

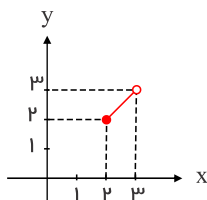
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ می‌دانیم ترکیب هر تابع معکوس‌پذیر با تابع معکوسش، تابع همانی است.

$$f \circ f^{-1}(x) = x, \quad x \in D_{f^{-1}} \text{ یا } x \in R_f$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x + [x] \Rightarrow f(x) = x + 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow 2 \leq x + 1 < 3 \Rightarrow 2 \leq f(x) < 3 \Rightarrow R_f = [2, 3)$$



$$y = f \circ f^{-1}(x) = x, \quad x \in [2, 3) \Rightarrow y = x, \quad 2 \leq x < 3 \Rightarrow$$

۲ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow f(6) = g(2a) \xrightarrow[f(6)=2]{(6,2) \in f} 2 = \frac{2a}{2a-1}$$

$$\Rightarrow 6a - 2 = 2a \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۳ - گزینه ۱ می‌دانیم فقط تابع ثابت $f(x) = k$ هم صعودی و هم نزولی است، پس داریم:

$$f(x) = (x-1)^2 + mx^2 - nx + 3 = x^2 - 2x + 1 + mx^2 - nx + 3$$

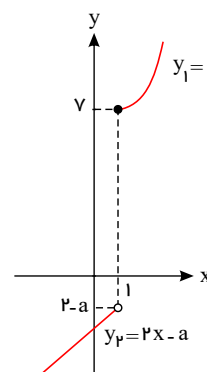
$$f(x) = (1+m)x^2 - (2+n)x + 4 \xrightarrow{f \text{ ثابت است}} \begin{cases} 1+m=0 \Rightarrow m=-1 \\ 2+n=0 \Rightarrow n=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \times n = (-1)(-2) = 2$$

۴ - گزینه ۴ شکلی معرف تابع یک‌به‌یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند و نه بیشتر.

با توجه به شکل فرضی زیر داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4, & x \geq 1 \\ 2x - a, & x < 1 \end{cases}$$



$$2 - a \leq 7 \Rightarrow a \geq -5$$

برای یک‌به‌یک بودن تابع $f(x)$ ، داریم:

با توجه به گزینه‌ها $a = -4$ قابل قبول است.

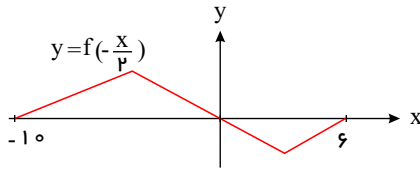
۵ - گزینه ۳ به ترتیب اعمال موردنظر داریم:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{واحدها انتقال به طرف‌های منفی}} f_1(x) = (x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} f_2(x) = -(x+4)^2 \xrightarrow{\text{دو برابر کردن عرض نقاط}} f_3(x) = -2(x+4)^2$$

$$\xrightarrow{\text{واحدها انتقال به طرف‌های منفی}} f_4(x) = -2(x+4)^2 - 3 = -2(x^2 + 8x + 16) - 3 = -2x^2 - 16x - 35$$

۶ - گزینه ۳ برای رسم $y = f(-\frac{1}{3}x)$ ، باید در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را بر $-\frac{1}{3}$ تقسیم کنیم (در ۲ ضرب کنیم).



زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$g(x) = \sqrt{xf(-\frac{x}{2})} \Rightarrow xf(-\frac{x}{2}) \geq 0$$

x	$-\infty$	-1	0	6	$+\infty$
x			-	+	
$f(-\frac{x}{2})$		○	+	○	-
$xf(-\frac{x}{2})$		○	-	○	-

عبارت $xf(-\frac{x}{2})$ در نقاط $x = -1, 0, 6$ صفر و در مابقی نقاط منفی است، پس داریم:

$$D_g = \{-1, 0, 6\}$$

۷ - گزینه ۳ در تابع نزولی به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به دامنه اگر $x_1 < x_2$ باشد آن گاه $f(x_1) \geq f(x_2)$ است. برای تعیین دامنه تعریف توابع رادیکالی با فرجه زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$f(2) - f(|x-1|) \geq 0 \rightarrow f(2) \geq f(|x-1|) \xrightarrow{f \text{ نزولی است}} 2 \leq |x-1|$$

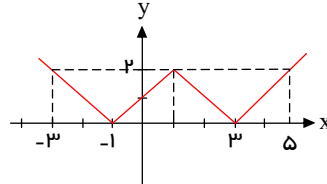
$$\rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3 \\ \text{یا} \\ x-1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

۸ - گزینه ۳ اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ ، آنگاه $a \geq b$ است. پس داریم:

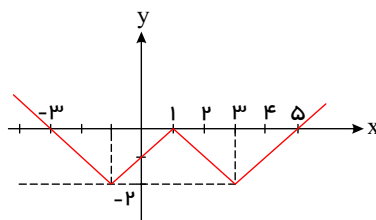
$$f(x-3) \leq f(3x+7) \Rightarrow x-3 \geq 3x+7 \Rightarrow -7-3 \geq 3x-x \Rightarrow 2x \leq -10 \Rightarrow x \leq -5$$

۹ - گزینه ۱

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است:



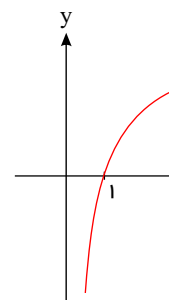
اگر آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم، خواهیم داشت:



بنابراین مساحت محدود بین $f(x)$ انتقال یافته و محور x ها، برابر است با:

$$S = \frac{4 \times 2}{2} + \frac{4 \times 2}{2} = 8$$

۱۰ - گزینه ۳ شکل فرضی x را می توان برای تابع f در نظر گرفت. برای تعیین دامنه تعریف توابع رادیکالی با فرجه زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر



مساوی صفر قرار دهیم.



$$(x^3 - x)f(x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 1 \\ f(x) = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

X	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^3 - x$	-	○	+	○	+
$f(x)$	-	-	-	○	+
عبارت ≥ 0	+	○	-	○	+

بنابراین دامنهٔ تعریف تابع داده شده به صورت $(-1, 0) \cup \mathbb{R}$ است پس:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow a + b = -1$$

۱۱ - گزینه ۲ دترمینان ماتریس 2A را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$|{}^2A| = \begin{vmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{vmatrix}$$

$${}^2 |A| = |A|^2 + 4 \rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

۱۲ - گزینه ۴ با توجه به فرض داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 4x + 5 & 1 \\ 2 & 6 & 3x + 1 \end{vmatrix} = 0$$

با کمی دقت در صورت دترمینان متوجه می شویم اگر $4x + 5 = -3$ باشد سطر اول و دوم قرینه یکدیگرند و بنابراین حاصل دترمینان صفر می شود.

به همین ترتیب اگر $3x + 1 = -2$ باشد ستون اول و سوم، قرینه یکدیگر می شوند و باز هم حاصل دترمینان صفر می شود. پس داریم:

$$\begin{aligned} 4x + 5 = -3 &\rightarrow x = -2 \\ 3x + 1 = -2 &\rightarrow x = -1 \end{aligned} \rightarrow \text{مجموع ریشه ها} = -3$$

۱۳ - گزینه ۱ طرفین فرض سؤال را در A ضرب کرده و از اتحاد مزدوج کمک می گیریم:

$$A = 4A^{-1} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A} A^2 = 4 \underbrace{AA^{-1}}_I \Rightarrow A^2 = 4I$$

$$\Rightarrow A^2 - I = 3I \Rightarrow (A + I)(A - I) = 3I \Rightarrow (A + I) \times \frac{1}{3}(A - I) = I$$

$$\Rightarrow (A + I)^{-1} = \frac{1}{3}(A - I)$$

۱۴ - گزینه ۲ شرط آنکه ماتریس A وارون پذیر نباشد عبارتست از:

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = 4$$

$$\rightarrow B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{مجموع درایه ها} = -2 + 5 - 7 + 3 = -1$$

۱۵ - گزینه ۲ مطابق فرض داریم:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3m - 4 = x \\ 2m = 2 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow 3(1) - 4 = x \rightarrow x = -1$$

۱۶ - گزینه ۴ ابتدا از توان های کوچک تر عدد ۷ شروع می کنیم:

$$7^2 \equiv 49 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 343 \equiv 42 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 7^6 \equiv 1$$

مطابق فرض داریم:

$$13 \times 7^{54} + A \equiv 0 \Rightarrow 13 \times (7^6)^9 + A \equiv 13 \times 1 + A \equiv 0$$

$$\Rightarrow A \equiv -13 \equiv \boxed{30} \leftarrow \text{کوچک ترین عدد طبیعی}$$

۱۷ - گزینه ۳ طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$500 + b = bq + 20 \Rightarrow bq - b = 480 \Rightarrow b(q - 1) = 480$$

می دانیم باقی ماندهٔ کوچک تر از مقسوم علیه است، پس داریم:

$$b > r \Rightarrow b > 20 \Rightarrow b_{\min} = 24$$

$$24(q - 1) = 480 \Rightarrow q - 1 = 20 \Rightarrow q = 21$$



$$a = 15q + 7 \xrightarrow[\text{طرفین اضافه می‌کنیم.}]{\text{۴ واحد به}} a + 40 = 15q + 47 \Rightarrow a + 40 = 15(\underbrace{q+3}_{q'}) + 2 \Rightarrow a + 40 = 15q' + 2$$

خارج قسمت ۳ واحد افزایش و باقیمانده ۵ واحد کاهش یافته است.

۱۹ - گزینه ۱ روش اول:

نکته: اگر $a \equiv b^m$ و $a \equiv b^n$ آنگاه $a \equiv b^{[m,n]}$

$$\left. \begin{aligned} a &= 6q + 5 \Rightarrow a \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow a \equiv 29 \\ a &= 11q' + 7 \Rightarrow a \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 29 \end{aligned} \right\} \rightarrow a \equiv_{[6,11]=66} 29$$

روش دوم:

$$\left. \begin{aligned} a &= 6q + 5 \xrightarrow{\times 11} 11a = 66q + 55 \\ a &= 11q' + 7 \xrightarrow{\times 6} 6a = 66q' + 42 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-} 5a = 66(q - q') + 13 \Rightarrow 5a = 66q'' + 13$$

داشتیم $6a = 66q' + 42$ پس:

$$\left\{ \begin{aligned} 5a &= 66q'' + 13 \\ 6a &= 66q' + 42 \end{aligned} \right. \xrightarrow{-} a = 66(q' - q'') + 29 \Rightarrow a = 66k + 29$$

روش سوم:

گزینه‌ای درست است که باقی‌مانده آن بر ۶ عدد ۵ و باقی‌مانده آن بر ۱۱ عدد ۷ باشد.

۲۰ - گزینه ۴ عدد ۵ رقمی $\overline{a32b7}$ بر $99 = 9 \times 11$ بخش پذیر است. ($0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$)

$$\begin{aligned} \overline{a32b7} \equiv_9^0 &\Rightarrow a + 3 + 2 + b + 7 \equiv_9^0 \Rightarrow a + b \equiv_9^6 \\ \overline{a32b7} \equiv_{11}^0 &\Rightarrow 7 - b + 2 - 3 + a \equiv_{11}^0 \Rightarrow a - b \equiv_{11}^5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b \equiv_9^6 \Rightarrow a, b \in \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 6 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 7 \\ 8 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 9 \\ 6 \end{matrix} \right\} \\ a - b \equiv_{11}^5 \end{cases}$$

از بین مقادیر بالا فقط $a = 0$ و $b = 6$ در رابطه‌ی دوم صدق می‌کند چون $a \neq 0$ پس مقدار قابل قبول برای a, b وجود ندارد.

۲۱ - گزینه ۴ در مدت زمان واکنش راننده (t_1) متحرک با سرعت ثابت ($v = 108 \frac{km}{h} = 30 \frac{m}{s}$) حرکت می‌کند و در مدت زمان ترمز (t_2) اتومبیل با شتاب ثابت (کندشونده) حرکت می‌کند.

$$\begin{aligned} v &= 30 \frac{m}{s} & v &= 30 \frac{m}{s} & v &= 0 \\ \Delta x_1, t_1 & & \Delta x_2, t_2, a_2 = -3 \frac{m}{s^2} & & \\ \text{حرکت یکنواخت (} a &= 0) & \text{شتاب‌دار با شتاب ثابت} & & \\ \Delta x_{\text{کل}} &= 165 \text{ m} \end{aligned}$$

ابتدا جابه‌جایی متحرک در مرحله دوم را با استفاده از رابطه $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 900 = 2(-3)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 150 \text{ m} \\ \Delta x_1 + \Delta x_2 &= 165 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 + 150 = 165 \Rightarrow \Delta x_1 = 15 \text{ m} \\ \Delta x_1 &= vt_1 \Rightarrow 15 = 30t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \text{ s} \end{aligned}$$

برای محاسبه زمان حرکت متحرک در مرحله دوم از معادله $v = at + v_0$ استفاده می‌کنیم.

$$v = at_2 + v_0 \xrightarrow[v_0 = 30, a = -3]{v = 0} 0 = (-3)t_2 + 30 \Rightarrow t_2 = 10 \text{ s}$$

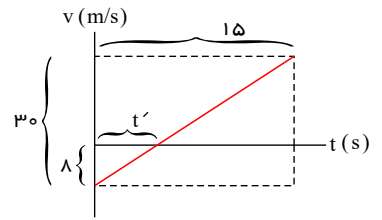
$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \text{ برابر است با: } 20$$

۲۲ - گزینه ۴ در ابتدا لحظه تلاقی نمودار با محور زمان (t') که همان لحظه تغییر جهت نیز هست را می‌یابیم.

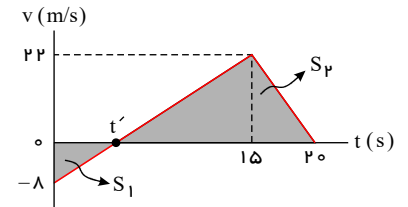
توجه: برای یافتن t' چندین روش وجود دارد. مثلاً می‌توان از قضیه تالس هم کمک گرفت (یا از شیب خط استفاده کرد).



$$\frac{t'}{15} = \frac{8}{30} \rightarrow \boxed{t' = 4s}$$

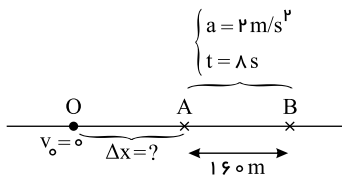


قدرمطلق سطح زیر نمودار $v - t$ ، برابر مسافت پیموده شده است.



$$\left. \begin{aligned} |S_1| &= \frac{8 \times 4}{2} = 16 \\ S_2 &= \frac{22 \times (15 - 4)}{2} = 116 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مسافت کل}} 16 + 116 = 132m$$

۲۳ - گزینه ۲ در ابتدا با توجه به معلوم بودن زمان جابه‌جایی، شتاب و مقدار جابه‌جایی AB ، سرعت در نقطه A را می‌یابیم



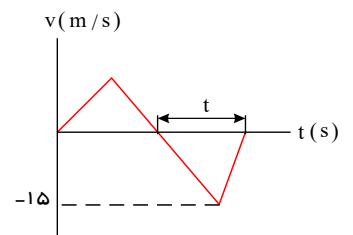
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_A t \rightarrow 160 = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(8)^2 + V_A(8) \rightarrow v_A = 12\left(\frac{m}{s}\right)$$

حال با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) بین دو نقطه O و A داریم:

$$v_A^2 - v_o^2 = 2a(\Delta x) \xrightarrow{v_o=0} (12)^2 - 0 = (2)(2)\Delta x \rightarrow \Delta x_{OA} = 36m$$

۲۴ - گزینه ۲ با توجه به نمودار اگر به اندازه t ثانیه جسم در خلاف جهت محور x حرکت کند، داریم:

$$|\Delta x| = S = \frac{15 \times t}{2} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{15 \times t}{2t} = 7.5 \frac{m}{s}$$



۲۵ - گزینه ۱ معادله مکان - زمان درجه ۲ بر حسب زمان است. بنابراین حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. (مشابه کتاب درسی از مشتق کمک نمی‌گیریم.)

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 4t - 8 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + x_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = +4 \\ v_o = +4 \end{cases} \rightarrow v = at + v_o = 4t + 4$$

مشخص است که $v \neq 0$ یعنی متحرک بر خط راست، بدون تغییر جهت است.

$$\frac{L}{|\Delta x|} = 1 \quad \text{بنابراین:}$$

۲۶ - گزینه ۱

می‌دانیم که در این سوال که متحرک فقط در یک جهت حرکت کرده (همواره $v > 0$) و نمودار $v - t$ آن به صورت یک مثلث است. سرعت متوسطش، نصف ارتفاع مثلث است. یعنی:

$$v_{av} = \frac{1}{2}v_{\max} \xrightarrow{V_{av}=10 \frac{m}{s}} 10 = \frac{1}{2}v_{\max} \rightarrow v_{\max} = 20 \frac{m}{s}$$

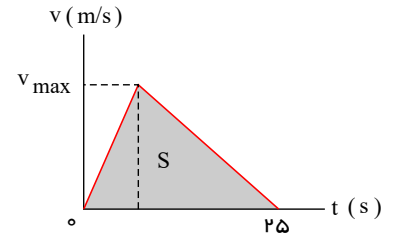


دبیرستان دخترانه علوی واحد شرق

$$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \Delta x = S_{\text{مثبت}}$$

$$\Delta x = 10 \times 25 = 250$$

$$\frac{v \times 25}{2} = 10 \times 25 \Rightarrow v = 20 \text{ m/s}$$



۲۷ - گزینه ۴

با نوشتن معادله جابه‌جایی برای ثانیه اول و دو ثانیه اول، می‌توان نسبت آنها را پیدا کرد.

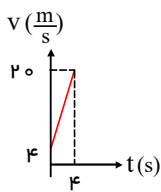
$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\begin{cases} t = 1s \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} a \times 1^2 = \frac{1}{2} a \text{ (ثانیه اول)} \\ t = 2s \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{1}{2} a \times 2^2 = 2a \text{ (دو ثانیه اول)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جابه‌جایی دو ثانیه اول}}{\text{جابه‌جایی ثانیه دوم}} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_2 - \Delta x_1} = \frac{2a}{1.5a} = \frac{4}{3}$$

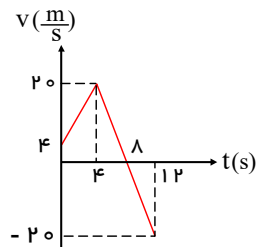
۲۸ - گزینه ۳ برای حل این تست، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول (رسم نمودار سرعت - زمان):



بازه زمانی $0 < t < 4s$: در این قسمت سرعت اولیه متحرک $4 \frac{m}{s}$ است. از طرفی با توجه به آنکه اندازه شتاب متحرک برابر $4 \frac{m}{s^2}$ می‌باشد، در هر ثانیه $4 \frac{m}{s}$ بر

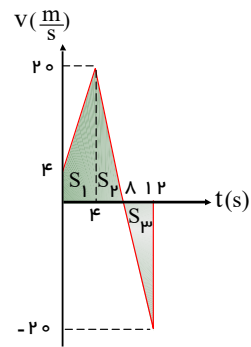
سرعت آن افزوده می‌شود و سرعت در پایان ثانیه چهارم به $20 \frac{m}{s}$ می‌رسد. $(4 + 4 \times 4 = 20 \frac{m}{s})$.



بازه زمانی $4s < t < 12s$: در این قسمت با توجه به نمودار فوق، سرعت متحرک در لحظه $t = 4s$ (یعنی شروع بازه) برابر $20 \frac{m}{s}$ می‌باشد. از طرفی با توجه

به آنکه اندازه شتاب برابر $5 \frac{m}{s^2}$ می‌باشد، سرعت متحرک در هر ثانیه $5 \frac{m}{s}$ کاهش می‌یابد و در $t = 8s$ به صفر می‌رسد و در $t = 12s$ به $-20 \frac{m}{s}$ می‌رسد. با

توجه به این موضوع نمودار کلی سرعت - زمان متحرک عبارت است از:



گام دوم (محاسبه مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $0 \leq t \leq 12s$):

می‌دانیم که مسافت طی شده برابر قدر مطلق سطح زیر نمودار سرعت - زمان است؛ بنابراین با توجه به نمودار سرعت - زمان مقابل داریم:

$$\text{مسافت طی شده} = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{(20 + 4) \times 4}{2} + \frac{4 \times 20}{2} + \frac{4 \times 20}{2} = 128m$$

۲۹ - گزینه ۲ از آنجا که بزرگی سرعت گلوله در ابتدای ۵۰ متر پایانی حرکتش معلوم است، با استفاده از رابطه سرعت - جابه‌جایی فاصله نقطه رها شدن تا رسیدن به این سرعت را محاسبه می‌کنیم.

$$v_1^2 - 0^2 = 2g\Delta y_1 \Rightarrow 15^2 - 0 = 2 \times 10 \Delta y_1 \Rightarrow \Delta y_1 = \frac{225}{20} = 11.25m$$

$$h = \Delta y_1 + 50m = 11.25 + 50 = 61.25m$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 61.25 = \frac{1}{2} \times 10 t^2 \Rightarrow t^2 = 12.25 \Rightarrow t = 3.5s$$

۳۰ - گزینه ۳ با توجه به رابطه سرعت متوسط، داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow -55 = \frac{\Delta y}{3} \Rightarrow \Delta y = -165m$$

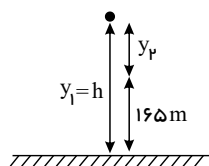
حال طبق معادله مکان - زمان در حرکت سقوط آزاد و با توجه به این که متحرک ۱۶۵ متر آخر سقوط را در مدت ۳s طی کرده است. می‌توان نوشت:



$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow \begin{cases} -h = -\frac{1}{2}gt^2 & (1) \\ -h + 165 = -\frac{1}{2}g(t-3)^2 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} -\frac{1}{2}gt^2 + 165 = -\frac{1}{2}g(t-3)^2 \Rightarrow -\frac{1}{2}g[t^2 - (t-3)^2] = 165 \Rightarrow t = 7s$$

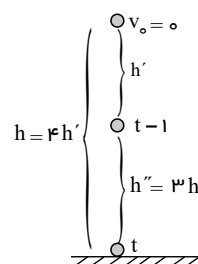
بنابراین مدت زمان حرکت گلوله از لحظه رها شدن تا رسیدن به زمین برابر با ۷s است. در نتیجه سرعت برخورد گلوله به زمین برابر است با:



$$v = -gt \Rightarrow v = -10 \times 7 \Rightarrow |v| = 70 m/s$$

۳۱ - گزینه ۱ مسافت طی شده در ثانیه آخر ۳ برابر مسافتی است که قبل از آن طی کرده است. با استفاده از رابطه $\Delta y = \frac{1}{2}gt^2$ داریم:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \begin{cases} h' = \frac{1}{2}g(t-1)^2 & (1) \\ 4h' = \frac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$



$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{h'}{4h'} = \frac{\frac{1}{2}g(t-1)^2}{\frac{1}{2}gt^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{t-1}{t} \Rightarrow t = 2$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20 m \Rightarrow h = 20 m$$

۳۲ - گزینه ۳ جابه‌جایی دو ثانیه ام:

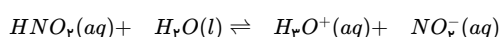
$$\Delta x_n = \frac{a}{2}(2n-1) + v_0$$

$$\begin{aligned} n=2 &\Rightarrow \begin{cases} 8 = \frac{a}{2} \times 3 + v_0 \\ 14 = \frac{a}{2} \times 5 + v_0 \end{cases} \Rightarrow -6 = -3a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2} \\ n=5 &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$8 = \frac{2}{2} \times 3 + v_0 \Rightarrow v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

۳۳ - گزینه ۳ یونش را برای ترکیب‌های مولکولی در نظر می‌گیریم، چون طبق تعریف به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود؛ یونش می‌گویند. پس استفاده از لفظ یونش برای ترکیب‌های یونی مانند منیزیم هیدروکسید نادرست است و باید از عبارت «تفکیک یونی» استفاده کرد.

۳۴ - گزینه ۱



$$\begin{array}{ccc} \text{غلظت اولیه} & M & \\ \text{غلظت تعادلی} & M - M\alpha & \begin{array}{cc} M\alpha & M\alpha \end{array} \end{array}$$

$$K_a = \frac{(M\alpha)^2}{M - M\alpha} = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha} \Rightarrow 4.5 \times 10^{-4} = \frac{9 \times 10^{-4} M}{9.97} \Rightarrow M = \frac{4.5 \times 10^{-4} \times 0.97}{9 \times 10^{-4}} = 0.485 mol \cdot L^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع غلظت یونها} = [H_3O^+] + [NO_2^-] = 2M\alpha$$

$$= 2 \times 0.485 \times 0.03 = 0.0291 mol \cdot L^{-1} = 2.91 \times 10^{-2} mol \cdot L^{-1}$$

۳۵ - گزینه ۳ عبارت‌های «آ» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

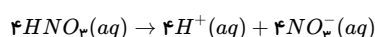
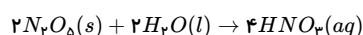
ب) مقایسه غلظت گونه‌ها در محلول الکترولیت HA به صورت زیر خواهد بود. به دلیل یونیده شدن کامل HA، تقریباً مولکول‌های یونیده نشده در محلول یافت نخواهد شد و مقدار آن‌ها در حد صفر است.

$$[H^+] = [A^-] \gg [HA]$$

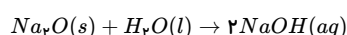
ت) HA یک اسید قوی است. اما HF یک اسید ضعیف بوده و نمی‌توان آن را به HA نسبت داد.

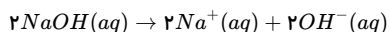
۳۶ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: N_2O_5 یک اکسید اسیدی است و رنگ کاغذ pH را قرمز می‌کند و برآثر واکنش دو مول از آن با آب، مجموعاً هشت مول یون تولید می‌شود:

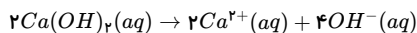
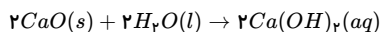


گزینه «۲»: سدیم اکسید (Na_2O) یک اکسید بازی بوده و رنگ کاغذ pH را آبی می‌کند و هر مول از آن در نهایت چهار مول یون تولید می‌کند.





گزینه ۳: کلسیم اکسید (CaO) یک اکسید بازی بوده و رنگ کاغذ pH را آبی می‌کند و دو مول از آن در نهایت شش مول یون تولید می‌کند:

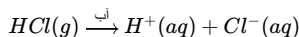


گزینه ۴: استیک اسید در آب به‌طور جزئی یونش می‌یابد و هر مول از آن، کم‌تر از دو مول یون تولید می‌کند. کاغذ pH در محلول استیک اسید، قرمز رنگ می‌شود.

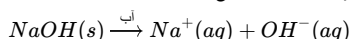
۳۷ - گزینه ۱ عبارت (ت) جمله را به درستی تکمیل نمی‌کند.

بررسی موارد:

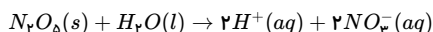
مورد (ب): طبق نظریه آرنیوس هیدروژن کلرید ($HCl(g)$) یک اسید است، زیرا پس از حل شدن در آب محلول هیدروکلریک اسید ($HCl(aq)$) را پدید می‌آورد و یون‌های هیدروژن (H^+) و کلرید (Cl^-) تولید می‌کند.



مورد (پ): معادله بازی بودن سدیم هیدروکسید ($NaOH(s)$) به‌صورت زیر است و این یک باز آرنیوس است، زیرا پس از حل شدن در آب تولید یون هیدروکسید می‌نماید.



مورد (ت): معادله اسیدی بودن $N_2O_5(s)$ به‌صورت زیر است:



۳۸ - گزینه ۱ - عبارت اول نادرست است چون هالوژن‌ها کوچک‌ترین شعاع اتمی را در مقایسه با عناصر هم‌دوره خود دارند.

- عبارت دوم نادرست است چون پیوند بریلم با هالوژن‌ها از نوع کووالانسی است.

- عبارت سوم درست است. با افزایش عدد اتمی و افزایش شعاع هالوژن‌ها، انرژی پیوند و واکنش‌پذیری هالوژن‌ها کاهش می‌یابد.

- عبارت چهارم نادرست است. در هیدروژن هالیدها، با افزایش عدد اتمی خاصیت اسیدی افزایش می‌یابد.

خاصیت اسیدی: $HF < HCl < HBr < HI$

۳۹ - گزینه ۲ رسانایی الکتریکی محلول‌ها به فراوانی یون‌ها در محلول بستگی دارد. بنابراین محلول اسیدی که یونش آن کم‌تر است، یون‌های کم‌تری دارد محلول می‌کند و رسانایی الکتریکی کم‌تری خواهد داشت. در بین ۴ اسید داده شده، سولفوریک اسید و نیتریک اسید اسیدهای قوی هستند. اما از آنجایی که H_2SO_4 یک اسید چند پروتون‌دار است، غلظت یون‌های حاصل از تفکیک آن در محیط آبی بیشتر از HNO_3 است که یک اسید تک پروتون‌دار است.

HNO_2 و HCN جزو اسیدهای ضعیف هستند اما ثابت یونش اسید HNO_2 بیشتر از HCN است. بنابراین ترتیب میزان رسانایی الکتریکی محلول این چهار اسید در گزینه ۲ به درستی نشان داده شده است.

۴۰ - گزینه ۴ HA یک اسید ضعیف تک عاملی است، بنابراین رابطه $[H^+] = \sqrt{K_a \times M}$ برای آن قابل استفاده است.

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} = \sqrt{2 \times 10^{-8} \times M_{HA}}$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{\sqrt{2 \times 10^{-8} \times M_{HA}}}$$

BOH یک باز ضعیف تک عاملی است و می‌توان از رابطه $[OH^-] = \sqrt{K_b \times M}$ استفاده کرد:

$$[OH^-] = \sqrt{K_b \times M} = \sqrt{4 \times 10^{-10} \times M_{BOH}}$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{\sqrt{4 \times 10^{-10} \times M_{BOH}}}$$

$$\frac{HA \text{ در محلول } [OH^-]}{BOH \text{ در محلول } [H^+]} = \frac{\frac{10^{-14}}{\sqrt{2 \times 10^{-8} \times M_{HA}}}}{\frac{10^{-14}}{\sqrt{4 \times 10^{-10} \times M_{BOH}}}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{-10}}{2 \times 10^{-8}} \times \frac{M_{BOH}}{M_{HA}}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{-10}}{2 \times 10^{-8}} \times 2} = 0.2$$

۴۱ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: آمونیاک به دلیل تشکیل پیوندهای هیدروژنی در آب، به‌طور عمده به شکل مولکولی حل می‌شود.

گزینه ۲: سود سوزآور ($NaOH$) بر اثر حل شدن در آب، طبق معادله $NaOH(s) \rightarrow Na^+(aq) + OH^-(aq)$ به‌طور کامل تفکیک می‌شود. (دقت کنید که ترکیب یونی، تفکیک می‌شود و ترکیب مولکولی یونش می‌یابد.)

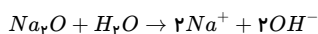
گزینه ۳: انحلال آمونیاک در آب تشکیل سامانه تعادلی $NH_4^+(aq) + OH^-(aq) \rightleftharpoons NH_4OH(aq)$ را می‌دهد.

گزینه ۴: آمونیاک یک باز ضعیف است که به‌طور جزئی یونیده می‌شود. در این‌گونه بازها اندک یون‌های حاصل از یونش با مولکول‌های یونیده نشده در تعادل هستند.

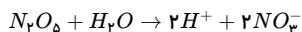
۴۲ - گزینه ۱ $CuO \leftarrow$ نادرست، اکسید فلزهای واسطه در آب نامحلول‌اند.

$CO_2 \leftarrow$ نادرست، CO_2 در آب به اسید ضعیف کربنیک اسید تبدیل می‌شود که به مقدار کمی یونیده می‌شود و تعداد کمی یون تولید می‌کند.

$Na_2O \leftarrow$ نادرست، براساس واکنش زیر هر مول سدیم اکسید در آب، ۴ مول یون تولید می‌کند.



$N_2O_5 \leftarrow$ نادرست، براساس واکنش زیر هر مول دی‌نیتروژن پنتااکسید، ۴ مول یون تولید می‌کند.





BaO ← درست، براساس واکنش زیر هر مول باریم اکسید در آب ۳ مول یون تولید می کند.

