-1\\ \cline{2-2}
-\cancel{ax^2}+ax & ax+1\\ \cline{1-1}
x-1 & \\
-x+1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+(2a+1)x+2a)}{\cancel{(x-1)}(ax+1)}=\frac{1+2a+1+2a}{a+1}=\frac{4a+2}{a+1}=1$$

$$4a+2=a+1$$

$$3a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

۱۱- گزینه «۳»

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{a-۲}{۴+۲}=\frac{a-۲}{۶}$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{a-۱}{۴+۱}=\frac{a-۱}{۵}$$

$$f(۲)=\frac{a-۲}{۶}$$

به دلیل پیوستگی $\frac{a-۲}{۶}=\frac{a-۱}{۵}$

$$۵a-۱۰=۶a-۶\Rightarrow -۴=a$$

۱۲- گزینه «۴»

$x=-۱$ ریشه صورت است پس:

$$\sqrt{-a+b}+۱=۰\Rightarrow\sqrt{-a+b}=۱\Rightarrow -a+b=۱$$

با استفاده از رفع ابهام داریم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{ax+b}+x}{\sqrt{-x}-x^۲}\times\frac{\sqrt{ax+b}-x}{\sqrt{ax+b}-x}\times\frac{\sqrt{-x}+x^۲}{\sqrt{-x}+x^۲}$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{(ax+b-x^۲)(۲)}{((-x)-x^۴)(۲)}=\lim_{x\to -۱}\frac{-x^۲+ax+b}{-x-x^۴}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{(x+۱)}(-x+۱+a)}{-x\cancel{(x+۱)}(x^۲-x+۱)}=\frac{۲+a}{۳}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a=۲,b=۳$$

$$a-۲b=۲-۶=-۴$$

۱۳- گزینه «۲»

$$\lim_{x\to ۳^+} x-[x]+a\sin\frac{\pi[x]}{۲}=۳-۳+a\sin\frac{۳\pi}{۲}=-a$$

$$\lim_{x\to ۳^-} x-[x]+a\sin\frac{\pi[x]}{۲}=۳-۲+a\sin\pi=۱$$

$$f(۳)=۳-۳+a\sin\frac{۳\pi}{۲}=-a$$

$$a=-۱$$

۱۴- گزینه «۲»

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+} a\log_۲(x+۱)=۲a$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-} ax+۲^{x-۳}=۳a+۲^۰=۳a+۱$$

$$f(۳)=a$$

بنا به تعریف پیوستگی $۳a+۱=۲a$

$$a=-۱$$

$$f(۲)=-۱x+۲^{x-۳}=-۲+۲^{-۱}=-۲+\frac{۱}{۲}=-۱/۵$$

۱۵- گزینه «۲»

$$f(x)=a[x]+b([x]+۱)=a[x]+b[x]+b=(a+b)[x]+b$$

چون روی $\mathbb{R}$ پیوسته است باید ضریب $[x]$ صفر باشد.

$$a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

$$f(x)=b\xrightarrow{\text{تابع ثابت}}f(a)=b$$

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{b}{a}=\frac{b}{-b}=-۱$$

۱۶- گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\pi^+}\left[\frac{۲}{۲\cos x+۳}\right]=\lim_{x\to\pi^+}\left[\frac{۲}{۲(-۱^+)+۳}\right]=\left[\frac{۲}{۱^+}\right]=[۲^-]=۱$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\left[\frac{۲}{۲\cos x+۳}\right]=\lim_{x\to\pi^-}\left[\frac{۲}{۲(-۱^+)+۳}\right]=\left[\frac{۲}{۱^+}\right]=[۲^-]=۱$$

۱۷- گزینه «۴»

$$\lim_{x\to ۳^-} ax-۳a-\frac{۳}{۸}=۳a-۳a-\frac{۳}{۸}=-\frac{۳}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳}\times\frac{۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-(x-\sqrt{x+۱})}{(x-۳)(۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}})}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-x+\sqrt{x+۱}}{(۳-x)(۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}})}\times\frac{۱-x-\sqrt{x+۱}}{۱-x-\sqrt{x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-۲x+x^۲-x-۱}{(x-۳)(۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}})(۱-x-\sqrt{x+۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x(x-۳)}{(x-۳)\times۲\times(-۴)}=\frac{-۳}{۸}$$

حد چپ و راست به ازای هر مقدار a با هم برابرند.

۱۸- گزینه «۱»

$$\lim_{x\to -۲^+}(۴x+a^۳)[۳x]=(-۸+a^۳)(-۶)=۴۸-۶a^۳$$

$$\lim_{x\to -۲^-}(۴x+a^۳)[۳x]=(-۸+a^۳)(-۷)=۵۶-۷a^۳$$

$$f(-۲)=(-۸+a^۳)(-۶)=۴۸-۶a^۳$$

بنا به شرط پیوستگی:

$$۴۸-۶a^۳=۵۶-۷a^۳\Rightarrow a^۳=۸\Rightarrow a=۲$$

۱۹- گزینه «۲»

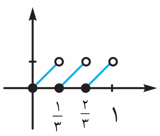
$$f(۳)=۶\Rightarrow ۲a-b=۶$$

$$\lim_{x\to ۳^\pm} f(x)=۵\Rightarrow\lim_{x\to ۳^\pm}\frac{a(x-۳)(x+۲)}{(۳-x)}=-a(۵)=۵\Rightarrow a=-۱$$

پس: $\Rightarrow ۲(-۱)-b=۶\Rightarrow b=-۸$

۲۰- گزینه «۲»

با نمودار $۳x-[۳x]$ آشنا هستیم.



پس نقاط ناپیوستگی آن در $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ است.