

پسرانه علوی شرق

تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۵/۱۸

کد اجرا: نامشخص

زمان برگزاری: ۸۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: معاله درجه ۲ و معادلات گویا و گنگ

۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه $(-۲, -۶)$ می‌گذرد. $f(-۱)$ کدام است؟

- ① -۸ ② -۷ ③ -۵ ④ -۴

۲- معادله $x^2 - (k+1)x - 1 = 0$ به ازای تمام مقادیر k :

- ① دو ریشه مثبت دارد. ② دو ریشه ی منفی دارد. ③ دو ریشه ی مختلف علامت دارد. ④ دو ریشه ی مضاعف دارد.

۳- کدام یک از معادلات زیر فقط دارای دو ریشه ی قرینه می‌باشند؟

- ① $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ ② $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ ③ $x^4 - x^2 - 1 = 0$ ④ $x^4 - 2x^2 + 5 = 0$

۴- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - (a+1)x - 6 + 2a = 0$ برابر ۱ باشد. ریشه ی دیگر کدام است؟

- ① ۲ ② ۵ ③ -۳ ④ -۲

۵- ریشه‌های معادله ی درجه ی دوم $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0$ دو عدد طبیعی متوالی است، مقدار m کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

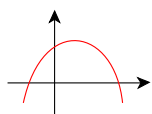
۶- اگر قدر مطلق تفاضل ریشه‌های تابع $f(x) = -x^2 + x - m$ برابر ۳ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

- ① بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است. ② کم‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است. ③ بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است. ④ کم‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است.

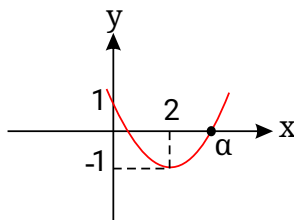
۷- اگر عبارت $y = ax(x+1) + 1$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۲ ④ صفر

۸- ضابطه ی تابع f با نمودار مقابل، مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟



- ① $y = -x^2 + 5x - 7$ ② $y = -2x^2 + 3x + 5$ ③ $y = x^2 - 3x + 2$ ④ $y = -3x^2 - 2x + 4$



۹- باتوجه به شکل روبه‌رو که نمودار یک تابع درجه ی دو را نشان می‌دهد. مقدار α کدام است؟

- ① ۳ ② $\frac{5}{2}$ ③ $2 + \sqrt{2}$ ④ $\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$

۱۰- به ازای کدام مقدار a ، $x = 0$ یک جواب معادله $\frac{x+a}{3x+6} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{a+2}{4-x^2}$ است؟

- ① صفر ② ۱ ③ -۱ ④ ۲



۱۱- در معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 4 = 0$ حاصل $x_1^3 - 2x_1^2 + 4x_1$ کدام می‌تواند باشد؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم هستند).

- ① -۱۶ ② ۰ ③ ۱۶ ④ -۳۲

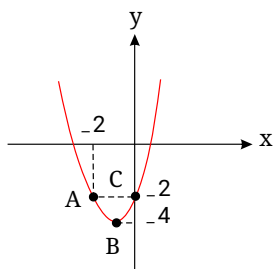
۱۲- معادله $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$ چند ریشه دارد؟

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۳- اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x ها را در دو نقطه، به طول‌های ۱- و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ① $\frac{3}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ ۳ ④ -۳

۱۴- نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ کدام است؟



- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۱۵- اگر α, β ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 6x + 9} - 2 = \frac{x+1}{x-3}$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام گزینه است؟

- ① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $-\frac{9}{8}$ ④ $-\frac{8}{9}$

۱۶- ۵۰ گرم از محلولی با غلظت ۶۰ درصد داریم. چند گرم ماده حل‌شدنی به آن اضافه کنیم تا غلظت محلول به ۸۰ درصد برسد؟

- ① ۱۰ ② ۲۰ ③ ۴۰ ④ ۵۰

۱۷- اگر نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) فقط از ناحیه اول محورهای مختصات عبور نکند، علامت a ، b و c چگونه‌اند؟

- ① $a < 0$ ، $b < 0$ و $c \geq 0$ ② $a < 0$ ، $b \geq 0$ و $c < 0$ ③ $a > 0$ ، $b \leq 0$ و $c > 0$ ④ $a < 0$ ، $b < 0$ و $c \leq 0$

۱۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (m-2)x + m+1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت است؟

- ① $-1 < m < 0$ ② $m < 0$ ③ $2 < m < 8$ ④ $m > 8$

۱۹- کدام گزینه در خصوص ریشه یا ریشه‌های معادله $\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x-2} = \frac{1}{2}$ درست است؟

- ① ریشه ندارد. ② یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

- ③ یک ریشه مثبت دارد. ④ دو ریشه منفی دارد.

۲۰- اگر $1 = 2a + \sqrt{3a+16}$ باشد، عدد $4a+9$ ، کدام است؟

- ① ۴ ② ۶ ③ ۱۵ ④ ۲۱

۲۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی $y = (-m+1)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x ها قرار دارد؟

- ① $2 < m < 5$ ② $-2 < m < 5$ ③ $m < 5$ ④ $-2 < m$



۲۲- اگر ریشه‌های معادله $x^2 - bx + c = 0$ برابر $\sqrt{3} \pm 1$ باشند، آن گاه حاصل $b^2 - c^2$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

۲۳- اگر تساوی $\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 - x + 1} + \frac{c}{x + 1}$ به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، کدام گزینه نتیجه می‌شود؟ ($x \neq -1$)

- ۱ (۱) $b + c = 1$ (۲) $b - c = 0$ (۳) $2b = c$ (۴) $3b = c$

۲۴- معادله $\sqrt{\sqrt{x+3} - x} = 1 + \sqrt{1-x}$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) یک جواب مثبت (۲) یک جواب منفی (۳) دو جواب (۴) بدون جواب

۲۵- کدام معادله زیر دارای دو جواب $2 - \sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ است؟

- ۱ (۱) $x^2 - 5x + 2\sqrt{3} = 0$ (۲) $x^2 - 2x + 2\sqrt{3} = 0$ (۳) $x^2 - 2x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$ (۴) $x^2 - 5x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$

۲۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر m تابع $y = x^2 - mx + m - 1$ از ناحیه سوم نمی‌گذرد؟

- ۱ (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $\{2\} - [1, +\infty)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۲۷- معادله $k = \sqrt{6k + 8}$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

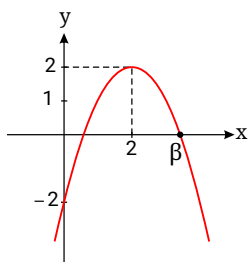
۲۸- اگر شی‌ای از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h قرار می‌گیرد ($t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$). پس از ۱ ثانیه شی در چه ارتفاعی قرار دارد؟

- ۱ (۱) ۵۰ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴) ۳۵

۲۹- پایین‌ترین نقطه سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + b$ بر بالاترین نقطه سهمی به معادله $y = -x^2 + ax + 3$ منطبق است. فاصله نقطه برخورد دو سهمی با محور عرض‌ها از یکدیگر چقدر است؟

- ۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

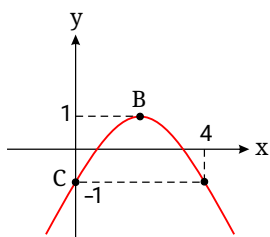
۳۰- در شکل مقابل که نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx - 2$ است، مقدار β کدام است؟



- ۱ (۱) $2 - \sqrt{2}$ (۲) $4 - \sqrt{2}$ (۳) $2 + \sqrt{2}$ (۴) $4 + \sqrt{2}$



۳۱- نمودار تابع درجه دوم $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. اگر α و β ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ باشد، حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ کدام است؟



- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۳۲- سهمی $y = mx^2 + (m+1)x - 1$ همواره پایین محور طول‌هاست. به جای m چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۳۳- فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ باشد. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان تشکیل داد به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله دو واحد بیشتر باشد؟

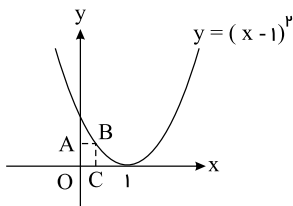
- ① ۱۴ ② ۱۵ ③ ۱۶ ④ ۱۸

۳۴- ریشه‌های معادله $x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 6 - 2x$ چقدر اختلاف دارند؟

- ① ۸ ② ۴ ③ ۱۴ ④ ۲

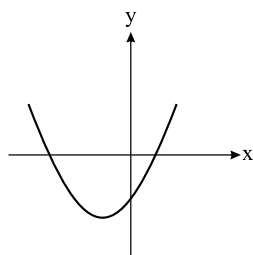
۳۵- به ازای چند مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3 + 2a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- ① هیچ مقدار a ② تمام مقادیر a ③ ۱ ④ ۲



۳۶- با توجه به شکل مقابل کمترین محیط مستطیل $OABC$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ ۲ ④ ۳



۳۷- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. کدام گزینه درست است؟ ($\Delta = b^2 - 4ac$)

- ① $\frac{\Delta}{c} < 0, a \cdot b < 0$ ② $\frac{\Delta}{c} > 0, a \cdot b < 0$ ③ $\frac{\Delta}{c} < 0, a \cdot b > 0$ ④ $\frac{\Delta}{c} > 0, a \cdot b > 0$

۳۸- معادله $x^2\sqrt{2-x} + x\sqrt{4-x^2} = 0$ چند ریشه دارد؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر



۳۹- معادله درجه دومی که هر یک از ریشه‌های آن از دو برابر ریشه‌های معادله $(x - 3)(x + 2) = 5$ یک واحد بیشتر باشد، کدام است؟

④ $x^2 + 4x - 41 = 0$

③ $x^2 - 4x - 41 = 0$

② $x^2 + 4x + 21 = 0$

① $x^2 - 4x - 21 = 0$

۴۰- اگر $f = \{(1, 2)(3, 1)(2, 4)(0, -1)\}$ و $g = \{(-3, 2)(2, 1)(3, -1)\}$ باشد و $(2)(3g + 2f^{-1}) = a$ باشد آن‌گاه معادله $|x| + [4x] = a$ چند جواب دارد؟

④ ۴

③ ۲

② ۱

① صفر



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$(1, 0) \in f \Rightarrow 0 = a + b + c \quad (1)$$

$$(0, -6) \in f \Rightarrow -6 = c \quad (2)$$

$$(-2, -6) \in f \Rightarrow -6 = 4a - 2b + c \quad (3)$$

حال از دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) و (۳) مقادیر a, b, c را مشخص می‌کنیم:

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = -6 \\ 4a - 2b + c = -6 \end{cases} \xrightarrow{c=-6} \begin{cases} a + b + (-6) = 0 \\ 4a - 2b + (-6) = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 4$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = -8$$

۲ - گزینه ۳

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{(k^2 + 1)^2} < 0$$

چون $\frac{c}{a} < 0$ ، بنابراین معادله‌ی فوق دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت است.

۳ - گزینه ۳

$$ax^2 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} at^2 + bt + c = 0$$

اگر Δ معادله‌ی فوق مثبت باشد، معادله دو ریشه دارد. اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. لذا با توجه به این که $x^2 = t$ ، فقط جواب مثبت آن قابل قبول است که دو ریشه‌ی قرینه برای x حاصل می‌شود. پس اگر در معادله‌ی فوق $\frac{c}{a} < 0$ باشد فقط دو ریشه‌ی قرینه دارد. که این شرط فقط در گزینه ی (۳) وجود دارد.

۴ - گزینه ۱ چون یکی از ریشه‌ها ۱ است. پس مجموع ضرایب برابر صفر و ریشه‌ی دیگر این معادله $\frac{-6+2a}{2}$ است. پس $x = 1$ را در معادله، صدق می‌دهیم.

$$2 - (a + 1) - 6 + 2a = 0 \Rightarrow -5 + a = 0 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \text{ریشه‌ی دیگر} \Rightarrow x_2 = \frac{-6+2a}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

۵ - گزینه ۳ قدر مطلق تفاضل دو عدد طبیعی برابر یک می‌باشد.

$$|x' - x''| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|1|} = 1 \Rightarrow \sqrt{(2m+1)^2 - 4(m^2+3)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{4m^2 + 1 + 4m - 4m^2 - 12} = 1 \Rightarrow \sqrt{4m - 11} = 1$$

$$\Rightarrow 4m - 11 = 1 \Rightarrow 4m = 12 \Rightarrow m = 3$$

۶ - گزینه ۱ اگر ریشه‌ها را x_1 و x_2 در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\text{قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها} = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - 4(-1)(-m)}}{|-1|} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - 4m} = 3 \Rightarrow 1 - 4m = 9 \Rightarrow 4m = -8 \Rightarrow m = -2$$

پس معادله‌ی تابع به صورت $f(x) = -x^2 + x + 2$ است.

چون ضریب x^2 ، (a) منفی است بنابراین تابع ماکسیمم دارد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، همان عرض راس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4a}$ می‌باشد.

$$\text{عرض ماکسیمم} = \frac{4(-1)(2) - 1}{4(-1)} = \frac{9}{4}$$

۷ - گزینه ۲ برای آن که عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت یا بالای محور x ها باشد، باید دو شرط زیر همواره برقرار باشد:

$$1) \Delta < 0 \quad 2) a > 0$$

ابتدا عبارت داده‌شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$y = ax(x + 1) + 1 \Rightarrow y = ax^2 + ax + 1$$

حال برای آن که عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow a(a - 4) < 0 \Rightarrow 0 < a < 4 \\ a > 0 \Rightarrow a > 0 \end{cases}$$

اشتراک دو شرط فوق برابر $0 < a < 4$ می‌شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نکته عبارت حتماً باید درجه‌ی دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a = 0$ باشد نیز عبارت $y = ax^2 + ax + 1$ برابرعدد مثبت یک خواهد شد. پس $a = 0$ نیز درست است:



$$y = ax^2 + ax + 1 \xrightarrow{a=0} y = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$(0 < a < 4) \cup \{0\} = 0 \leq a < 4$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با:

که در بازه فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

۸ - گزینه ۲ چون شکل دارای Max است ضریب x^2 باید منفی باشد بنابراین گزینه ی سوم حذف می شود. تابع درجه دوم محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت و منفی قطع کرده است بنابراین حاصلضرب ۲ ریشه یعنی $\frac{c}{a}$ باید منفی باشد. بنابراین گزینه ی اول حذف می شود و چون قدرمطلق ریشه ی مثبت از قدرمطلق ریشه ی منفی بزرگتر است جمع ۲ ریشه باید مثبت باشد یعنی

$$-\frac{b}{a} \text{ باید مثبت باشد بنابراین گزینه ی چهارم حذف می شود.}$$

۹ - گزینه ۳ صورت کلی یک تابع درجه ی دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می باشد و نقطه ی $\left| -1 \right|$ رأس سهمی است که در تابع صدق می کند و طولش از رابطه ی $x_s = \frac{-b}{2a}$ به دست می آید در

ضمن نقطه ی $\left| 1 \right|$ نیز روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می کند.

$$x_s = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow 4a = -b \text{ و } \left| -1 \right| \xrightarrow{\text{صدق}} -1 = 4a + 2b + c \text{ و } \left| 1 \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = c$$

$$-1 = 4a + 2b + c \xrightarrow{\frac{4a=-b}{c=1}} -1 = -b + 2b + 1 \rightarrow b = -2, a = \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع درجه ی دوم به صورت $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ است و باتوجه به شکل، $x = \alpha$ ریشه ی بزرگتر معادله ی $y = 0$ است.

$$y = 0 \xrightarrow{\times 2} x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8$$

$$\text{ریشه ی بزرگتر} = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

۱۰ - گزینه ۱ $x = 0$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می کند.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{a}{6} + \frac{1}{2} = \frac{a+2}{4} \xrightarrow{\times 12} 2a + 6 = 3a + 6 \rightarrow a = 0$$

۱۱ - گزینه ۴

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

$$\text{ریشه ی معادله است در معادله صدق می کند} \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1^2 = -2x_1 + 4$$

$$\Rightarrow x_1^3 = -2x_1^2 + 4x_1$$

در عبارت خواسته شده به جای x_1^3 عبارت معادل را قرار می دهیم:

$$x_1^3 - 2x_1^2 + 4x_2 = -2x_1^2 + 4x_1 - 2x_1^2 + 4x_1 - 2x_1^2 + 4x_2 = -2(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2)$$

$$= -2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 4(x_1 + x_2) = -2(4 + 8) + 4(-2) = -32$$

تذکر: با جابه جا کردن x_1 و x_2 در محاسبه عبارت داده شده می توان به جواب ۲۲ - رسید.

۱۲ - گزینه ۲

$$\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2 + \sqrt{x-5} = 13-x \rightarrow \sqrt{x-5} = 11-x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-5 = 121+x^2-22x$$

$$\rightarrow x^2 - 23x + 126 = 0 \rightarrow (x-14)(x-9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 14 \text{ (زیر رادیکال را منفی می کند)} \\ x = 9 \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین این معادله دارای یک ریشه می باشد.

۱۳ - گزینه ۱ رأس سهمی روی نیمساز ربع اول ($y = x$) قرار دارد، بنابراین مختصات آن به صورت $S \left(\frac{\alpha}{\alpha} \right)$ است و چون سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول ۱- و ۳ قطع کرده است، طول

رأس سهمی دقیقاً وسط ۱- و ۳ است.



$$x_S = \frac{-1+3}{2} = 1 \rightarrow S \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$\text{معادله سهمی: } y = a(x-3)(x+1) \xrightarrow{S \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right.} 1 = a(-2)(2) \rightarrow -4a = 1 \rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

$$\text{معادله سهمی: } y = \frac{-1}{4}(x-3)(x+1) \xrightarrow{x=0} y = \frac{-1}{4}(-3)(1) = \frac{3}{4}$$

توجه کنید اگر یک سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، می‌توان معادله آن را به صورت $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ نشان داد.

۱۴ - گزینه ۲ طول نقطه B یا همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه‌ی هم عرض A و C است.

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

و توجه کنید صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{c} -2 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = 4a - 2b + c \\ B \left| \begin{array}{c} -1 \\ -4 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -4 = a - b + c \end{array} \right\} \xrightarrow{c=-2} \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ a - b = -2 \end{cases} \rightarrow a = 2, b = 4$$

$$C \left| \begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = c$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = 2x^2 + 4x - 2$ است. برای بدست آوردن مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 4x - 2 = 0$ بدین صورت عمل می‌کنیم.

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها: } x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 4 - 2(-1) = 6$$

۱۵ - گزینه ۲ ابتدا ساختار معادله را تغییر می‌دهیم

$$\frac{(x+1)^2}{(x-3)^2} - 2 = \frac{x+1}{x-3} \rightarrow \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2 - 2 = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\text{حال با تغییر متغیر } t = \frac{x+1}{x-3} \text{ داریم:}$$

$$t^2 - 2 = t \rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

حالا به جای t عبارت مورد نظر را جایگذاری می‌نمائیم

$$\frac{x+1}{x-3} = -1 \rightarrow 2x+1 = -x+3 \rightarrow x=2 \rightarrow x=1 \quad \checkmark$$

$$\frac{x+1}{x-3} = 2 \rightarrow 2x-6 = x+1 \rightarrow x=7 \quad \checkmark$$

با جایگذاری ریشه‌ها مشاهده می‌شود هر دو ریشه صدق می‌نمایند پس داریم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma}$$

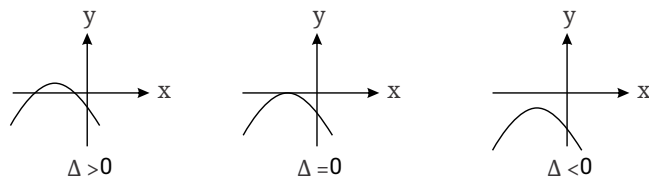
$$16 - \text{گزینه ۴ ابتدا جرم ماده حل شده را به دست می‌آوریم: } \frac{m}{50} = \frac{60}{100} \Rightarrow m = 30 \text{ gr}$$

وقتی x گرم از ماده حل شدنی به محلول اضافه می‌شود، غلظت آن از تابع گویای $f(x) = \frac{30+x}{50+x}$ به دست می‌آید.

$$f(x) = \frac{\lambda_0}{100} \Rightarrow \frac{30+x}{50+x} = \frac{\lambda_0}{100} \Rightarrow \frac{30+x}{50+x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 150 + 5x = 200 + 4x \Rightarrow x = 50 \text{ gr}$$

۱۷ - گزینه ۴ برای آن‌که نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیه اول عبور نکند باید دارای ماکزیمم و به صورت باشد، یعنی باید ضریب x^2 منفی باشد. ($a < 0$)

حال به بررسی حالت‌های احتمالی می‌پردازیم:



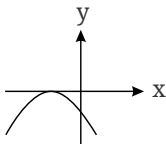


در حالت اول که $\Delta > 0$ است: (α و β ریشه‌های تابع موردنظر هستند).

$$\alpha + \beta < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$

$$\alpha \cdot \beta \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \geq 0 \xrightarrow{a < 0} c \leq 0$$

و حالت‌های $\Delta = 0$ و $\Delta < 0$ قابل قبول نیستند، زیرا در این حالت از ناحیه دوم نیز نمودار عبور نمی‌کند. اما باید توجه داشت که اگر $a < 0$ و $b = 0$ و $c = 0$ باشند، نمودار به صورت شکل زیر خواهد بود که قابل قبول نیست:



۱۸ - گزینه ۱ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد.

$$S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow -(m-2) > 0 \rightarrow m-2 < 0 \rightarrow m < 2$$

بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند.

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow m+1 > 0 \rightarrow m > -1 \rightarrow \text{گزینه‌ی دوم حذف می‌شود}$$

بنابراین بدون اینکه شرط $\Delta > 0$ را اعمال کنیم گزینه‌ی اول انتخاب می‌شود.

۱۹ - گزینه ۳

$$\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2(x-2)} 2\sqrt{x^2-4x} = x-2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4(x^2-4x) = x^2-4x+4 \rightarrow 4x^2-16x = x^2-4x+4$$

$$3x^2-12x-4 = 0 \rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(3)(-4) = 144 + 48 = 192$$

$$\rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{192}}{6} = \frac{12 \pm 8\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+4\sqrt{3}}{3} \checkmark \\ x = \frac{6-4\sqrt{3}}{3} \text{ غ ق} \end{cases}$$

۲۰ - گزینه ۱

$$2a + \sqrt{3a+16} = 1 \rightarrow \sqrt{3a+16} = 1-2a \xrightarrow{\text{توان } 2} 3a+16 = 1+4a^2-4a$$

$$\rightarrow 4a^2-7a-15 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2-4ac = 49+240=289} \begin{cases} a = \frac{7+17}{8} = 3 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{7-17}{8} = -\frac{5}{4} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{پس: } 4a+9 = 4\left(-\frac{5}{4}\right)+9 = 4$$

۲۱ - گزینه ۱ سهمی همواره پایین محور x ها قرار دارد یعنی: $\Delta < 0$, $a < 0$

$$\Delta < 0 \rightarrow \Delta = (2(m-3))^2 - 4(-m+1)(-1) = 4(m^2-6m+9) + 4(-m+1)$$

$$\rightarrow \Delta = 4m^2 - 28m + 40 < 0 \rightarrow 4(m^2 - 7m + 10) < 0 \rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \rightarrow (m-2)(m-5) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m^2-7m+10} \begin{array}{c|ccc} -\infty & 2 & 5 & +\infty \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow 2 < m < 5$$

$$a < 0 \rightarrow -m+1 < 0 \rightarrow 1 < m$$



$$\left. \begin{array}{l} 2 < m < 5 \\ 1 < m \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < m < 5$$

۲۲ - گزینه ۴ ریشه‌های معادله درجه دوم را α و β در نظر می‌گیریم؛ داریم:

$$\alpha = \sqrt{3} + 1, \beta = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = -\frac{-b}{1} \rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها: } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = \frac{c}{1} \rightarrow 3 - 1 = c \rightarrow c = 2$$

$$\rightarrow b^2 - c^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 = 12 - 4 \rightarrow b^2 - c^2 = 8$$

۲۳ - گزینه ۱ اول: سمت راست تساوی را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 - x + 1} + \frac{c}{x + 1} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{(ax + b)(x + 1) + c(x^2 - x + 1)}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1 = ax^2 + (a + b)x + b + cx^2 - cx + c \Rightarrow 1 = (a + c)x^2 + (a + b - c)x + b + c$$

دوم: اگر تساوی به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد:

$$a + c = 0$$

$$a + b - c = 0$$

$$b + c = 1$$

۲۴ - گزینه ۱ اول: به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{\sqrt{x+3}-x})^2 = (1 + \sqrt{1-x})^2 \Rightarrow \sqrt{x+3}-x = 1 + (1-x) + 2\sqrt{1-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = 2 + 2\sqrt{1-x} \Rightarrow x+3 = 4 + 4(1-x) + 8\sqrt{1-x} \Rightarrow 5x - 5 = 8\sqrt{1-x}$$

دوم: دوباره به توان ۲ می‌رسانیم:

$$25x^2 - 50x + 25 = 64(1-x) \Rightarrow 25x^2 + 14x - 39 = 0$$

$$\text{چون مجموع ضرایب صفر است، } x = 1 \text{ و } x = -\frac{39}{25} \text{ ریشه‌ها هستند که } x = -\frac{39}{25} \text{ در معادله صدق نمی‌کند.}$$

۲۵ - گزینه ۳

$$\text{مجموع جواب‌ها } S = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2$$

$$\text{حاصل ضرب جواب‌ها } P = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$$

معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل ضرب ریشه‌های آن P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است. بنابراین معادله مورد نظر برابر است با:

$$x^2 - 2x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$$

دقت کنید که هر مضربی از این معادله نیز می‌تواند جواب باشد.

۲۶ - گزینه ۱ راهنمایی: دو حالت را در نظر بگیرید. یکی حالتی که تابع از ناحیه ۳ و ۴ عبور نکند و دیگری حالتی که فقط از ناحیه ۳ عبور نکند.

اول: حالت اول: تابع از ناحیه ۳ و ۴ عبور نکند، شرایط آن به شکل زیر است:

$$(1) \Delta \leq 0 \Rightarrow m^2 - 4(m-1) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 \leq 0 \Rightarrow (m-2)^2 \leq 0 \Rightarrow m = 2$$

$$(2) a > 0 \Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

اشتراک ۲ شرط، $m = 2$ است.

دوم: حالتی که تابع فقط از ناحیه ۳ عبور نکند، شرایط آن به شکل زیر است:

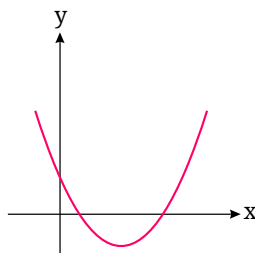
$$(1) \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4(m-1) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m-2)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 2$$

$$(2) a > 0 \Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

$$(3) S > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$(4) P \geq 0 \Rightarrow m-1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$$





سوم: در نهایت اجتماع بین مجموعه‌های حالت اول و دوم همان $(1, +\infty)$ است.

۲۷ - گزینه ۲ به توان ۲ می‌رسانیم:

$$k = \sqrt{6k+8} \Rightarrow k^2 = 6k+8 \Rightarrow k^2 - 6k - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(1)(-8) = 68 \Rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{68}}{2} = 3 \pm \sqrt{17}$$

تذکر: چون باید $k \geq 0$ باشد پس $k = 3 - \sqrt{17}$ قابل قبول نیست.

۲۸ - گزینه ۳ مقدار ۱ را قرار می‌دهیم:

$$1 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \Rightarrow 1 = 10 - \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{h}{5} = 9 \Rightarrow h = 45$$

۲۹ - گزینه ۳ طول پایین‌ترین نقطه سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + b$ برابر است با $x = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1$ و عرض این نقطه برابر است:

$$y = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + b = b - 2$$

طول بالاترین نقطه سهمی به معادله $y = -x^2 + ax + 3$ برابر است با:

$$x = -\frac{a}{2(-1)} = \frac{a}{2}$$

پس $a = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1$ عرض این نقطه برابر است با:

$$y = -1 + 2 + 3 = 4$$

بنابراین $b - 2 = 4 \Rightarrow b = 6$

نقطه برخورد سهمی $y = 2x^2 - 4x + 6$ با محور عرض‌ها نقطه $(0, 6)$ و نقطه برخورد سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ با محور عرض‌ها نقطه $(0, 3)$ است. فاصله این دو نقطه برابر ۳ است.

۳۰ - گزینه ۳ طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است. پس:

$$-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$$

پس معادله سهمی به صورت $y = ax^2 - 4ax - 2$ است. با قرار دادن $x = 2$ در معادله سهمی عرض آن را حساب می‌کنیم:

$$y = 4a - 8a - 2 = -4a - 2$$

بنابراین با توجه به نمودار داریم:

$$-4a - 2 = 2 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{b=-4a} b = 4$$

یعنی معادله سهمی به صورت $y = -x^2 + 4x - 2$ است. طول نقطه برخورد سهمی با محور طول‌ها مورد سؤال است. پس در معادله سهمی قرار می‌دهیم $y = 0$:

$$-x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8} \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

طبق شکل، β ریشه بزرگتر معادله فوق است و بزرگتر از ۲ است. پس:

$$\beta = 2 + \sqrt{2}$$

۳۱ - گزینه ۱ طول نقطه B با همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه هم عرض A و C است.

$$x_B = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

باتوجه به مختصات $B \left(2, \frac{2}{1} \right)$ (رأس سهمی)، می‌توان ضابطه سهمی را به صورت $f(x) = a(x-2)^2 + 1$ نوشت. با جایگذاری مختصات نقطه $C \left(-1, \frac{0}{-1} \right)$ در ضابطه سهمی داریم:

$$f(x) = a(x-2)^2 + 1 \xrightarrow{C \left(-1, \frac{0}{-1} \right)} -1 = a(0-2)^2 + 1 \rightarrow a = \frac{-1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{-1}{2}(x-2)^2 + 1$$

برای بدست آوردن ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ خواهیم داشت:



$$-\frac{1}{\beta}(x-2)^2 + 1 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow \beta \text{ ریشه‌های معادله موردنظر هستند. } \alpha \rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2p}{p^2} = \frac{16 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

۳۲ - گزینه ۳ برای آنکه سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور طول‌ها باشد باید همزمان $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد. داریم:

$$\Delta = (m+1)^2 + 4m = m^2 + 6m + 1 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow m^2 + 6m + 1 < 0$$

$$m^2 + 6m + 1 = 0 \rightarrow m = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow -3 - 2\sqrt{2} < m < -3 + 2\sqrt{2}$$

از طرفی می‌دانیم ضریب x^2 یعنی m نیز باید منفی باشد. بنابراین $m < 0$ بوده و جواب نهایی برای محدوده m برابر است با:

$$(-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}) \cap (-\infty, 0) = (-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2})$$

در بازه موردنظر مقادیر صحیح m برابر است با: $-5, -4, -3, -2, -1$

پس مقدار ۵ صحیح به جای m می‌توان قرار داد.

۳۳ - گزینه ۳

$$S = P + 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + 2 \xrightarrow{\times a} -b = -c + 2a \Rightarrow c - b = 2a$$

دقت کنید صورت سؤال $ax^2 + bx - c = 0$ داده شده است و با فرض مثبت بودن c معادله همواره جواب دارد ($\Delta > 0$) در ضمن $P = \frac{-c}{a}$ می‌شود.

$$\text{if } a = 1 \Rightarrow c \text{ باید ۲ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \begin{cases} c = 3, 4, \dots, 9 \\ b = 1, 2, \dots, 7 \end{cases} \text{ حالت ۷}$$

$$\text{if } a = 2 \Rightarrow c \text{ باید ۴ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد.} \Rightarrow \begin{cases} c = 5, 6, 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \text{ حالت ۵}$$

$$\text{if } a = 3 \Rightarrow c \text{ باید ۶ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد.} \Rightarrow \begin{cases} c = 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3 \end{cases} \text{ حالت ۳}$$

$$\text{if } a = 4 \Rightarrow c \text{ باید ۸ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد.} \Rightarrow \begin{cases} c = 9 \\ b = 1 \end{cases} \text{ حالت ۱}$$

در مجموع ۱۶ حالت یا ۱۶ معادله خواهیم داشت.

۳۴ - گزینه ۲

$$x^2 + 2x + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 6 \rightarrow x^2 + 2x + \sqrt{2(x^2 + 2x) + 3} = 6$$

با تغییر متغیر $x^2 + 2x = t$ داریم:

$$t + \sqrt{2t + 3} = 6 \rightarrow \sqrt{2t + 3} = 6 - t \rightarrow (\sqrt{2t + 3})^2 = (6 - t)^2$$

$$\rightarrow 2t + 3 = 36 - 12t + t^2 \rightarrow t^2 - 14t + 33 = 0$$

$$\text{غ ق ق زیرا در معادله صدق نمی‌کند } t = 11 \rightarrow \begin{cases} t = 11 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = 3 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -3$$

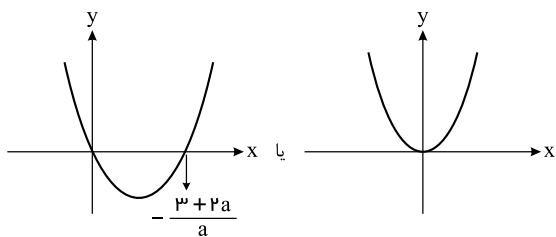
پس ریشه‌های معادله ۴ واحد اختلاف دارند.



۳۵ - گزینه ۱ سهمی $y = ax^2 + (3 + 2a)x$ مبدأ گذر است، زیرا:

$$y = 0 \Rightarrow ax^2 + (3 + 2a)x = 0 \Rightarrow x(ax + 3 + 2a) = 0 \Rightarrow x = 0, ax + 3 + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{3 + 2a}{a}$$

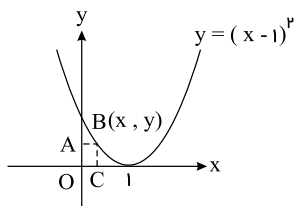
برای آن که سهمی از ناحیه سوم عبور نکند، باید رو به بالا بوده و ریشه معادله $y = 0$ یعنی $x = -\frac{3 + 2a}{a}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



$$a > 0 \Rightarrow -\frac{3 + 2a}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{3 + 2a}{a} \leq 0 \xrightarrow{a > 0} 3 + 2a \leq 0 \Rightarrow 2a \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{3}{2}$$

چون اشتراک $a > 0$ و $a \leq -\frac{3}{2}$ سهمی است، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۳۶ - گزینه ۱ با فرض $B(x, y)$ داریم:



$$\begin{cases} P = 2x + 2y \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow P = 2x + 2(x-1)^2$$

$$P = 2x + 2(x^2 - 2x + 1) = 2x + 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow P = 2x^2 - 2x + 2$$

حال کمترین مقدار P را می‌یابیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{\min} = 2 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} + 2$$

$$\Rightarrow P_{\min} = \frac{1}{2} - 1 + 2 = \frac{3}{2}$$

۳۷ - گزینه ۳ سهمی رو به بالا است، پس $a > 0$ و از طرفی نمودار سهمی محور x ها را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند. یعنی معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه متفاوت است. بنابراین:

$\Delta > 0$ ، همچنین عرض از مبدأ سهمی منفی است، پس:

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=0} y = c < 0$$

طول رأس سهمی نیز منفی است، پس:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

حال موارد مشخص شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$c < 0, \Delta > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{c} < 0$$

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$$

۳۸ - گزینه ۳ اگر از $x\sqrt{2-x}$ فاکتور بگیریم، معادله به صورت زیر درمی‌آید:



$$x^2\sqrt{2-x} + x\sqrt{(2-x)(2+x)} = 0 \rightarrow x^2\sqrt{2-x} + x\sqrt{2-x}\sqrt{2+x} = 0$$

$$x\sqrt{2-x}(x + \sqrt{2+x}) = 0 \rightarrow x\sqrt{2-x} = 0 \text{ یا } x + \sqrt{2+x} = 0$$

$$x\sqrt{2-x} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{2-x} = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2 \quad \checkmark \rightarrow \text{هر دو جواب در معادله صدق می‌کند}$$

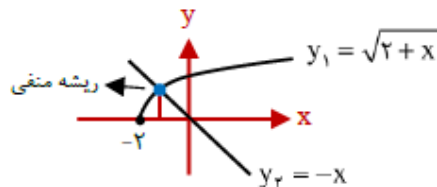
$$x + \sqrt{2+x} = 0 \rightarrow \sqrt{2+x} = -x \rightarrow 2+x = x^2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

در معادله صدق می‌کند $\rightarrow x = -1$ $\checkmark$ جواب رادیکال منفی می‌شود $\rightarrow x = 2$ غ

مجموعه جواب به صورت معادله $\{-1, 0, 2\}$ است. بنابراین معادله دارای سه ریشه می‌باشد.

تذکر: برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله $x + \sqrt{2+x} = 0$ ، می‌توانیم از روش رسم نمودار کمک بگیریم. داریم:

$$\underbrace{\sqrt{2+x}}_{y_1} = \underbrace{-x}_{y_2}$$



۳۹ - گزینه ۳ اگر معادله داده شده را ساده کنیم، به شکل استاندارد $x^2 - x - 11 = 0$ درمی‌آید. اگر ریشه‌های آن α و β در نظر گرفته شود، داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 1 \\ P = \alpha \cdot \beta = -11 \end{cases}$$

با توجه به صورت سوال، ریشه‌های معادله جدید $2\alpha + 1$ و $2\beta + 1$ در نظر می‌گیریم. بنابراین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله جدید به صورت‌های زیر است:

$$S_{\text{جدید}} = (2\alpha + 1) + (2\beta + 1) = 2(\alpha + \beta) + 2 = 2S + 2 = 2(1) + 2 = 4$$

$$P_{\text{جدید}} = (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 4\alpha\beta + \underbrace{2\alpha + 2\beta}_{2(\alpha + \beta)} + 1 = 4P + 2S + 1 = 4(-11) + 2(1) + 1 = -41$$

حال با معلوم بودن S و P معادله جدید، معادله جدید را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - S_{\text{جدید}}x + P_{\text{جدید}} = 0 \rightarrow \frac{S_{\text{جدید}}=4}{P_{\text{جدید}}=-41} \rightarrow x^2 - 4x = 0$$

۴۰ - گزینه ۲

$$g = \{(-3, 2)(2, 1)(3, -1)\}$$

$$f = \{(1, 2)(3, 1)(2, 4)(0, -1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2, 1)(1, 3)(4, 2)(-1, 0)\}$$

$$(3g + 2f^{-1})(2) = 3g(2) + 2f^{-1}(2) = 3 \times 1 + 2 \times 1 = 5$$

$$\rightarrow a = 5 \rightarrow |x| + [4x] = 5$$

می‌دانیم $[4x]$ به ازای تمام مقادیر x عددی صحیح است $\Leftarrow [4x] = 5 - 5$

به ازای جميع مقادیر x عددی صحیح می‌باشد $\Leftarrow |x|$ نیز باید عددی صحیح باشد.

$$|x| \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x \in \mathbb{Z} \rightarrow [4x] = 4x$$

$$\xrightarrow{4x \in \mathbb{Z}} |x| + 4x = 5 \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow x + 4x = 5 \rightarrow x = 1 \text{ ق ق} \\ x < 0 \rightarrow -x + 4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$x = \frac{5}{3}$ هم به دلیل آن که در شرط $x < 0$ صدق نمی‌کند غیرقابل قبول است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۷ - ۲	۱۳ - ۱	۱۹ - ۳	۲۵ - ۳	۳۱ - ۱	۳۷ - ۳
۲ - ۳	۸ - ۲	۱۴ - ۲	۲۰ - ۱	۲۶ - ۱	۳۲ - ۳	۳۸ - ۳
۳ - ۳	۹ - ۳	۱۵ - ۲	۲۱ - ۱	۲۷ - ۲	۳۳ - ۳	۳۹ - ۳
۴ - ۱	۱۰ - ۱	۱۶ - ۴	۲۲ - ۴	۲۸ - ۳	۳۴ - ۲	۴۰ - ۲
۵ - ۳	۱۱ - ۴	۱۷ - ۴	۲۳ - ۱	۲۹ - ۳	۳۵ - ۱	
۶ - ۱	۱۲ - ۲	۱۸ - ۱	۲۴ - ۱	۳۰ - ۳	۳۶ - ۱	