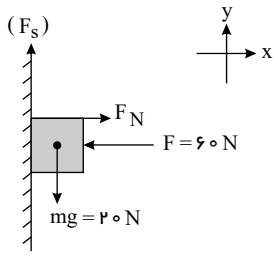
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ با توجه به شکل که نیروی وارد بر جسم را در راستای افقی و قائم نشان می‌دهد، داریم:



$$x:\ F_N = ۶۰N \to (f_s)_{max} = \mu_s F_N = \frac{۶}{۱۰} \times ۶۰ = ۳۶N$$

با افزودن نیروی $۱۰N$ در امتداد و جهت نیروی وزن $(mg + ۱۰N) = ۳۰N < (f_s)_{max} = ۳۶N$ بوده، بنابراین جسم همچنان ساکن می‌ماند. در حالت دوم (پس از افزودن نیروی $۱۰N$)

$$y:\ (F_{net})_y = ma_y = ۰ \to f_s = mg + ۱۰ = ۳۰$$

$$f_s = ۳۰N \quad , \quad F_N = ۶۰N$$

$$R = \sqrt{f_s^۲ + F_N^۲} \Rightarrow R = \sqrt{۳۰^۲ + ۶۰^۲} \Rightarrow R = \sqrt{۹۰۰ + ۳۶۰۰} = \sqrt{۴۵۰۰} = ۳۰\sqrt{۵}$$

۲ - گزینه ۲ مطابق قانون سوم نیوتون بزرگی نیرویی که دو شخص به یکدیگر وارد می‌کنند برابر است. باتوجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$\left|\vec{F}_{۱۲}\right| = \left|\vec{F}_{۲۱}\right| \xrightarrow[\left|\vec{F}_{۲۱}\right| = m_۱ \left|\vec{a}_۱\right|]{\left|\vec{F}_{۱۲}\right| = m_۲ \left|\vec{a}_۲\right|} m_۲ \left|\vec{a}_۲\right| = m_۱ \left|\vec{a}_۱\right| \xrightarrow[\left|\vec{a}_۱\right| = ۲\ m/s^۲]{m_۱ = ۲m_۲} \left|\vec{a}_۲\right| = ۴\ m/s^۲$$

پس از جدا شدن دو شخص از یکدیگر، با سرعت ثابت در خلاف جهت یکدیگر به حرکت خود ادامه می‌دهند، بنابراین ابتدا سرعت دو شخص را در لحظهٔ جدایی از یکدیگر به‌دست می‌آوریم. با انتخاب جهت مثبت حرکت به‌سمت راست داریم:

$$v = at \begin{cases} \xrightarrow[a_۱ = -۲m/s^۲]{t_۱ = ۰/۴s} v_۱ = -۰/۸m/s \xrightarrow[t'_۱ = ۴s]{\Delta x_۱ = v_۱ t'_۱} \Delta x_۱ = -۳/۲m \\ \xrightarrow[t_۲ = ۰/۴s]{a_۲ = ۴m/s^۲} v_۲ = ۱/۶m/s \xrightarrow[t'_۲ = ۴s]{\Delta x_۲ = v_۲ t'_۲} \Delta x_۲ = ۶/۴m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = ۳/۲ + ۶/۴ = ۹/۶m$$

۳ - گزینه ۳ قدم اول: هنگامی که جسمی به تندی حدّی می‌رسد، تندی‌اش ثابت می‌شود. در این گام محاسبه می‌کنیم که جسم چند متر را با تندی حدی خود طی کرده است:

جابه‌جایی قبل از رسیدن به تندی حدی$= \Delta x_۱$ و جابه‌جایی پس از رسیدن به سرعت حدی $= \Delta x_۲$ و جابه‌جایی کل$= \Delta x$

$$\begin{cases} \Delta x = ۶۰m \\ \Delta x_۱ = ۲۴m \end{cases} \to \Delta x_۲ = ۶۰ - ۲۴ = ۳۶m \to \Delta x_۲ = ۳۶m$$

قدم دوم: مدت زمانی که طول می‌کشد تا جسم با تندی ثابت به مسیر حرکت خود ادامه دهد:

$$\Delta x_۲ = v\Delta t \to \Delta t_۲ = \frac{\Delta x_۲}{v} = \frac{۳۶m}{۹m/s} = ۴s \to \Delta t_۲ = ۴s$$

قدم سوم: مدت زمانی که متحرک تا قبل از رسیدن به تندی حدی طی می‌کند:

$$\Delta t_۱ = \Delta t - \Delta t_۲ = ۸/۵s - ۴s = ۴/۵s \to \Delta t_۱ = ۴/۵s$$

بنابراین شتاب متوسط در این فاصلهٔ زمانی:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t_۱} = \frac{۹ - ۰}{۴/۵} = ۲m/s^۲$$

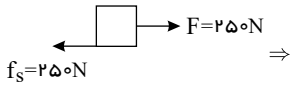
قدم چهارم: نیروی خالص وارد بر جسم تا قبل از رسیدن به سرعت حدّی:

$$F_{net} = mg - f_D = ma \to ۰/۰۵ \times ۱۰ - f_D = \frac{۵}{۱۰۰} \times ۲ = ۰/۱ \to f_D = ۰/۴N$$

۴ - گزینه ۴ گام اول: ابتدا ببینیم جسم ساکن است یا خیر! برای این منظور، باید نیروی F محرک را با $(f_s)_{max}$ مقایسه کنیم.

$$\begin{cases} (f_s)_{max} = \mu_s F_N = \frac{۶}{۱۰} \times ۵۰۰ = ۳۰۰N \xrightarrow{F = ۲۵۰N < (f_s)_{max}} (\text{جسم ساکن می‌ماند}) \\ F_N = W = mg = ۵۰۰ \end{cases}$$

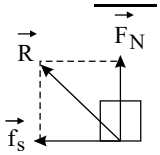
گام دوم: نیروی اصطکاک به دلیل ساکن ماندن جسم برابر خواهد بود:



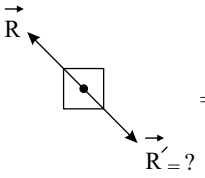
$$\Rightarrow f_s = ۲۵۰N \Rightarrow \vec{f_s} = -۲۵۰\vec{i}$$

گام سوم: نیرویی که سطح تکیه‌گاه به جسم وارد می‌کند برابر است با:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F_N} + \vec{f_s} = -۲۵۰\vec{i} + ۵۰۰\vec{j} \\ F_N = mg = ۵۰۰N \Rightarrow \vec{F_N} = ۵۰۰\vec{j} \end{cases}$$



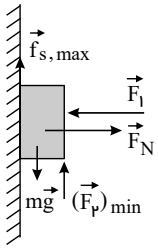
گام چهارم: امّا سؤال نیروی وارده از طرف جسم به سطح را خواسته است:



$$\Rightarrow \vec{R'} = -\vec{R} = ۲۵۰\vec{i} - ۵۰۰\vec{j}$$

۵ - گزینه ۱ بسته به اندازهٔ قائم $\vec{F}_۲$ ، جسم می‌تواند در آستانهٔ حرکت به سمت پایین و یا بالا باشد.

اگر جسم در آستانهٔ حرکت به سمت پایین باشد، اندازهٔ نیروی $\vec{F}_۲$ ، کمترین مقدار است و نیروی اصطکاک ایستایی به‌طرف بالا بر جسم وارد می‌شود. با رسم نیروهای وارد بر جسم داریم:



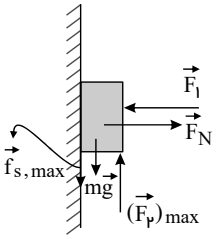
$$(F_{net})_x = ۰ \Rightarrow F_N = F_۱ = ۱۲۰N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۲۵ \times ۱۲۰ \Rightarrow f_{s,max} = ۳۰N$$

$$(F_{net})_y = ۰ \Rightarrow (F_۲)_{min} + f_{s,max} = mg$$

$$\Rightarrow (F_۲)_{min} + ۳۰ = ۴ \times ۱۰ \Rightarrow (F_۲)_{min} = ۱۰N$$

اگرجسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا باشد، اندازهٔ نیروی $\vec{F}_۲$ ، بیشترین مقدار است و نیروی اصطکاک ایستایی به طرف پایین بر جسم وارد می‌شود. با رسم نیروهای وارد بر جسم در این حالت داریم:



$$(F_{net})_x = ۰ \Rightarrow F_N = F_۱ = ۱۲۰N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۲۵ \times ۱۲۰ \Rightarrow f_{s,max} = ۳۰N$$

$$(F_{net})_y = ۰ \Rightarrow (F_۲)_{max} = f_{s,max} + mg$$

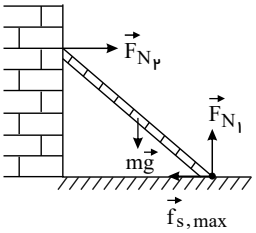
$$\Rightarrow (F_۲)_{max} = ۳۰ + ۴ \times ۱۰ \Rightarrow (F_۲)_{max} = ۷۰N$$

بنابراین اختلاف اندازهٔ بیشترین و کمترین مقدار نیروی $\vec{F}_۲$ برای اینکه جسم در آستانهٔ حرکت باشد، برابر است با:

$$\Delta F_۲ = ۷۰ - ۱۰ = ۶۰N$$

۶ - گزینه ۱

چون نردبان در آستانهٔ سُر خوردن (حرکت) است. بنابراین نیروی خالص وارد بر نردبان در دو راستای افقی و عمودی صفر است، بنابراین داریم:



$$F_{net}=0 \Rightarrow \begin{cases}(F_{net})_y=0 \Rightarrow F_{N_1}=mg=200N \\ (F_{net})_x=0 \Rightarrow F_{N_2}=f_{s,max} \quad (*)\end{cases}$$

اندازهٔ نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با:

$$f_{s,max}=\mu_s F_{N_1}=0/75\times 200=150N$$

بنابراین:

$$\overset{*}{\rightarrow} F_{N_2}=f_{s,max}=150N$$

از طرف سطح افقی دو نیروی عمود بر هم $\vec{F_{N_1}}$ و $\vec{f}_{s,max}$ بر نردبان وارد می‌شود، بنابراین:

$$R=\sqrt{F_{N_1}^2+f_{s,max}^2}=\sqrt{200^2+150^2}=250N$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$\frac{F_{N_2}}{R}=\frac{150}{250}=\frac{3}{5}$$

۷ - گزینه ۲ با استفاده از رابطهٔ مربوط به قانون دوم نیوتون، نیروهای خالص وارد بر جسم را محاسبه می‌کنیم سپس با استفاده از جمع‌برداری دو نیروی $\vec{F}_i, \vec{F}_j$، $\vec{F}_2$ را می‌یابیم.

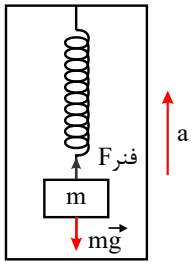
$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{net}}{m} \Rightarrow 2\vec{i}-4\vec{j}=\frac{\vec{F}_{net}}{1/5} \Rightarrow \vec{F}_{net}=3\vec{i}-6\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{net}=\vec{F_1}+\vec{F_2} \Rightarrow 3\vec{i}-6\vec{j}=2\vec{i}-5\vec{j}+\vec{F_2} \Rightarrow \vec{F_2}=\vec{i}-\vec{j}$$

۸ - گزینه ۲ مطابق شکل ابتدا از شرط تعادل وزنه در حالت سکون آسانسور، جرم وزنه متصل به آن را به دست می‌آوریم:

$$\Delta L_1=180-150=30cm$$

$$F_{net}=0 \Rightarrow F_{فنر}-mg=0$$
$$\Rightarrow k\Delta L_1=mg \Rightarrow 200\times 0/3=m\times 10 \Rightarrow m=6kg$$



اکنون اگر فرض کنیم، آسانسور از حالتی که فنر طول عادی خود را دارد با شتاب a روبه‌بالا شروع کند تا وزنه به کف آسانسور برسد، خواهیم داشت:

$$\Delta L_2=\Delta L_1+7/5cm=30+7/5=37/5cm$$

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_{فنر}-mg=ma \Rightarrow k\Delta L_2-mg=ma$$

$$\Rightarrow 200\times 37/5\times 10^{-2}-60=6a \Rightarrow a=2/5\frac{m}{s^2}$$

۹ - گزینه ۱ در اینجا ظرفیت ثابت، بار متغیر و درنتیجه انرژی نیز تغییر کرده، پس داریم:

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\frac{(1/25Q)^2}{2\times 5}-\frac{Q^2}{2\times 5}=90$$

$$\frac{0/5625Q^2}{10}=90 \Rightarrow Q=40\mu C$$

$$V=\frac{Q}{C}$$

$$V=\frac{40}{5}=8V$$

۱۰ - گزینه ۱ از آنجا که با افزایش ظرفیت خازن بار ذخیره شده در آن تغییر نکرده است، بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر خازن کاهش یافته است.

$$\left.\begin{matrix} Q=CV \\ Q'=(C+۲)(V-۱) \end{matrix}\right\} \rightarrow Q'=Q-C+۲V-۲$$

$$\xrightarrow[C=\frac{۱۲}{V}]{Q=Q'=۱۲\mu C} \frac{۱۲}{V}=۲(V-۱) \rightarrow ۶=V^{۲}-V \rightarrow V^{۲}-V-۶=۰$$

$$\rightarrow (V+۲)(V-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases} V=-۲V \text{ غ ق ق} \\ V=۳V \xrightarrow{C=\frac{۱۲}{V}} C=۴\mu F \end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ انرژی ذخیره شده در خازن داریم:

$$\xrightarrow[U'=\frac{۱}{۲}C'V'^{۲}]{C'=C+۲=۶\mu F, V'=V-۱=۲V} U'=\frac{۱}{۲}\times ۶ \times ۲^{۲}=۱۲\mu J$$