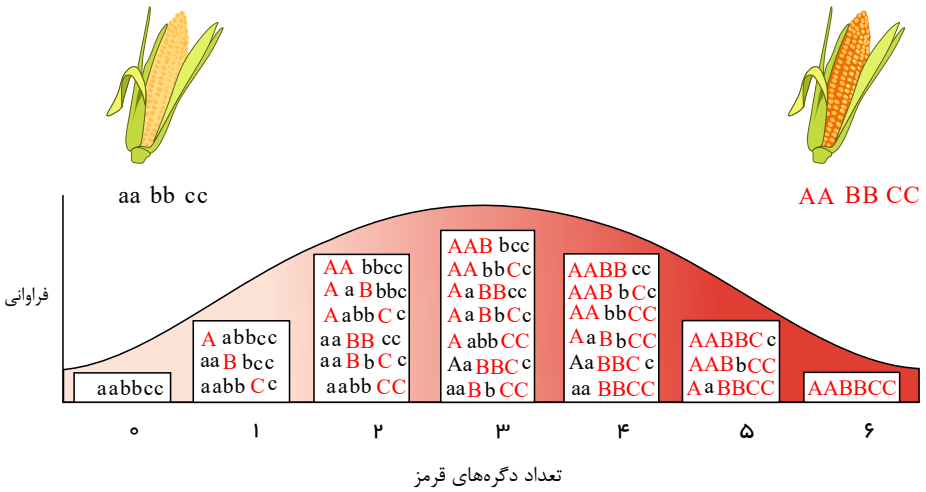
پاسخنامه تشریحی

۱ – گزینه ۴ صفت وابسته به جنس چه بر روی فام‌تن Y و چه بر روی فام‌تن X باشد، قطعاً در بدن فرزند پسر یا دختر، در یاخته‌های ماهیچه‌ای اسکلتی بیش از یک دگره دارد.

سایر گزینه‌ها برای صفاتی که بر روی فام‌تن Y قرار دارند، صادق نیست.

۲ – گزینه ۱ از آمیزش دو ذرت با ژنوتیپ $AABBCC$ و $aabbcc$، ذرت‌هایی با ژنوتیپ $AaBbCc$ به‌وجود می‌آید و تعداد دگره‌های بارز نشان‌دهندهٔ رنگ قرمز است و طبق نمودار زیر، رخ‌نمود ذرت‌های حاصل بیشترین شباهت را از نظر رنگ با گزینهٔ ۱ دارند.



۳ – گزینه ۴ صفت چند ژنی، چندین جایگاه ژنی دارد که ممکن است این جایگاه‌ها در بخش‌های مختلفی از یک کروموزوم قرار گرفته باشند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): صفت چند دگره‌ای دارای بیش از دو نوع دگره در تمامی افراد جمعیت است؛ اما تعداد دگره‌ها در رابطه با یک فرد بستگی به تعداد مجموعه‌های کروموزومی جاندار دارد.

گزینهٔ (۲): صفت دو ژنی دارای دو جایگاه ژنی متفاوت در کروموزوم (های) فرد است. حتی اگر فرد در رابطه با هر دو جایگاه ژنی ژن‌نمود خالص داشته باشد، دو نوع دگره متفاوت (به دلیل دو ژنی بودن صفت) در رابطه با این صفت خواهد داشت.

گزینهٔ (۳): صفت تک ژنی در یک فرد تریپلوئید دارای یک جایگاه ژنی و سه ژن است؛ درنتیجه فرد تریپلوئید در رابطه با این صفت سه دگره دارد.

۴ – گزینه ۳ همهٔ افراد، در غشای همهٔ یاخته‌های زنده و سالم خود دارای پروتئین هستند. (و این پروتئین‌ها ممکن است کانال پروتئین، پمپ و ... باشند.)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: افراد با گروه خونی Rh منفی و یا مثبت ناخالص، دارای ژنی هستند که نمی‌تواند پروتئین D را بسازد. (نادرست)

گزینهٔ «۲»: ممکن است هر نوع گروه خونی را داشته باشد. (نادرست)

گزینهٔ «۳»: در همهٔ افراد سالم، ژن‌های Rh بخشی از فام‌تن شمارهٔ یک را به خود اختصاص داده‌اند. (درست)

گزینهٔ «۴»: در گویچه‌های قرمز بالغ خون که فاقد هسته و دنا هستند، دگره‌ای برای گروه خونی Rh وجود ندارد. (نادرست)

۵ – گزینه ۳ چون مرد از نظر بیماری سالم است و دختر آنها بیمار می‌باشد، لذا صفت بیماری وابسته به جنس بارز است. دگرهٔ بیماری را به‌صورت X^M و دگرهٔ سالم را به‌صورت X^m نمایش می‌دهیم. ژن‌نمود (ژنوتیپ) مادر از نظر بیماری یا خالص بارز است یا ناخالص، ژن‌نمود (ژنوتیپ) پدر از نظر گروه خونی Rh یا خالص نهفته است یا ناخالص.

ژن‌نمود (ژنوتیپ) مادر: dd و I^Ai و X^MX^m یا X^MX^M

ژن‌نمود (ژنوتیپ) پدر: Dd, I^Bi, X^mY یا dd

با توجه به این توضیحات، مادربزرگ پدری دختر در ارتباط با بیماری یا ژن‌نمود (ژنوتیپ) خالص نهفته دارد یا ناخالص. بنابراین یا سالم (خالص نهفته) است یا بیمار (ناخالص)

۶ – گزینه ۴ از آنجایی که والدین دارای گروه خونی مثبت هستند و فرزند آنها دارای گروه خونی منفی است، درمی‌یابیم که هر دو ناخالص (Dd) هستند. از طرفی چون دختر دارای گروه خونی B است، ژن‌نمود پدر که گروه خونی A دارد ، به‌صورت I^Ai می‌باشد. پس ژن‌نمود گروه خونی والدین به‌صورت I^AI^BDd و I^AiDd است.

دقت داشته باشید، از آنجایی که از پدر و مادری سالم، فرزندی بیمار متولد شده است؛ این بیماری، نوعی بیماری نهفته است؛ اما اگر ژن آن بر روی فام‌تن جنسی باشد، برای اینکه فرزند دختر مبتلا باشد، پدر نیز باید به آن بیماری مبتلا باشد، که چنین نیست. پس این بیماری نوعی صفت نهفته و مستقل از جنس است.

۷ – گزینه ۴ فرزند دختر در اغلب یاخته‌های پیکری هسته‌دار ۲ عدد فام‌تن x دارد؛ ولی ممکن است در بعضی صفات وابسته به x، ۲ دگره‌ای که از پدر و مادر دریافت می‌کند، ۲ دگرهٔ (الل) مشابه باشند، یعنی یک نوع دگره (الل) دریافت کند.

صفات وابسته به x، تنها برروی فام‌تن x هستند و تنها از طریق فام‌تن x به ارث می‌رسند، اما توجه داشته باشید صفات وابسته به x می‌توانند تک‌جایگاهی یا چندجایگاهی باشند.

در صفات مستقل از جنس در شرایط عادی، هر فرد دیپلوئید برای صفات تک‌جایگاهی از هر والد خود تنها یک دگره دریافت می‌کند.

فرزند دختر در مورد تمام صفات چه وابسته به x و چه مستقل از جنس از هر والد، یک دگره برای صفات تک‌جایگاهی دریافت می‌کند.

۸ – گزینه ۱ دقت کنید! دگره (الل) سبب تولید آنزیم‌ها، پروتئین‌ها و رناها می‌شود نه کربوهیدرات‌ها. از طرفی محل استقرار دگره‌ها هسته می‌باشد نه غشای یاخته. توجه به این نکته که گویچه‌های قرمز هسته و مادهٔ وراثتی خود را از دست می‌دهند، حائز اهمیت است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۲) اثر دو دگره مربوط به گروه خونی (ABO) که روی کروموزوم غیرجنسی (شمارهٔ ۹) قرار دارند، هم‌زمان با هم ظاهر می‌شود. (گروه خونی AB)

گزینهٔ ۳) انسان موجودی دیپلوئید است. تشکیل پروتئین D بر روی غشای گویچه‌های قرمز در یکی از حالت‌های Dd و DD حاصل می‌شود که در هر دو حالت وجود دو دگره الزامی است.

گزینهٔ ۴) با توجه به اینکه مردها، یک کروموزوم X و یک کروموزوم Y دارند، دگره‌ای که روی هرکدام از این کروموزوم‌ها قرار داشته باشند باعث بروز یک ویژگی خاص می‌شود. به‌عنوان مثال، تنها یک الل مربوط به بیماری هموفیلی، باعث بروز این بیماری در مردها می‌شود.

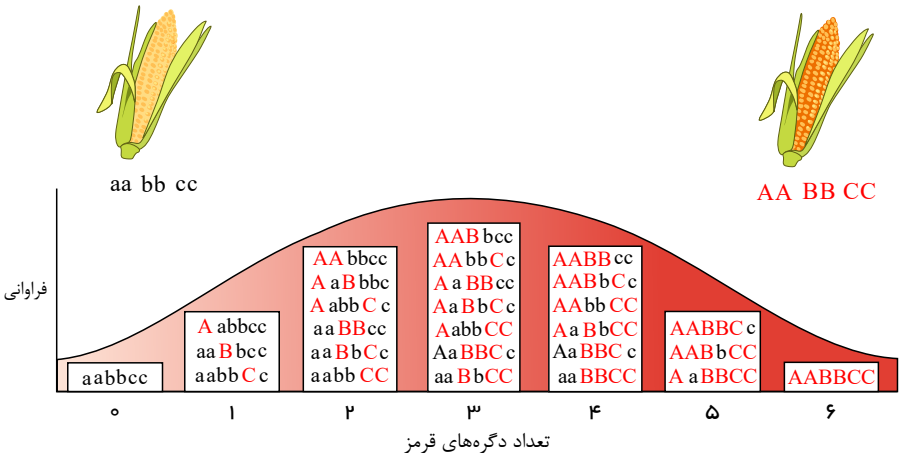
۹ – گزینه ۱ در یاخته‌های هاپلوئید فقط یک الل برای ساخت پروتئین D وجود دارد.

یاخته‌های هاپلوئید عبارت‌اند از: اووسیت ثانویه، اسپرماتید و جسم قطبی.

گلبول قرمز بالغ نیز به دلیل نداشتن هسته، اللی برای پروتئین D ندارد.

بقیهٔ موارد ۲ الل در مورد پروتئین D دارند.

۱۰ – گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، وقتی که سه‌دگرهٔ قرمز و سه دگرهٔ سفید داریم (نسبت الل بارز به نهفته برابر یک است.)، در نمودار توزیع فراوانی رخ‌نمودها، در محدودهٔ بیشترین فراوانی قرار دارد.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: با توجه به شکل بالا، مثلاً $Aabbcc$ و $aaBbcc$ رنگ مشابهی دارند.

گزینهٔ «۲»: آستانه‌های نمودار را ببینید. $aabbcc$ سفیدرنگ و $AABBCC$ قرمز می‌باشد، ولی فراوانی آنها با هم برابر است.

گزینهٔ «۳»: $AABBCC$ بیشترین تعداد دگره‌های بارز (قرمز) را دارد؛ ولی فراوانی‌اش از همه بیشتر نیست. اگر همواره نسبت مستقیم داشت، شکل نمودار خطی می‌شد، نه زنگوله‌ای!

۱۱ – گزینه ۲ اگر در خانواده‌ای با والدین سالم، پسری بیمار متولد شود الگوی بیماری می‌تواند وابسته به X نهفته یا مستقل از جنس نهفته باشد. اما اگر دختری بیمار متولد شود، به‌طور حتم الگوی بیماری مستقل از جنس نهفته است و هر دو والد از نظر این بیماری ناخالص هستند. دقت کنید که در الگوی وابسته به X نهفته، دختر بیمار قطعاً پدری بیمار دارد.

۱۲ – گزینه ۳ ژنوتیپ پسر برای هموفیلی به شکل X^hY می‌باشد که Y از اسپرم پدر و X^h از تخمک مادر به ارث رسیده است. پس در یاخته‌های مادر X^h وجود دارد. دقت کنید که گویچه‌های قرمز بالغ فاقد فام‌تن هستند، همچنین تخمک‌ها جزء یاخته‌های پیکری نیستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: ژنوتیپ والدین ممکن است به‌صورت I^Bi و I^AI^A باشد.

گزینهٔ «۲»: ممکن است ژنوتیپ والدین به‌صورت X^HY و X^hX^H باشد که در این حالت، هیچ یک از والدین بیمار نخواهند بود.

گزینهٔ «۴»: اگر ژنوتیپ والدین به‌صورت X^hY و X^HX^h باشد، پدر دگرهٔ بیماری‌زا را خواهد داشت.

۱۳ – گزینه ۳ چون در این فرد بالغ برخی از یاخته‌ها، هاپلوئید (جنسی) می‌باشند؛ درنتیجه از این صفت فقط یک دگره (الل) را دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: گلبول قرمز فاقد هسته و درنتیجه فاقد هر گونه دگره‌ای می‌باشد.

گزینهٔ «۲»: چون پدر این فرد دارای گروه خونی O می‌باشد؛ درنتیجه این فرد قطعاً دارای ژنوتیپ BO می‌باشد.

گزینهٔ «۴»: به‌طور طبیعی دو دگرهٔ یک صفت تک‌جایگاهی بر روی یک کروموزوم قرار نمی‌گیرند.

۱۴ – گزینه ۲ در صورتی که نیمی از فرزندان پسر بیمار باشند باید مادر ناقل بیماری باشد؛ یعنی از نظر این بیماری سالم و واجد یک دگره بیماری است. از آنجا که فام‌تن Y فاقد جایگاه برای ژن بیماری هموفیلی است، پدر نقشی در بیمار شدن پسران ندارد و می‌تواند سالم باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هر دختر برای اینکه هموفیل باشد، باید از هر دو والد دگرهٔ بیماری را دریافت کند، از آنجا که همهٔ دخترها بیمار هستند، پدر قطعاً بیمار و مادر ممکن است بیمار یا سالم باشد.

گزینهٔ (۳): دختر بیمار یکی از دگره‌های بیماری را از پدر خود دریافت می‌کند؛ بنابراین پدر این فرد حتماً باید بیمار باشد.

گزینهٔ (۴): برای اینکه همهٔ فرزندان پسر بیمار باشند، باید مادر بیمار باشد و همان‌طور که در ابتدای توضیح داده شد، پدر نقشی در بیمار شدن پسران خود ندارد و نمی‌توان ژنوتیپ آن را به‌طور قطع مشخص کرد.

۱۵ - گزینه ۲ در صورت خودلقاحی در جانداران نرماده یا گیاهان دوجنسی، فرزند ممکن است هر دو دگره را از یک والد دریافت کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در صورتی که صفت وابسته به X باشد، دگرهٔ نهفته در مردها به تنهایی توانایی بروز صفت را دارد.

گزینهٔ (۳): فرد ناخالص یا رخ‌نمود بارز یا رخ‌نمود حد واسط را بروز می‌دهد.

گزینهٔ (۴): اگر صفت وابسته به X و رابطهٔ دگره‌ها بارز و نهفتگی باشد، ۵ نوع ژن‌نمود اما ۲ نوع رخ‌نمود در جمعیت دیده می‌شود.

۱۶ - گزینه ۴ ابتدا غلظت یون هیدرونیوم را محاسبه می‌کنیم:

$$pH = ۱ \rightarrow [H^+] = ۰/۱ mol \cdot L^{-۱}$$

با توجه به رابطهٔ ثابت یونش داریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]} \Rightarrow ۰/۲۵ = \frac{(۰/۱)^۲}{[HA]_{\text{اولیه}} - ۰/۱} \Rightarrow [HA]_{\text{اولیه}} = ۰/۱۴ mol \cdot L^{-۱}$$

حال می‌توان نوشت:

$$۱L \text{ محلول} \times \frac{۰/۱۴ mol}{۱L \text{ محلول}} \times \frac{۱۶۳/۵ g}{۱ mol} = ۲۲/۸۹ g$$

۱۷ - گزینه ۳ عبارت‌های «آ» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

ب) مقایسهٔ غلظت گونه‌ها در محلول الکترولیت HA به‌صورت زیر خواهد بود. به‌دلیل یونیده شدن کامل HA، تقریباً مولکول‌های یونیده نشده در محلول یافت نخواهد شد و مقدار آن‌ها در حد صفر است.

$$[H^+] = [A^-] >> [HA]$$

ت) HA یک اسید قوی است. اما HF یک اسید ضعیف بوده و نمی‌توان آن را به HA نسبت داد.

۱۸ - گزینه ۴

$$pH_{\text{اولیه}} = -\log[H^+] = -\log(۰/۰۱) = ۲$$

$$pH = ۴ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱}$$

$$\Delta[H^+] = ۱۰^{-۲} - ۱۰^{-۴} = ۹/۹ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow \Delta n(H^+) = ۹/۹ \times ۱۰^{-۳} \frac{mol}{L} \times ۲L = ۱۹/۸ \times ۱۰^{-۳} mol$$

هر مول H^+ با ۱ مول OH^- خنثی می‌شود:

$$۰/۰۱۹۸ mol KOH \times \frac{۵۶ g KOH}{۱ mol KOH} \simeq ۱/۱۱ g KOH$$

۱۹ - گزینه ۱

برای به‌دست آوردن مقدار $[A^-]$ در محلول جدید، باید مقدار کل $[H^+]$ موجود در محلول جدید را در فرمول K_a اسید جای‌گذاری کنیم. ولی با توجه به اینکه مقدار $[H^+]$ حاصل از HCl بالاست ($pH = ۱$ و محلول بسیار اسیدی است) و اسید حل‌شده ضعیف است (K_a کوچک دارد)، از H^+ حاصل از اسید ضعیف صرف‌نظر می‌کنیم و فقط H^+ حاصل از HCl را در فرمول K_a جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار تقریبی $[A^-]$ در محلول جدید به دست آید:

$$[HA] = \frac{۱ mol\ HA}{۱L \text{ محلول}} = ۱ mol \cdot L^{-۱} \quad , \quad [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱} = ۰/۱$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۵} = \frac{۰/۱ \times [A^-]}{۱} \Rightarrow [A^-] = ۲ \times ۱۰^{-۴}$$

۲۰ - گزینه ۲ رسانایی الکتریکی محلول‌ها به فراوانی یون‌ها در محلول بستگی دارد. بنابراین محلول اسیدی که یونش آن کم‌تر است، یون‌های کم‌تری وارد محلول می‌کند و رسانایی الکتریکی کم تری خواهد داشت. در بین ۴ اسید داده شده، سولفوریک‌اسید و نیتریک‌اسید اسیدهای قوی هستند. اما از آنجایی که $H_۲SO_۴$ یک اسید چند پروتون‌دار است، غلظت یون‌های حاصل از تفکیک آن در محیط آبی بیشتر از $HNO_۳$ است که یک اسید تک پروتون‌دار است.

HCN و $HNO_۲$ جزو اسیدهای ضعیف هستند اما ثابت یونش اسید $HNO_۲$ بیشتر از HCN است. بنابراین ترتیب میزان رسانایی الکتریکی محلول این چهار اسید در گزینه ۲ به درستی نشان داده شده است.

۲۱ - گزینه ۳ با توجه به رابطه ثابت یونش می‌توان نوشت. (دقت کنید نمی‌توان از رابطه تقریبی استفاده کرد، زیرا مقدار K_s بزرگ است.)

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]}$$

اگر مقدار $[H^+]$ را برابر x در نظر بگیریم:

$$K_a = \frac{x^2}{0/2 - x} \Rightarrow 0/1 = \frac{x^2}{0/2 - x} \rightarrow x^2 = -0/1x + 0/02$$

$$x^2 + 0/1x - 0/02 = 0 \Rightarrow x = \frac{-0/1 \pm \sqrt{0/01 + 0/08}}{2} = \frac{-0/1 \pm \sqrt{0/09}}{2} = \frac{0/2}{2} = 0/1$$

$$\Rightarrow [H^+] = x = 0/1 mol \cdot L^{-1} \Rightarrow pH = -\log 10^{-1} \Rightarrow pH = 1$$

۲۲ - گزینه ۱ مراحل حل را به ۲ قسمت تقسیم می‌کنیم. در قسمت اول، باید مقدار HA مورد نیاز برای رساندن pH محلول از ۱۱ به ۷ را به دست بیاوریم. در قسمت دوم باید مقدار HA مورد نیاز برای رساندن pH از ۷ به ۴ را محاسبه کنیم.

پس داریم:

$$pH = 11 \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-11}$$

$$[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow 10^{-11} \times [OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-3}$$

غلظت هیدروکسید در محلول برابر 10^{-3} می‌باشد پس غلظت KOH برابر 10^{-3} بوده است. پس داریم:

$$\text{غلظت باز} \times \text{حجم} \times \text{ظرفیت} = \frac{\text{جرم اسید}}{\text{جرم مولی}} \times \text{ظرفیت} \Rightarrow 10^{-3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{x}{20} \times 1 \Rightarrow x = 10^{-2} g HA$$

با اضافه کردن 10^{-2} گرم از HA به محلول، pH به ۷ می‌رسد. سپس داریم:

$$pH = 4 \Rightarrow [H_2O^+] = 10^{-pH} = 10^{-4} \Rightarrow [HA] = 10^{-4}$$

$$\text{مقدار } HA \text{ مورد نیاز} = 10^{-4} \times \frac{1}{2} \times 20 = 10^{-3} g HA$$

در نهایت دو مقدار به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم:

$$10^{-2} + 10^{-3} = 11 \times 10^{-3} g = 11 mg$$

۲۳ - گزینه ۱ $CuO \leftarrow$ نادرست، اکسید فلزهای واسطه در آب نامحلول‌اند.

$CO_2 \leftarrow$ نادرست، CO_2 در آب به اسید ضعیف کربنیک‌اسید تبدیل می‌شود که به مقدار کمی یونیده می‌شود و تعداد کمی یون تولید می‌کند.

$Na_2O \leftarrow$ نادرست، براساس واکنش زیر هر مول سدیم‌اکسید در آب، ۴ مول یون تولید می‌کند.

$$Na_2O + H_2O \rightarrow 2Na^+ + 2OH^-$$

$N_2O_5 \leftarrow$ نادرست، براساس واکنش زیر هر مول دی نیتروژن پنتااکسید، ۴ مول یون تولید می‌کند.

$$N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2H^+ + 2NO_3^-$$

$BaO \leftarrow$ درست، براساس واکنش زیر هر مول باریم‌اکسید در آب ۳ مول یون تولید می‌کند.

$$BaO + H_2O \rightarrow Ba^{2+} + 2OH^-$$

۲۴ - گزینه ۲ هر ۳ مولکول قطبی هستند؛ ولی HF به‌دلیل وجود پیوند هیدروژنی نقطهٔ جوش بیشتری نسبت به بقیه دارد و از سوی دیگر HF یک اسید ضعیف و HBr, HCl اسیدهای قوی هستند؛ بنابراین pH آن‌ها با هم برابر نیست.

۲۵ - گزینه ۱

$$\frac{\text{فعالیت } [H^+]}{\text{استراحت } [H^+]} = \frac{10^{-1/4}}{10^{-3/7}} = \frac{10^{-0/4} \times 10^{-1}}{10^{-0/7} \times 10^{-3}} = \frac{0/4 \times 10^{-1}}{0/2 \times 10^{-3}} = 200$$

به دلیل قوی بودن اسید معده (HCl) غلظت اولیهٔ اسید با $[H^+]$ برابر است.

۲۶ - گزینه ۱

می‌دانیم : $W_{mg} = -\Delta U_g \quad (*)$ **(تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی)**

برای هر سه گلوله:

$$\Delta U_g = U_{2g} - U_{1g}$$

اگر سطح زمین را مبنای پتانسیل گرانشی فرض کنیم:

$$U_{2g} = 0 \rightarrow \Delta U_g = -U_{1g} - mgh \quad (**)$$

$$\xrightarrow{*,\ **} W_{mg} = -(-mgh) = mgh$$

چون m و h برای هر سه گلوله یکسان است:

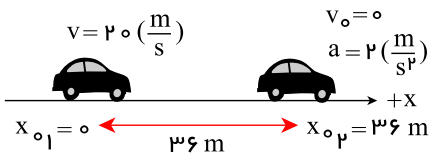
$$(W_{mg})_1 = (W_{mg})_2 = (W_{mg})_3$$

طبق رابطهٔ $W_{mg} = mgh$، با توجه به مشابه بودن توپ‌ها و ارتفاع یکسان آنها تا زمین، کار نیروی وزن بر روی هر سه توپ یکسان است.

۲۷ - گزینه ۱

$$W = F_x \times \Delta x \Rightarrow W = ۳۰ \times ۶ = ۱۸۰J$$

۲۸ - گزینه ۳



$$x_۱ = vt + x_{۰_۱} = ۲۰t$$

$$x_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_{۰_۲} = \frac{۱}{۲} \times ۲t^۲ + ۰ + ۳۶ = t^۲ + ۳۶$$

$$x_۲ = x_۱ \Rightarrow t^۲ + ۳۶ = ۲۰t \Rightarrow t^۲ - ۲۰t + ۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (t - ۲)(t - ۱۸) = ۰$$

$$\Rightarrow t_۱ = ۲s\,,\, t_۲ = ۱۸s \Rightarrow \quad \Delta t = ۱۶s$$

۲۹ - گزینه ۳ روش اول:

در $t = ۲$، سرعت صفر است. در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۲s$ داریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۲a + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۲a \quad (*)$$

به کمک تعریف سرعت متوسط جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۶s$ را می‌یابیم:

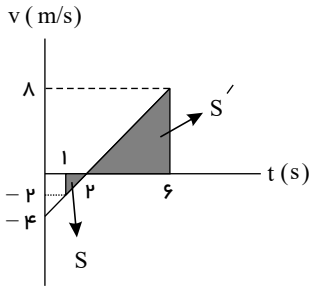
$$v_{av} = \frac{x_{(t=۶)} - x_{(t=۱)}}{۶ - ۱} = ۳ \Rightarrow \Delta x_{(۱s-۶s)} = ۱۵m \quad (**)$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow{(*)} x = \frac{۱}{۲}at^۲ - ۲at + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱s \Rightarrow x_۱ = \frac{a}{۲} - ۲a + x_۰ = -\frac{۳}{۲}a + x_۰ \\ t_۲ = ۶s \Rightarrow x_۲ = ۱۸a - ۱۲a + x_۰ = ۶a + x_۰ \end{cases} \xrightarrow{(**)} \Delta x = ۱۵m = ۷/۵a \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

$$\xrightarrow{(*)} v_۰ = -۴\frac{m}{s} \Rightarrow v = ۲t - ۴$$

از رسم نمودار $(v - t)$ کمک می‌گیریم:

$v = ۲t - ۴ \Rightarrow$



$$\begin{cases} t_۱ = ۱s \Rightarrow v_۱ = -۲\frac{m}{s} \\ t_۲ = ۶s \Rightarrow v_۲ = ۸\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow L = S + S' = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۴ = ۱ + ۱۶ = ۱۷m$$

روش دوم:

در بازهٔ زمانی صفر تا $۲s$ $\Rightarrow v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۲a + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۲a$

$$v_{av} = \frac{v + v_۰}{۲} = \frac{(at + v_۰) + v_۰}{۲} = \frac{۱}{۲}at + v_۰$$

در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۶s$، در رابطهٔ فوق:

$$v_{av} = ۳ = \frac{۱}{۲}a(۶ - ۱) + v_۱ \xrightarrow{v_۱ = v_{(t_۱ = ۱s)} = (-۲)} ۳ = \frac{۵}{۲}a - ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = -۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

باقی راه‌حل شبیه روش اول است.

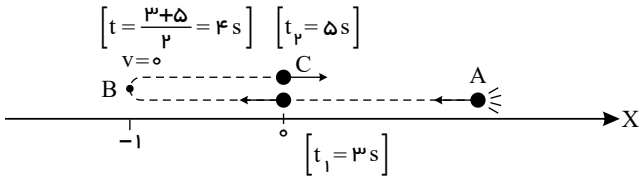
۳۰ - گزینه ۳

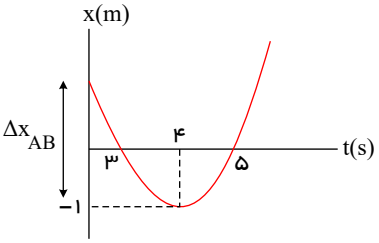
در اینجا تنها نیرویی که کار انجام می‌دهد، نیروی وزن است. بنابراین با استفاده از به کارگیری قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \rightarrow W_{mg} = K_۲ - K_۱$$

$$\rightarrow \cancel{m}\, gh = \frac{۱}{۲}\cancel{m}\,(v_۲^۲ - v_۱^۲) \rightarrow h = ۵۵ - ۳۰ = ۲۵m \rightarrow ۱۰ \times ۲۵ = \frac{۱}{۲}(v_۲^۲ - ۲۰^۲) \rightarrow v_۲ = ۳۰\frac{m}{s}$$

۳۱ - گزینه ۳ هرگاه در یک حرکت شتابدار با شتاب ثابت a و $v_۰$ مختلف‌العلامت باشند، حرکت به‌صورت رفت و برگشت است. اگر در چنین شرایطی متحرک در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ از یک مکان عبور نموده باشد، در $t = \frac{t_۱ + t_۲}{۲}$ تغییر جهت داده و $v = ۰$ شده است. چون در $x = -۱(m)$ تغییر جهت داده (در $x < ۰$) و در دو لحظهٔ $t_۱ = ۳s$ و $t_۲ = ۵s$ نیز از مبدأ مکان عبور نموده راهی وجود ندارد جز اینکه:





روش وارونه دیدن!

$$A \not\to B \to (B \to A) : \Delta x = \frac{۱}{۲}a(\Delta t)^۲ = ۸a$$

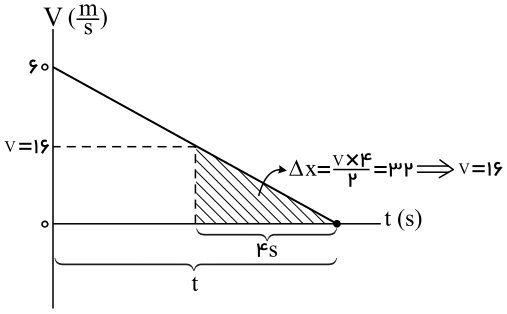
$$\Rightarrow \Delta x_{AB} = ۱۶m$$

$$B \to C \to \Delta x = \frac{۱}{۲}a(۱)^۲ = ۰/۵a = ۱ \to a = ۲$$

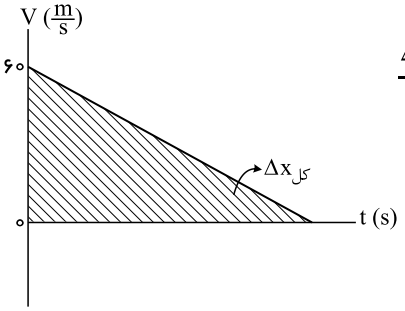
$$\Rightarrow x_{۰} = ۱۵m \Rightarrow S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{۱۶+۱}{۵} = \frac{۱۷}{۵}\frac{m}{s}$$

۳۲ - گزینه ۱

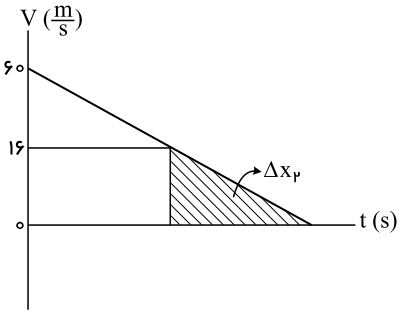
با رسم نمودار سرعت - زمان داریم:



حال با توجه به اینکه نسبت مساحت‌های مثلث‌های متشابه با مجذور نسبت تشابه آنها برابر است، داریم:



$$\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta x_۲} = (\frac{۶۰}{۱۶})^۲ \Rightarrow \frac{\Delta x_{کل}}{۳۲} = (\frac{۶۰}{۱۶})^۲ \Rightarrow \Delta x_{کل} = ۴۵۰m$$



۳۳ - گزینه ۱ برای تعیین بازده تلمبه داریم: (هر لیتر آب معادل یک کیلوگرم آب است)

$$\%R_a = \frac{P_{مفید}}{P_{ورودی}} = \frac{\frac{mgh}{t}}{P_{ورودی}} \times ۱۰۰ = \frac{mgh}{P_{ورودی} \times t} \times ۱۰۰ \xrightarrow[P_{ورودی}=۵kW=۵۰۰۰W, t=۱min=۶۰s]{m=۱۲۰۰kg, h=۱۵m} R_a = \frac{۱۲۰۰ \times ۱۰ \times ۱۵}{۵۰۰۰ \times ۶۰} \Rightarrow$$

$$\%R_a = \frac{۱۲۰۰ \times ۱۰ \times ۱۵}{۵۰۰۰ \times ۶۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow \%R_a = ۶۰ \text{ درصد}$$

۳۴ - گزینه ۳

$$\frac{K_۲}{K_۱} = ۱ \xrightarrow[v_۲ = \frac{۵}{۴} v_۱]{k = \frac{۱}{۲} m v^۲} \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{۵}{۴})^۲ = ۱ \to \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

$$(\frac{m_۲}{m_۱} - ۱) \times ۱۰۰ = (\frac{۱۶}{۲۵} - ۱) \times ۱۰۰ = \frac{-۹}{۲۵} \times ۱۰۰ = -۳۶\%$$

یعنی جرم موشک ۳۶% کاهش یافته است.

۳۵ - گزینه ۱

۳۶ - گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع g, f را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \to D_f = R - \{-۱, ۱\}$$

$$g(x) = \sqrt{x - x^۲} \to D_g : x - x^۲ \geq ۰ \to x(۱ - x) \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq x \leq ۱$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g\} = \{\underbrace{x \neq ۱, x \neq -۱}_{I} \ , \ ۰ \leq \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۱\}$$

$$\overbrace{\frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲}}^{+} \geq ۰ \to ۱ - x^۲ > ۰ \to x^۲ < ۱ \to -۱ < x < ۱ \qquad (II)$$

$$\frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۱ \to \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲} - ۱ \leq ۰ \to \frac{۱ + x^۲ - ۱ + x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۰ \to \frac{۲x^۲}{۱ - x^۲} \leq ۰$$

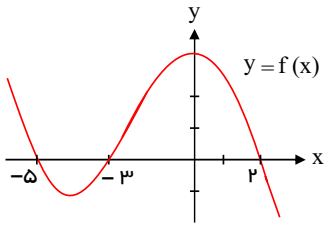
$$\to \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۰ & & ۱ & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} \leq ۰ & & - & \text{ت ن} & + & ۰ & + & \text{ت ن} & - & \end{array}$$

$$\to x < -۱ \quad \text{یا} \quad x > ۱ \quad \text{یا} \quad x = ۰ \qquad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب $x = ۰$ می‌رسیم.

۳۷ - گزینه ۴

اگر نمودار $f(x - ۲)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به‌دست می‌آید.



برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف $\sqrt{xf(x)}$ باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$xf(x) \geq ۰ \to xy \geq ۰ \xrightarrow{x,y \text{ باید هم علامت باشند}} [-۵, -۳] \cup [۰, ۲]$$

۳۸ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

$$f^{-۱}(g(۲a)) = ۶ \Rightarrow f(۶) = ۳ = g(۲a) = \frac{۲a}{۲a - ۱} \Rightarrow ۶a - ۳ = ۲a \Rightarrow ۴a = ۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

۳۹ - گزینه ۱

ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y = ۲ - \sqrt{x - ۱} \Rightarrow (\sqrt{x - ۱})^۲ = (۲ - y)^۲ \Rightarrow x - ۱ = ۴ - ۴y + y^۲$$

$$\Rightarrow x = y^۲ - ۴y + ۵ \quad \Rightarrow \quad f^{-۱}(x) = x^۲ - ۴x + ۵ \ , \ x \leq ۲$$

چون $\sqrt{x - ۱}$ مثبت است، پس $\sqrt{x - ۱}$ منفی بوده و $y = ۲ - \sqrt{x - ۱}$ همواره کوچک تر مساوی ۲ می شود، بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x \leq ۲$ است.

۴۰ - گزینه ۳ به‌ترتیب اعمال موردنظر داریم:

$$f(x) = x^۲ \xrightarrow{\text{۴ واحد انتقال به طرف } x\text{های منفی}} f_۱(x) = (x + ۴)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} f_۲(x) = -(x + ۴)^۲ \xrightarrow{\text{دو برابر کردن عرض نقاط}} f_۳(x) = -۲(x + ۴)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد انتقال به طرف } y\text{های منفی}} f_۴(x) = -۲(x + ۴)^۲ - ۳ = -۲(x^۲ + ۸x + ۱۶) - ۳ = -۲x^۲ - ۱۶x - ۳۵$$

۴۱ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

$g^{-1}of^{-1}(a)=۸\rightarrow g^{-1}(f^{-1}(a))=۸\rightarrow f^{-1}(a)=g(۸)\rightarrow f^{-1}(a)=\sqrt{۵(۸)+۹}=\sqrt{۴۹}=۷$

$\rightarrow f^{-1}(a)=۷\rightarrow f(۷)=a\rightarrow a=۳$

۴۲ - گزینه ۳ روش اول:

ضابطه‌ی تابع f^{-1} را تعیین می‌کنیم اگر $y=\frac{۲x+۵}{x-۲}$ باشد در این صورت داریم:

$$xy-۲y=۲x+۵\rightarrow xy-۲x=۲y+۵\rightarrow x(y-۲)=۲y+۵\rightarrow x=\frac{۲y+۵}{y-۲}$$

پس $f^{-1}(x)=\frac{۲x+۵}{x-۲}$ یعنی معکوس تابع، برابر خود تابع است و بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

روش دوم:

در تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=۰$ باشد آن‌گاه تابع f وارون خودش است و چون در تابع هموگرافیک داده شده‌ی سؤال $a+d=۰$ است پس تابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ برهم منطبق هستند و بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

۴۳ - گزینه ۳

$$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=۳g(x)+۵\ ,\ g(x)=t\Rightarrow f(t)=۳t+۵\Rightarrow f(x)=۳x+۵$$

$$(gof)(x)=g\left(f(x)\right)=۹x^{۲}+۳۰x+۲۶\Rightarrow g(۳x+۵)=۹x^{۲}+۳۰x+۲۵+۱$$

$$\Rightarrow g(۳x+۵)=(۳x+۵)^{۲}+۱\Rightarrow g(x)=x^{۲}+۱$$

۴۴ - گزینه ۲ با توجه به اینکه ضریب پشت $x^{۳}$ برابر -۱ می‌باشد، پس نمودار داده‌شده از انتقال نمودار $y=-x^{۳}$ به‌صورت زیر حاصل شده است:

$$y=-x^{۳}\xrightarrow[x\rightarrow x-۲]{\text{۲ واحد به راست}}y=-(x-۲)^{۳}\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{یک واحد به}}y=-(x-۲)^{۳}-۱$$

$$y=-(x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸)-۱=-x^{۳}+۶x^{۲}-۱۲x+۷=-x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$$

$$\Rightarrow a=۶\ ,\ b=-۱۲\ ,\ c=۷\Rightarrow a-b+۲c=۶-(-۱۲)+۲\times ۷=۶+۱۲+۱۴=۳۲$$

۴۵ - گزینه ۱ است $f(a)=b\Rightarrow f^{-1}(b)=a$ می‌دانیم که.

توجه کنید:

$$f^{-1}(۲۰)=a\Rightarrow f(a)=a+\sqrt{a}=۲۰\Rightarrow a=۱۶\Rightarrow f^{-1}(۲۰)=۱۶g^{-1}(۱۶)=b\Rightarrow g(b)=\frac{۹b+۶}{۱-b}=۱۶\Rightarrow b=\frac{۲}{۵}$$

$$g^{-1}of^{-1}(۲۰)=g^{-1}(f^{-1}(۲۰))=g^{-1}(۱۶)=\frac{۲}{۵}$$