

پاسخنامه تشریحی

1 2 3 4 1

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

اگر این معادله دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد، معادله I فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد \sqrt{x} برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن که یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه متمایز مختلف علامت باشد آن است که $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

دقت کنید اگر معادله $mt^2 - 3t + m - 2 = 0$ دارای یک ریشه مضاعف مثبت باشد نیز معادله I فقط یک جواب دارد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \\ m = \frac{2 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{3}{2m} > 0 \Rightarrow m > 0 \\ \downarrow \\ \text{ریشه مضاعف} \end{array} \right.$$

پس جواب می‌شود: $0 < m < 2 \cup \left\{ \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

2 شرط آنکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > 0$ و $S < 0$ و $P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-2)(-3) > 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -6 \quad \text{یا} \quad m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{3m}{m-2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 2 \quad (II)$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $3 < m < 2$ می‌رسیم.

3 برای اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد باید $\Delta > 0$ باشد بنابراین:

$$\Delta \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0 \Rightarrow 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = (m+1)(2m-7) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 3,5$$

در ضمن ضریب x^2 نباید صفر باشد یعنی $m \neq \frac{1}{2}$ است.

$$m \in (-1, 3,5) - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

4 ریشه معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 2$$

$$\text{پس: } \alpha^2 - \alpha + \beta = 2\alpha + 2 - \alpha + \beta = \underbrace{\alpha + \beta + 2}_{\frac{-b}{a}} = 2 + 2 = 4$$



ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را می‌یابیم: (۵) ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5 \\ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}$$

چون α و β ریشه‌های معادله هستند پس در خود معادله صدق می‌کنند.

معادله جواب $\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha - 5) = -3$

$$\alpha - 5 = \frac{-3}{\alpha} \Rightarrow 5 - \alpha = \frac{3}{\alpha}$$

به همین ترتیب $5 - \beta = \frac{3}{\beta}$ است. پس:

$$A = \frac{\alpha^2}{5 - \beta} + \frac{\beta^2}{5 - \alpha} = \frac{\alpha^2}{\frac{3}{\beta}} + \frac{\beta^2}{\frac{3}{\alpha}} = \frac{\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2}{3} = \frac{\alpha \beta (\alpha + \beta)}{3} = 5$$

می‌دانیم $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -2$ و $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -2$ است. α ریشه معادله است، پس در معادله صدق می‌کنند. (۶) ۱ ۲ ۳ ۴

صدق در معادله

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 4\alpha + 2 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^3 = 4\alpha^2 + 2\alpha$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{\alpha^3 + 4\beta^2 + 2\beta} &= \sqrt{4\alpha^2 + 2\alpha + 4\beta^2 + 2\beta} = \sqrt{4(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha + \beta)} = \sqrt{4((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) + 2(\alpha + \beta)} \\ &= \sqrt{4(16 + 4) + 2(4)} = \sqrt{80 + 8} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22} \end{aligned}$$

شرط آنکه معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم: (۷) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}m+2\right) = (m^2 + 2m + 1) - 4m - 16 = m^2 - 2m - 15 = (m-5)(m+3) < 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر پاسخ مسئله بازه $(-3, 5)$ است:

m	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$(m-5)(m+3)$	$+$	0	$-$	0

$$\Rightarrow -3 < m < 5$$

ریشه‌های معادله داده شده را α و β در نظر می‌گیریم و طبق فرض $\alpha = 2\beta$ است. (۸) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\text{می‌دانیم: } \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 2\beta^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow a = \pm 3$$

می‌دانیم جواب‌های معادله برابر $\alpha + \beta = 3 + \frac{3}{2}$ است:

$$-\frac{a}{2} = \pm 2 \pm \frac{3}{2} = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = \pm 9$$

(۹) ۱ ۲ ۳ ۴

اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، در خود معادله صدق می‌کنند و $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ است.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \Rightarrow 3x_1 - 1 = x_1^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2(3x_1 - 1)} = \sqrt{x_1^2 x_1^2} = |x_1 x_1| = \frac{c}{a} = 1$$

(۱۰) ۱ ۲ ۳ ۴

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، داریم:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

در این معادله داریم:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

پس حاصل عبارت مورد نظر را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \Rightarrow A^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = S + 2\sqrt{P} = 4 + 2 = 6 \Rightarrow A = \sqrt{6}$$

$$n + e + p = 49 \quad (1)$$

$$\begin{cases} n - p = 1 \\ n - e = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = n - 1 \\ e = n - 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله (1)}} n + (n - 2) + (n - 1) = 49 \Rightarrow 3n = 52 \Rightarrow n = \frac{52}{3}$$

تعداد نوترون‌ها باید یک عدد طبیعی باشد، پس این حالت ($n - e = 2$) نادرست است و باید حالت $e - n = 2$ را در نظر بگیریم. پس داریم:

$$n + e + p = 49 \quad (1)$$

$$\begin{cases} n - p = 1 \\ e - n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = n - 1 \\ e = n + 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله (1)}} n + (n + 2) + (n - 1) = 49 \Rightarrow \boxed{n = 16}, e = n + 2 = 16 + 2 = 18$$

این یون دارای ۱۶ نوترون، ۱۵ پروتون و ۱۸ الکترون است، پس یک آنیون می‌باشد. X^{3-}

عبارت‌های (آ) و (ب) و (ت) درست‌اند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

بررسی عبارت نادرست:

(پ) اندازه یون حاوی تکنسیم (TcO_4^-) مشابه اندازه یون یدید است نه یون تکنسیم.

تنها عبارت پنجم درست است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

بررسی همه عبارت‌ها:

عبارت اول: در سیاره مشتری عناصر کربن و گوگرد جزو عناصر جامد هستند.

عبارت دوم: هیدروژن و آهن به ترتیب فراوان‌ترین عناصر سازنده مشتری و زمین هستند.

عبارت سوم: هیدروژن، هلیوم و کربن به ترتیب فراوان‌ترین عناصر سازنده مشتری هستند.

عبارت چهارم: بعد از آهن، منیزیم دومین فلز فراوان سیاره زمین است.

عبارت پنجم: عمده عناصر سازنده سیاره مشتری هیدروژن و هلیوم هستند که سبک‌ترین نافلزات جدول دوره‌ای هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\begin{cases} n + p = 122 \\ n - e = \frac{p}{3} \\ e - p = 3 \end{cases} \xrightarrow{e=p+3} \begin{cases} n + p = 122 \\ n - \frac{4}{3}p = 3 \end{cases} \Rightarrow p = 51, n = 71, e = 54$$

$$n + p + e = 71 + 51 + 51 = 173$$

دقت کنید که در اتم X ، تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها با هم برابر است.

فقط عبارت (پ) درست است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

بررسی موارد:

(آ) از اتم ${}_{99}^{99}Tc$ برای تصویربرداری غده تیروئید استفاده می‌شود (جای عدد اتمی و عدد جرمی اشتباه نوشته شده است).

(ب) هر دو نوع گلوکز معمولی و نشان‌دار، توسط یاخته‌های بدن جذب می‌شود.

(پ) در ${}_{92}^{235}U$ نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها به صورت زیر است:

$$\frac{235 - 92}{92} = 1,55$$

(ت) یون یدید با یونی که حاوی تکنسیم است، اندازه مشابهی دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

فقط عبارت اول نادرست است.

بررسی عبارت نادرست:

عبارت اول: اتم عنصرهای مختلف هم در تعداد نوترون باهم تفاوت دارند، اما ایزوتوپ نیستند.

به جز مورد (آ)، بقیه موارد جمله داده شده را به درستی کامل می‌کنند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

(آ) رادیوایزوتوپ‌ها همان ایزوتوپ‌های ناپایدار و پرتوزا هستند. از ۷ ایزوتوپ هیدروژن، ۵ ایزوتوپ ناپایدار می‌باشند (${}^1_1H, {}^2_1H, {}^3_1H, {}^4_1H, {}^5_1H, {}^6_1H, {}^7_1H$) اما 3_1H با وجود رادیوایزوتوپ بودن، طبیعی است.

(ب) ایزوتوپ‌های پایدار هیدروژن، 1_1H و 2_1H می‌باشند که هر دو طبیعی هستند.

(پ) طبق جدول موجود در صفحه ۶ کتاب درسی، ایزوتوپ‌های ${}^1_1H, {}^2_1H, {}^3_1H, {}^4_1H, {}^5_1H, {}^6_1H, {}^7_1H$ دارای درصد فراوانی صفر در طبیعت هستند که همگی رادیوایزوتوپ می‌باشند.

(ت) مفهوم نیم‌عمر برای رادیوایزوتوپ‌ها تعریف می‌شود. پس حتماً ناپایدارها، دارای نیم‌عمر خواهند بود.

عبارت‌های (ب)، (پ) و (ت) نادرست‌اند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

(ب) ایزوتوپ‌های پرتوزا علاوه بر ذره‌های پرنانرژی، مقدار زیادی انرژی نیز آزاد می‌کنند.

(پ) برای اغلب ایزوتوپ‌های ناپایدار رابطه روبه‌رو برقرار است:



$$\frac{N}{Z} \geq 1,5$$

اگر به سمت چپ نامعادله $\frac{Z}{N}$ و به سمت راست 1 را اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{N+Z}{Z} \geq \frac{1,5+1}{1} \Rightarrow \frac{A}{Z} \geq 2,5 \Rightarrow \frac{Z}{A} \leq \frac{1}{2,5} \Rightarrow \frac{Z}{A} \leq 0,4$$

ت) فراوانی همه ایزوتوپ‌های یک عنصر در طبیعت یکسان نیست.

1 2 3 4 19

$${}_{26}^{56}\text{Fe} \begin{cases} Z = 26 \\ N = 56 - 26 = 30 \end{cases}$$

${}_{26}^{56}\text{Fe}$ دارای 26 پروتون و 30 نوترون است و شمار نوترون‌ها و پروتون‌های آن برابر نیست.

1 2 3 4 20

$$P + N + e = 96$$

ذرات زیراتمی درون هسته، N و P هستند:

$$\frac{N}{P} = \frac{6}{5} \Rightarrow N = \frac{6P}{5} = 1,2P$$

$$P + 1,2P + P = 96 \Rightarrow 3,2P = 96 \Rightarrow P = 30 (Z = 30)$$

$$e = 30, \quad N = 36 \quad A = N + P = 66$$

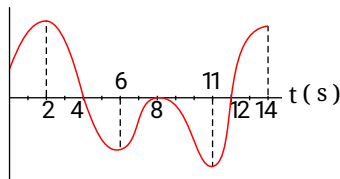
$${}_{Z}^A X \Rightarrow {}_{30}^{66} X$$

1 2 3 4 21

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20 - (-40)}{10} = \frac{60}{10} = 6 \text{ m/s}$$

1 2 3 4 22

x (m)



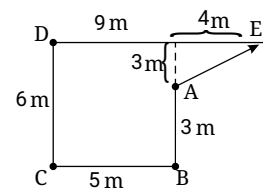
باتوجه به نمودار مکان - زمان حرکت (شکل بالا)، جهت بردار مکان دو بار و در لحظه‌های 4s و 12s تغییر کرده است (x تغییر علامت داده است) و متحرک در بازه‌های زمانی $2s < t < 6s$ به مدت 4 ثانیه و $8s < t < 11s$ به مدت 3 ثانیه و در مجموع به مدت 7 ثانیه در سوی منفی محور x حرکت کرده است. پس پاسخ گزینه 1 است.

توجه: جهت بردار مکان در لحظه‌هایی تغییر می‌کند که متحرک از مبدا مکان عبور می‌کند و x تغییر علامت می‌دهد و در لحظه‌هایی که متحرک در مبدا مکان قرار می‌گیرد ولی از آن عبور نمی‌کند (مانند لحظه 8s)، جهت بردار مکان تغییر نکرده است. همچنین تغییر جهت بردار مکان مفهومی متفاوت نسبت به تغییر جهت حرکت است و نباید با آن اشتباه گرفته شود. در این حرکت جهت حرکت 4 بار در لحظه‌های 2s، 6s، 8s و 11s تغییر کرده است.

مسافت طی شده معادل کل طول مسیر پیموده شده است، ولی بردار جابه‌جایی به مسیر بستگی ندارد و برداری است که نقطه A (شروع حرکت) را به نقطه E (پایان حرکت) متصل می‌کند.

$$\text{مسافت طی شده} = AB + BC + CD + DE$$

$$\text{مسافت طی شده} = 23 \text{ m}$$



$$\text{جابه‌جایی} = AE$$

$$\text{جابه‌جایی} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{جابه‌جایی}} = \frac{23}{5} = 4,6$$

مسافت طی شده برابر نصف محیط دایره و جابه‌جایی برابر قطر دایره است:

1 2 3 4 24



$$\text{مسافت طی شده} = \frac{\cancel{\pi r} \pi r}{\cancel{r}} = 3 \times 20 = 60m$$

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت}}{\text{مدت زمان}} = \frac{60}{4} = 15 \left(\frac{m}{s}\right) \xrightarrow{\times 3.6} 54 \frac{km}{h}$$

$$\text{جابه‌جایی} = 20 + 20 = 40$$

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان مصرف شده}} = \frac{40}{4} = 10 \frac{m}{s} \xrightarrow{\times 3.6} 36 \frac{km}{h}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

با توجه به نمودار در لحظه‌های $t_1 = 1s$ و $t_2 = 4s$ مکان متحرک در $X_1 = 0$ و $X_2 = -6$ است.

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 0}{4 - 1} = -2 \frac{m}{s}$$

روش اول: برای یافتن جابه‌جایی در دو ثانیه اول با داشتن معادله حرکت کافی است با جایگزینی $t = 2s$ و $t = 0$ در x_2 و x_1 را به دست آوریم و از رابطه $\Delta x = x_2 - x_1$ جابه‌جایی را حساب کنیم، بنابراین داریم:

$$x = 2t^3 + 6t - 2 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x_0 = -2m \\ t = 2s \Rightarrow x_2 = 2 \times (2)^3 + 6 \times (2) - 2 = 26m \end{cases}$$

$$\Delta x = x_2 - x_0 = 26 - (-2) = 28m$$

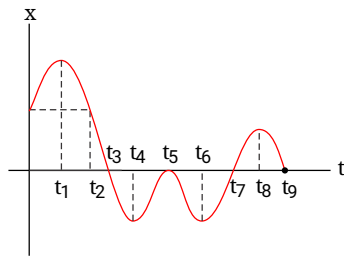
روش دوم: در تابع $x = 2t^3 + 6t - 2$ مقدار ثابت تابع یعنی -2 همان x_0 است و جابه‌جایی در t ثانیه اول از رابطه $\Delta x = 2t^3 + 6t$ قابل محاسبه خواهد بود.

$$\Delta x = 2t^3 + 6t \xrightarrow{t=2s} \Delta x = 2 \times (2)^3 + 6 \times (2) = 28m$$

دقت کنید اگر صرفاً مقدار تابع را به ازای $t = 2s$ به دست آورده باشید در واقع شما مکان متحرک در $t = 2s$ یعنی $x = 26m$ را حساب کردید نه جابه‌جایی را. در این صورت به گزینه اشتباه ۳ می‌رسید.

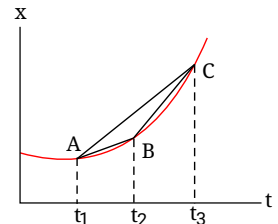
متحرک در لحظات t_1 و t_2 از مبدأ عبور کرده و یک بار در لحظه t_3 از نقطه شروع حرکت عبور کرده است و در لحظات $t_1, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9$ تغییر جهت داده است؛ پس ۵ بار تغییر جهت داده است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷



می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$\begin{aligned} \text{شیب } AB &= \bar{v}_{t_2 \rightarrow t_1} \\ \text{شیب } BC &= \bar{v}_{t_3 \rightarrow t_2} \\ \text{شیب } AC &= \bar{v}_{t_3 \rightarrow t_1} \end{aligned}$$



شیب پاره خط BC از شیب دو پاره خط دیگر بیشتر است.

شیب خط مماس در لحظه‌های $t = 6s$ و $t = 10s$ که سرعت متحرک در این لحظه‌ها است را حساب می‌کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$\left. \begin{aligned} t = 6s \Rightarrow v_6 &= \frac{9}{6-3} = 3m/s \\ t = 10s \Rightarrow v_{10} &= \frac{14-7}{10} = 0.7m/s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_6}{v_{10}} = \frac{3}{0.7} = \frac{30}{7} m/s$$

رابطه مکان - زمان یک متحرک باید شرایط یک تابع را دارا باشد و در نتیجه نمودار مکان - زمان آن نیز باید شکل نمودار یک تابع ریاضی باشد، زیرا در غیر

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰



این صورت حداقل در یک زمان، متحرک در دو یا چند مکان قرار دارد و در واقعیت این اتفاق هرگز رخ نمی‌دهد.

متحرک در بازهٔ صفر تا 17 s در سوی مثبت محور x حرکت می‌کند و از مکان صفر به مکان $+60\text{ m}$ می‌رود. در لحظهٔ 17 s تغییر جهت می‌دهد و سپس در بازهٔ 17 s تا 20 s در سوی منفی محور x حرکت می‌کند و از مکان $+60\text{ m}$ به مکان صفر باز می‌گردد. بنابراین متحرک در مجموع مسافت 120 m را در مدت 20 s پیموده است.

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{120\text{ m}}{20\text{ s}} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

توجه: در این حرکت کل جابه‌جایی صفر و در نتیجه سرعت متوسط متحرک صفر است.