

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ تابع $f(x) = x^2 + 2x + 5$ را به صورت مربع کامل می نویسیم و داریم:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 4$$

توجه کنید که باید از تابع $f(x)$ به $y = x^2$ برسیم، پس داریم:

$$f(x) = (x+1)^2 + 4 \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = (x-1+1)^2 + 4 = x^2 + 4 \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{واحد به}} y = x^2 + 4 - 4 = x^2$$

بنابراین باید f را یک واحد به راست و سپس ۴ واحد به پایین منتقل کنیم تا $y = x^2$ به دست آید.

۲ - گزینه ۱ فرض می کنیم x_i صفر تابع f ، x'_i صفر تابع g و n تعداد صفرهای تابع f باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 6 \quad (*)$$

از طرفی بین صفرهای تابع f و صفرهای تابع g رابطه زیر برقرار است:

$$1 - \frac{x'_i}{2} = x_i$$

حال رابطه $(*)$ به صورت زیر تغییر می کند:

$$1 - \frac{x'_1}{2} + 1 - \frac{x'_2}{2} + \dots + 1 - \frac{x'_n}{2} = n - \frac{(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n)}{2} = 6$$

مجموع x'_i ها برابر ۴- است.

$$\Rightarrow n - \frac{-4}{2} = n + 2 = 6 \Rightarrow n = 4$$

۳ - گزینه ۱

$$-\sqrt{3} \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq f(x-1) \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{6} \leq \sqrt{2}f(x-1) \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{6} \leq \sqrt{2}f(x-1) + 1 \leq 2\sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع} = [-\sqrt{6} + 1, 2\sqrt{2} + 1] \simeq [-1.5, 3.8] \Rightarrow \text{اعداد صحیح} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

۴ - گزینه ۳

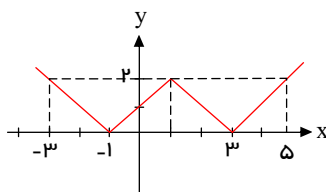
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 5, \quad g(x) = t \Rightarrow f(t) = 3t + 5 \Rightarrow f(x) = 3x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 9x^2 + 3 \circ x + 26 \Rightarrow g(3x + 5) = 9x^2 + 3 \circ x + 26 + 1$$

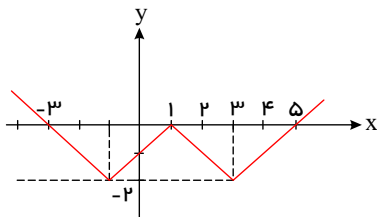
$$\Rightarrow g(3x + 5) = (3x + 5)^2 + 1 \Rightarrow g(x) = x^2 + 1$$

۵ - گزینه ۱

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است:



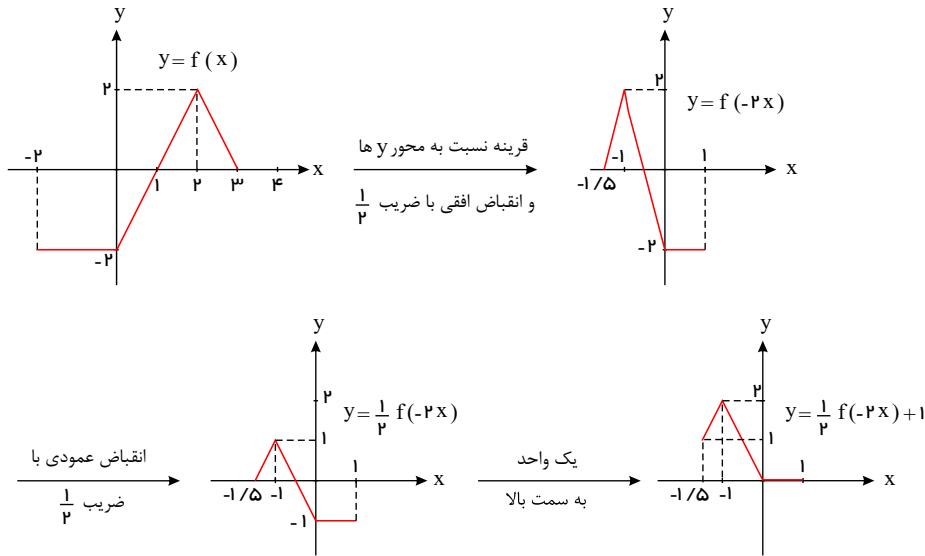
اگر آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم، خواهیم داشت:



بنابراین مساحت محدود بین $f(x)$ انتقال یافته و محور x ها، برابر است با:

$$S = \frac{4 \times 2}{2} + \frac{4 \times 2}{2} = 8$$

۶ - گزینه ۲ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می آید. سپس با انجام انتقال و انقباض، نمودار تابع $y = \frac{1}{2}f(-2x) + 1$ را به دست



پس دامنه تابع $y = \frac{1}{2}f(-2x) + 1$ برابر با $[-1/5, 1]$ و برد آن $[0, 2]$ است که اشتراک آن‌ها بازه $[0, 1]$ می‌شود.

۷ - گزینه ۳

$$f(x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \rightarrow D_f: \text{مخرج} = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0$$

$$\rightarrow x = 0, x = -2 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$$

$$g(x) = \sqrt{-x^2 - x} \rightarrow D_g: -x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(-x - 1) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 \leq x \leq 0$$

$$D_{g \circ f}(x) = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \neq 0, -2, -1 \leq -\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \leq 0\}$$

$$= \{x \neq 0, -2, 0 \leq \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \leq 1\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \geq 0 \xrightarrow{\text{صورت کسر همواره مثبت است چون } a > 0 \text{ و } \Delta < 0 \text{ است.}} x^2 + 2x > 0 \quad (I) \\ \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} \leq 1 \rightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{2}{x^2 + 2x} \leq 0 \rightarrow x^2 + 2x < 0 \quad (II) \end{array} \right.$$

واضح است که (I) و (II) هیچ اشتراکی ندارند پس $D_{g \circ f}(x) = \{ \}$ است.

۸ - گزینه ۲

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1, D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{4 - x} + 1, D_g = (-\infty, 4]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \leq 4 | (\sqrt{4 - x} + 1) \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 4]$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{4 - x} + 1) = (\sqrt{4 - x} + 1 - 1)^2 - 1$$

$$= 4 - x - 1 = 3 - x, D_{f \circ g} = (-\infty, 4]$$

برای پیدا کردن برد $f \circ g$ ، از روی دامنه $f \circ g$ شروع به ساختن $f \circ g$ می‌کنیم:

$$x \leq 4 \Rightarrow -x \geq -4 \Rightarrow 3 - x \geq -1 \Rightarrow f \circ g(x) \geq -1 \Rightarrow R_{f \circ g} = [-1, +\infty)$$

۹ - گزینه ۲ ابتدا زوج مرتب $2f + g$ و $f \circ g$ را می‌یابیم.

برای محاسبه $2f$ باید مؤلفه دوم f را در ۲ ضرب کنیم.

$$2f = \{(2, 2), (1, 12), (4, 12)\}$$

برای محاسبه $2f + g$ باید زوج مرتب‌های $2f$ ، g که مؤلفه اول برابر دارند، مؤلفه دوم آن‌ها را باهم جمع کنیم.

$$2f + g = \{(2, 6), (1, 14)\}$$

برای محاسبه زوج مرتب $f \circ g$ ، از تعریف تابع $f \circ g$ استفاده می‌کنیم.



$$\begin{aligned} D_{fog} &= \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} \\ D_g &\rightarrow g(x) \rightarrow f(x) \\ \left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \\ 6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \end{array} \right\} &\Rightarrow fog = \{(1, 1), (2, 6), (6, 6)\} \\ \Rightarrow \frac{f+g}{fog} &= \{(1, \frac{14}{3}), (2, \frac{6}{5})\} = \{(1, 14), (2, 1)\} \end{aligned}$$

۱۰ - گزینه ۴ را با $\frac{3}{x}$ جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+5}{x-5}\right) &= x+9 \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x+5}{x-5}} f\left(\frac{\frac{x+5}{x-5}+5}{\frac{x+5}{x-5}-5}\right) = \frac{3}{x} + 9 \\ \Rightarrow f\left(\frac{\frac{x+5}{x-5}}{\frac{x+5}{x-5}-5}\right) &= \frac{3+9x}{x} \Rightarrow f\left(\frac{3+5x}{3-5x}\right) = \frac{3+9x}{x} \end{aligned}$$

۱۱ - گزینه ۲

A^{-1} را از سمت چپ در رابطه ماتریسی ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AX &= A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} \underbrace{A^{-1}A}_I X = A^{-1}(A - 2I) \Rightarrow X = A^{-1}A - 2A^{-1}I \\ \Rightarrow X &= I - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۲ - گزینه ۴ نکته: اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ و k عدد حقیقی باشد، آنگاه $|kA| = k^n |A|$.

طبق فرض داریم:

$$||A|A| = |4A| = 4^3 |A| = 4^3 \times 4 = 4^4 = 256$$

۱۳ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-3)(-1) - 4 \times 2} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\ \alpha A + \beta I &= A^{-1} \rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \beta - \alpha & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow 2\alpha = \frac{2}{5} \rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \\ \beta - \alpha &= \frac{3}{5} \xrightarrow{\alpha = \frac{1}{5}} \beta - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \rightarrow \beta = \frac{4}{5} \\ \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4 \end{aligned}$$

۱۴ - گزینه ۴ می‌دانیم در قضیه تقسیم $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$ است. بنابراین $r = q^2 - 2$ بوده و داریم:

$$\begin{aligned} a &= 37q + q^2 - 2 \\ 0 \leq r \leq b &\Rightarrow q^2 - 2 < 37 \Rightarrow q^2 < 39 \\ \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} \max(q) &= 6 \Rightarrow \max(a) = 37 \times 6 + 6^2 - 2 = 222 + 34 = 256 = 16^2 \end{aligned}$$

۱۵ - گزینه ۳ حاصل دترمینان را با بسط دادن نسبت به سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} &= -(x-3)(4x+8) + (x-2)(6x+18) = 0 \\ \Rightarrow -4x^2 - 8x + 12x + 24 &+ 6x^2 + 18x - 12x - 36 = 0 \\ \Rightarrow 2x^2 + 10x - 12 &= 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -6 \end{aligned}$$

۱۶ - گزینه ۴ دترمینان موردنظر را توسط دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{دترمینان اول}} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = (0 + 10 + 72) - (-3 + 60 + 0) = 25$$

۱۷ - گزینه ۱

$$d = (\Delta n - 2, 12n + 7) \Rightarrow \begin{cases} d | \Delta n - 2 \\ d | 12n + 7 \end{cases}$$

می‌دانیم اگر $d | a$ و $d | b$ باشد، در این صورت $d | (ma + nb)$ ، یعنی d هر ترکیب خطی از a و b را نیز عاد می‌کند، داریم:

$$d | 12 \times (\Delta n - 2) + (-5)(12n + 7) \Rightarrow d | -59 \Rightarrow d | 59 \Rightarrow d = 59 \text{ یا } d = 1$$

با توجه به اینکه $\Delta n - 2$ و $12n + 7$ نسبت به هم اول نیستند، بنابراین ب. م. آنها باید ۵۹ باشد.

۱۸ - گزینه ۴ اگر x عددی صحیح باشد آنگاه تنها در صورتی y نیز عددی صحیح خواهد بود که صورت کسر بر مخرج کسر بخش‌پذیر باشد. بنابراین:



$$y = \frac{3x-1}{x+2}$$

$$x+2 \mid 3x-1, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x+2 \mid 3x-1 \\ x+2 \mid x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 \mid 3x-1 \\ x+2 \mid 3x+6 \end{cases} \Rightarrow x+2 \mid 7$$

$$\Rightarrow x+2 = -1 یا ۱ یا ۷ یا ۱۱$$

$$\Rightarrow x = -۳ یا -۱ یا ۹ یا ۱۱$$

a	-۳	-۱	-۹	۵
b	۱۰	-۴	۴	۲

۱۹ - گزینه ۴ با توجه به تعریف ب.م.م داریم:

$$\begin{cases} d \mid 3n^2 - 2n + 6 \\ d \mid 3n + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 3n^2 - 2n + 6 \quad (1) \\ d \mid (3n+5)n \Rightarrow d \mid 3n^2 + 5n \quad (2) \end{cases}$$

رابطه (۲) و (۱) را از هم کم می‌کنیم: داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 7n - 6 \\ d \mid 3n + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 7(3n+5) - 6(3n+5) \\ d \mid 7(3n+5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid -21n + 18 \\ d \mid 21n + 35 \end{cases} \Rightarrow d \mid 53 \xrightarrow{d \neq 1} d = 53$$

۲۰ - گزینه ۱

$$8x^2 + xy + 3x - y = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 3x = y - xy = y(1-x) \Rightarrow y = \frac{8x^2 + 3x}{1-x}$$

$$y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x \mid 8x^2 + 3x \\ 1-x \mid 8(1-x^2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x \mid 3x+8 \\ 1-x \mid 3(1-x) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 1-x \mid 11 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=2 & \checkmark \\ x-1=11 \Rightarrow x=12 & \checkmark \\ x-1=-1 \Rightarrow x=0 & \checkmark \\ x-1=-11 \Rightarrow x=-10 & \checkmark \end{cases}$$

۲۱ - گزینه ۲ اگر جهت مثبت را به سمت پایین بگیریم، معادله سرعت به صورت زیر درمی‌آید.

$$v = gt \Rightarrow v = 10t$$

$$\begin{cases} t_1 = 2,5 \Rightarrow v_1 = 25 \frac{m}{s} \\ t_2 = 3,5 \Rightarrow v_2 = 35 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = \frac{25 + 35}{2} \times 1 = 30 \frac{m}{s}$$

۲۲ - گزینه ۲ از آنجا که بزرگی سرعت گلوله در ابتدای ۵۰ متر پایانی حرکتش معلوم است، با استفاده از رابطه سرعت - جابه‌جایی فاصله نقطه رها شدن تا رسیدن به این سرعت را محاسبه می‌کنیم.

$$v_1^2 - 0^2 = 2g\Delta y_1 \Rightarrow 15^2 - 0 = 2 \times 10 \Delta y_1 \Rightarrow \Delta y_1 = \frac{225}{20} = 11,25m$$

$$h = \Delta y_1 + 50m = 11,25 + 50 = 61,25m$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 61,25 = \frac{1}{2} \times 10t^2 \Rightarrow t^2 = 12,25 \Rightarrow t = 3,5s$$

۲۳ - گزینه ۳ با توجه به رابطه سرعت متوسط، داریم:

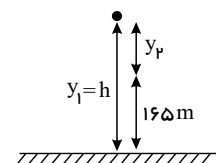
$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow -55 = \frac{\Delta y}{3} \Rightarrow \Delta y = -165m$$

حال طبق معادله مکان - زمان در حرکت سقوط آزاد و با توجه به این که متحرک ۱۶۵ متر آخر سقوط را در مدت ۳s طی کرده است. می‌توان نوشت:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow \begin{cases} -h = -\frac{1}{2}gt^2 & (1) \\ -h + 165 = -\frac{1}{2}g(t-3)^2 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} -\frac{1}{2}gt^2 + 165 = -\frac{1}{2}g(t-3)^2 \Rightarrow -\frac{1}{2}g[t^2 - (t-3)^2] = 165 \Rightarrow t = 7s$$

بنابراین مدت زمان حرکت گلوله از لحظه رها شدن تا رسیدن به زمین برابر با ۷s است. در نتیجه سرعت برخورد گلوله به زمین برابر است با:





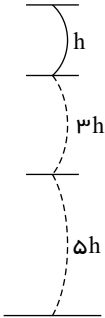
$$v = -gt \Rightarrow v = -10 \times 7 \Rightarrow |v| = 70 \text{ m/s}$$

۲۴ - گزینه ۲

در سقوط آزاد یک گلوله، نسبت جابه‌جایی‌های گلوله در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، همانند نسبت اعداد فرد متوالی است، یعنی ۱ به ۳ به ۵ به ۷ و....

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \begin{cases} t = 1s \Rightarrow \Delta y_1 = 5m = \Delta x_1 \\ t = 2s \Rightarrow \Delta y_2 = 20m = \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 = 5m, \Delta x_2 = 15m \Rightarrow \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 3$$



۲۵ - گزینه ۳

اگر فاصله زمانی رها شدن دو گلوله را t_0 فرض کنیم، زمان حرکت اولی t و زمان حرکت دومی $(t - t_0)$ خواهد بود؛ بنابراین داریم:

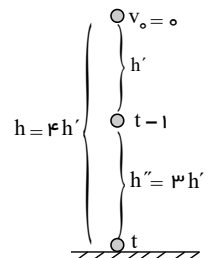
$$\begin{cases} \Delta y_1 = \frac{1}{2}gt^2 \\ \Delta y_2 = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 = \frac{1}{2}gt^2 - gtt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2 \end{cases}$$

$$\Delta y_1 - \Delta y_2 = gtt_0 - \frac{1}{2}gt_0^2$$

با توجه به گذشت زمان و افزایش t ، فاصله گلوله‌ها زیاد می‌شود.

۲۶ - گزینه ۱ مسافت طی شده در ثانیه آخر ۳ برابر مسافتی است که قبل از آن طی کرده است. با استفاده از رابطه $\Delta y = \frac{1}{2}gt^2$ داریم:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \begin{cases} h' = \frac{1}{2}g(t-1)^2 \\ 4h' = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{h'}{4h'} = \frac{\frac{1}{2}g(t-1)^2}{\frac{1}{2}gt^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{t-1}{t} \Rightarrow t = 2$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20m \Rightarrow h = 20m$$

۲۷ - گزینه ۱ جهت مثبت را به سوی پایین فرض می‌کنیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y, \quad a = +g$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gh \Rightarrow (30)^2 = 2 \times 10h \Rightarrow h = 45 \text{ متر}$$

۲۸ - گزینه ۳

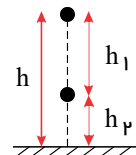
در آخرین ثانیه سقوط ۳۵ متر جابه‌جا شده، پس کاملاً ۴ ثانیه در راه بوده، زیرا:

$$h - h_1 = 35 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-1)^2 = 35$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 - \frac{1}{2} \times 10(t^2 - 2t + 1) = 35 \Rightarrow t = 4s$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = 80m$$

۲۹ - گزینه ۱ ۸۰ متر آخر سقوط را در دو ثانیه طی کرده، پس کلاً ۵ ثانیه در راه بوده، زیرا:



$$h_2 = \lambda_0 m$$

$$h - h_1 = \lambda_0$$

$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-2)^2 = \lambda_0 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 + 2gt - 2g = \lambda_0 \Rightarrow t = 5s$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 5^2 = 125m$$

۳۰ - گزینه ۳

با انتخاب جهت مثبت محور yها رو به پایین داریم:

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v^2 = 2 \times 10 \times 45 \Rightarrow v^2 = 900 \Rightarrow v = 30 \frac{m}{s}$$

۳۱ - گزینه ۳

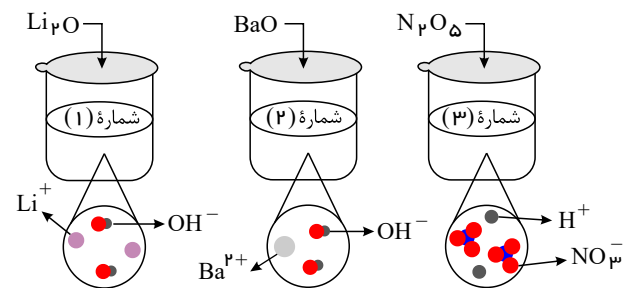
معادله جابه‌جایی را یک بار برای کل مسیر و بار دیگر برای نیمه مسیر نوشته و با هم مقایسه می‌کنیم، یعنی:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ h' = \frac{1}{2}gt'^2 \Rightarrow t'^2 = \frac{2h'}{g} \end{cases}$$

۳۲ - گزینه ۳ برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی مواد شوینده، به آن‌ها نمک‌های فسفات می‌افزایند، زیرا این نمک‌ها با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند و از تشکیل رسوب و لکه جلوگیری می‌کنند.

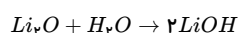
۳۳ - گزینه ۳ یونش را برای ترکیب‌های مولکولی در نظر می‌گیریم، چون طبق تعریف به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود؛ یونش می‌گویند. پس استفاده از لفظ یونش برای ترکیب‌های یونی مانند منیزیم هیدروکسید نادرست است و باید از عبارت «تفکیک یونی» استفاده کرد.

۳۴ - گزینه ۲ مورد «آ» و «پ» درست است.



با توجه به شکل داریم:

مورد ب) واکنش اکسید شماره (۱) با آب:

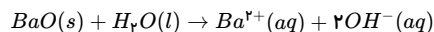


(مجموع ضرایب واکنش = ۴)

مورد ت) محلول شماره (۳) اسیدی و محلول شماره‌های ۱ و ۲ بازی هستند.

پس فقط محلول شماره ۳ کاغذ pH را سرخ رنگ خواهد کرد.

۳۵ - گزینه ۲



هر مول CaO ، ۳ مول یون ایجاد می‌کند؛ بنابراین ۳ مول از آن ۹ مول یون تولید می‌کند. پس در هر ۹ لیتر آب، ۹ مول یون وجود خواهد داشت و غلظت یون‌های تولیدشده ۱ مول بر لیتر می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

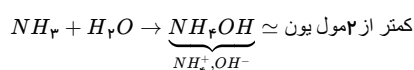
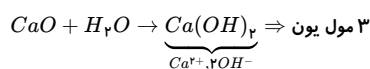
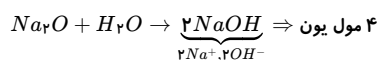
گزینه «۱»: شیمی‌دان‌ها از جمله آرنیوس، قبل از توصیف علمی اسیدها و بازها، با برخی ویژگی‌ها و واکنش‌های بین این مواد آشنا بودند.

گزینه «۳»: این عنصر یک نافلز (S) است و اکسیدهای نافلزی، اسید آرنیوس محسوب می‌شوند.

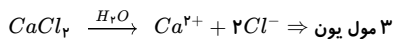
گزینه «۴»: نادرست است. زیرا سرکه یک اسید است و در محلول‌های اسیدی $\frac{[H_3O^+]}{[OH^-]} > 1$ یا $\frac{[OH^-]}{[H_3O^+]} < 1$ می‌باشد.

۳۶ - گزینه ۲

حل کردن سدیم اکسید در آب تولید $NaOH$ می‌کند:



* آمونیاک، الکترولیت ضعیف است و در آب به‌طور عمده به صورت مولکولی حل می‌شود و به مقدار کم یون تولید می‌کند:



چون تعداد یون‌ها در محلول Na_2O بیشتر است، در نتیجه رسانا تر است.

۳۷ - گزینه ۲ تمام محلول‌های داده شده اسیدی هستند و می‌توان گفت در محلولی که غلظت یون H^+ بیشتر است، شمار یون‌های موجود در محلول بیشتر بوده و رسانای الکتریکی آن محلول بیشتر است.

گزینه ۱) نیتریک اسید، یک اسید قوی تک پروتون دار است بنابراین $[H^+] = [HNO_3]$ است پس غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر $10^{-4} \times 2$ مولار می‌باشد.
گزینه ۲)

$$\frac{\text{غلظت یون هیدرونیوم}}{\text{غلظت هیدروفلوئوریک اسید}} \times 100 \Rightarrow 2.4 = \frac{[H^+]}{0.05} \times 100$$

$$\Rightarrow [H^+] = 12 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

گزینه ۳) هیدروکلریک اسید یک اسید قوی تک پروتون دار است بنابراین $[H^+] = [HCl]$ پس غلظت H^+ (هیدرونیوم) در آن برابر 10^{-4} مولار می‌باشد.
گزینه ۴)

$$1 = \frac{[H^+]}{6 \times 10^{-4}} \Rightarrow [H^+] = 6 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

۳۸ - گزینه ۴ بررسی عبارت‌ها:

الف - نادرست است. برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک می‌افزایند.

ب - نادرست است. اغلب داروها، ترکیب‌های شیمیایی با خاصیت اسیدی یا بازی هستند.

پ - نادرست است. فاضلاب‌های صنعتی (نه خانگی) با ورود به محیط زیست pH محیط را تغییر می‌دهند.

ت - نادرست است. اغلب میوه‌ها دارای اسیدند و در آن‌ها $[H_3O^+] < [OH^-]$ است.

۳۹ - گزینه ۳ ابتدا شمار مول H_2F را تعیین می‌کنیم.

$$? \text{ mol } H_2F = 4 \text{ g } H_2F \times \frac{1 \text{ mol } H_2F}{20 \text{ g } H_2F} = 0.2 \text{ mol } H_2F$$

غلظت H_2F حل شده در محلول برابر است با:

$$[H_2F] = \frac{\text{مول } H_2F}{\text{حجم محلول (L)}} = \frac{0.2 \text{ (mol)}}{0.2 \text{ (L)}} = 1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

با توجه به رابطه درجه یونش غلظت یون هیدرونیوم (یا هیدروژن) را تعیین می‌کنیم:

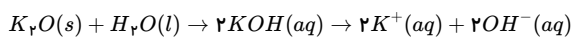
$$\text{درصد یونش} = \alpha \times 100 \Rightarrow 2.5 = \alpha \times 100 \Rightarrow \alpha = 0.025$$

$$\alpha = \frac{[H^+]}{[H_2F]_{\text{اولیه}}} \Rightarrow 0.025 = \frac{[H^+]}{1 \text{ (mol} \cdot L^{-1})} \Rightarrow [H^+] = 0.025 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

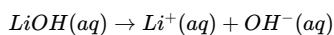
۴۰ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: کاغذ pH در محیط بازی آبی رنگ می‌شود.

اکسیدهای فلزی، باز آرنیوس هستند. این مواد هنگام انحلال با آب واکنش می‌دهند و هیدروکسید فلز تولید می‌کنند. با جدا شدن یون‌های هیدروکسید فلز در آب، غلظت یون OH^- زیاد می‌شود.



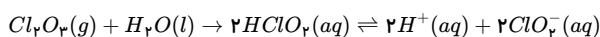
گزینه ۲: در محلول بازی غلظت یون هیدروکسید بیشتر از غلظت یون هیدرونیوم است.



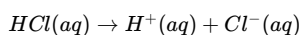
یون OH^- آزاد کرده پس باز آرنیوس است.

گزینه ۳: در محلول‌های اسیدی غلظت یون هیدرونیوم بیشتر از غلظت یون هیدروکسید است.

اکسیدهای نافلزی، اسید آرنیوس هستند. این مواد هنگام انحلال با آب واکنش می‌دهند و فرآورده واکنش به صورت یونی در آب حل می‌شود و غلظت یون H^+ را زیاد می‌کند.



گزینه ۴:



یون H^+ تولید کرده پس اسید آرنیوس است.

۴۱ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: هر دو محلول (آ) و (ب) دارای یون هستند؛ در نتیجه رسانایی الکتریکی دارند.

گزینه ۲: با توجه به اینکه اسیدها تک‌پروتئین دار هستند، شمار آنیون‌ها و کاتیون‌های تولید شده برابر خواهد بود.

گزینه ۳: یون اطراف قطب مثبت محلول (ب) می‌تواند از گروه ۱۷ جدول تناوبی باشد. (HF)

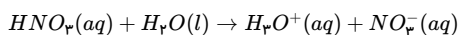
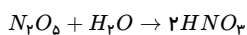
گزینه ۴: محلول (ب) برخلاف محلول اتانول در آب، با قرار دادن لامپ در مدار آن، به حالت نیمه‌روشن درخواهد آمد. (اتانول کاملاً به شکل مولکولی در آب حل می‌شود و هیچ یونی تولید نمی‌کند، پس محلول اتانول، رسانایی الکتریکی ندارد).

۴۲ - گزینه ۴ طبق مدل آرنیوس موادی مانند HCN که با حل شدن در آب، غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می‌دهند، اسید و موادی مانند Rb_2O که با حل شدن در آب، غلظت یون



هیدروکسید را افزایش می‌دهند، باز هستند؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول HCN بیشتر از محلول Rb_2O است.

۴۳ - گزینه ۴



۴۴ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: گاز هیدروژن تولید شده در لوله و مجرا فشار ایجاد می‌کند و باعث می‌شود مجرای بسته شده ساده تر باز شود.

گزینه ۲: فرآورده واکنش، ماده‌ای محلول در آب است اما قابلیت پاک کنندگی ندارد.

گزینه ۳: افزایش دما سرعت واکنش‌ها را افزایش می‌دهد.

گزینه ۴: مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید به صورت پودر عرضه می‌شود.

۴۵ - گزینه ۱ ابتدا با استفاده از رابطه درجه یونش، غلظت اولیه متانویک اسید را تعیین می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{[HCOOH]_{\text{اولیه}}} \Rightarrow 0.02 = \frac{0.002}{[HCOOH]_{\text{اولیه}}} \Rightarrow [HCOOH]_{\text{اولیه}} = 0.1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

حال شمار مول متانویک اسید حل شده را به دست می‌آوریم:

$$[HCOOH] = \frac{\text{مول } HCOOH \text{ حل شده}}{\text{حجم محلول (L)}} \Rightarrow 0.1 = \frac{\text{مول } HCOOH}{0.1(L)} \Rightarrow \text{مول } HCOOH = 0.01 \text{ mol}$$

جرم اسید حل شده برابر است با:

$$0.01 \text{ mol } HCOOH \times \frac{46 \text{ g } HCOOH}{1 \text{ mol } HCOOH} = 0.46 \text{ g } HCOOH$$

۴۶ - گزینه ۲ موارد (آ) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

مورد «آ»: استیک اسید نسبت به نیترواسید ضعیف تر است (در شرایط یکسان، K_a کمتری دارد). پس در دما و غلظت یکسان از محلول این اسیدها، pH استیک اسید بیشتر است.

مورد «ب»: pH محلول از روی غلظت H^+ محاسبه می‌شود. غلظت H^+ نیز میزان یونش اسید و غلظت اسید بستگی دارد. ممکن است اسید ضعیف باشد و با وجود غلظت بالای خود اسید، غلظت H^+ تولیدی اندک باشد.

مورد «پ»: اسیدهای موجود در انگور، ریواس، مرکبات و همچنین سرکه سیب از جمله اسیدهای خوراکی و ضعیف هستند.

مورد «ت»: فرمول درجه یونش (α) به صورت زیر است:

$$\alpha = \frac{\text{شمار کل مولکول‌هایی که یونیده شدند}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل شده}}$$