۱

گزینه ۲

درایه‌های بالای قطر اصلی دو ماتریس A و B به‌ترتیب از ضابطه‌های $ai + j$ و $i - j$ به دست می‌آیند. پس درایه‌های بالای قطر اصلی $A + B$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = ai + j + i - j = (a + ۱)i \qquad (i < j)$$

اگر بخواهیم این درایه‌ها همواره و به ازای هر مقدار i صفر باشند باید $a = -۱$ باشد.

۲

گزینه ۱

چون $a_{ij} = i^۳ + j^۳ + ij$، پس به ازای هر i و j داریم:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

پس درایه‌های بالای قطر اصلی و درایه‌های پایین قطر اصلی نظیر به نظیر باهم برابرند. درنتیجه $x = y$؛ یعنی $\frac{x}{y} = ۱$.

۳

گزینه ۳

از برابری $۲A - B = I$ داریم:

$$B = ۲A - I = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس B: $۱ - ۲ + ۴ - ۱ = ۲$

۴

گزینه ۳

ستون دوم ماتریس A:

$$\begin{bmatrix} ۱^۲ + ۳(۲) \\ ۲^۲ + ۳(۲) \\ ۳^۲ + ۳(۲) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۰ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون دوم: $۷ + ۱۰ + ۱۵ = ۳۲$

۵ گزینه ۴

درایه سطر m و ستون n برابر صفر است، پس:

$$۵m - ۴n - mn = ۰ \Rightarrow m = \frac{۴n}{۵ - n}$$

چون $m > ۰$، پس $۵ - n > ۰$ یا $n < ۵$. از طرف دیگر چون n تعداد ستون‌های ماتریس است، پس $n \geq ۱$. اکنون به‌ازای $۱ \leq n \leq ۴$ مقادیر موردقبول m را به دست می‌آوریم:

m	۱	$\frac{۸}{۳}$	۶	۱۶
n	۱	۲	۳	۴
	✓	×	✓	✓

درنتیجه بیشترین مقدار $m + n$ برابر ۲۰ است.

۶ گزینه ۴

طبق فرض، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow (\text{مجموع درایه‌های } A) = ۲$$

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\text{مجموع درایه‌های } A^۲) = ۶$$

$$\Rightarrow \frac{(\text{مجموع درایه‌های } A^۲)}{(\text{مجموع درایه‌های } A)} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

۷ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه $A^۳ = AA^۲$، داریم:

$$[\text{سطر سوم } A^۳] = [\text{سطر سوم } A]\, A^۲$$
$$= \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -۴ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۰ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

۸

گزینه ۳

ماتریس A را از سمت چپ و ماتریس B را از سمت راست عبارت، فاکتور می‌گیریم. بنابراین:

$$
\begin{aligned}
&A\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix}B - \frac{۳}{۲}A\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۴ & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}B \\
&= A\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۴ & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}\right)B \\
&= A\left(\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ & -۳ \\ ۶ & -۲ \end{bmatrix}\right)B = A\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}B \\
&= A(-۳I)B = -۳AB = -۳\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۹ & -۶ \\ -\frac{۳}{۲} & -۱ \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

پس حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی این ماتریس، برابر است با:

$$(-۶)(-\frac{۳}{۲}) = ۹$$

۹

گزینه ۱

طبق فرض داریم:

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & -۱ \\ ۱ & ۱ & x \\ x & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ۲ & x+۱ & -۱+x \\ x & -x+۲ & x \\ -۲-x & -۳ & -۲x+۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵+x & \dots & x+۱ \\ \dots & ۰ & \dots \\ -۲x-۷ & \dots & -۳ \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$(\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}) = (\text{مجموع درایه‌های قطر فرعی})$$

$$\Rightarrow ۵+x+۰-۳ = x+۱+۰-۲x-۷ \Rightarrow ۲x = -۸ \Rightarrow x = -۴$$

۱۰

گزینه ۱

طبق تعریف ضرب ماتریس‌ها، داریم:

$$
\begin{aligned}
&[\text{سطر اول } A^۳] = [\text{سطر اول } A]A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

۱۱

گزینه ۴

چون $A^۲ = A$، پس هر توانی از A برابر A است:

$$A^۳ = A$$

از طرف دیگر $B = ۲A - I$، درنتیجه:

$$B^۳ = ۸A^۳ - ۱۲A^۲ + ۶A - I = ۸A - ۱۲A + ۶A - I = ۲A - I = B$$

اکنون به دست می‌آید:

$$A^۳ + B^۳ = A + B$$

۱۲

گزینه ۳

می‌توان نوشت:

درایهٔ سطر دوم، ستون سوم ABC:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳x & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۱ \\ ۶ & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۳x - ۲ & ۱۱ - x & ۶ - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$
$$= ۹x - ۶ + ۶ - x = ۸x$$

چون این درایه برابر ۱۶ است، پس: $۸x = ۱۶ \Rightarrow x = ۲$

۱۳

گزینه ۱

به دست می‌آید:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} = A$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$(A + I)^۲ = A^۲ + ۲A + I = A + ۲A + I = ۳A + I$$
$$\Rightarrow (A + I)^۴ = (۳A + I)^۲ = ۹A^۲ + ۶A + I = ۹A + ۶A + I = ۱۵A + I$$

درنتیجه $m = ۱۵$ و $n = ۱$، یعنی $m + n = ۱۶$.

۱۴

گزینه ۴

درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ می‌نامیم. حال داریم:

$$a_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۹$$
$$a_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۷$$
$$a_{۳۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۵$$
$$\Rightarrow a_{۱۱} + a_{۲۲} + a_{۳۳} = ۹ + ۷ + ۵ = ۲۱$$

۱۵ گزینه ۳

طبق قاعدهٔ ضرب ماتریس‌ها باید ماتریس A از مرتبه ۳ × ۱ باشد. با فرض:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & a & b \\ c & d & -۴ \\ e & -۲ & f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳x & ۳y & ۳z \\ ۲x & ۲y & ۲z \\ -x & -y & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & a & b \\ c & d & -۴ \\ e & -۲ & f \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$۳x = ۶ \quad , \quad ۲z = -۴ \quad , \quad -y = -۲$$

یعنی: $x = ۲$، $y = ۲$ و $z = -۲$

درنتیجه:

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A = x + y + z = ۲ + ۲ - ۲ = ۲$$

۱۶ گزینه ۲

به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۲ & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & X \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \\ X \end{bmatrix} = -۴$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ + ۲X & ۶ + X & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \\ X \end{bmatrix} = -۴$$

$$\Rightarrow ۶ + ۶X - ۶ - X + X^۲ = -۴ \Rightarrow X^۲ + ۵X + ۴ = ۰$$

یعنی: $X = -۱$ یا $X = -۴$

۱۷ گزینه ۳

برابری $AB = ۳BA$ را از راست در B ضرب می‌کنیم:

$$AB^۲ = ۳BAB \xrightarrow{AB=۳BA} AB^۲ = ۳B(۳BA) = ۹B^۲A$$

اکنون برابری $AB^۲ = ۹B^۲A$ را از طرف راست در B ضرب می‌کنیم:

$$AB^۳ = ۹B^۲AB = ۹B^۲(۳BA) = ۲۷B^۳A$$

با مقایسهٔ برابری‌های $AB^۳ = ۲۷B^۳A$ و $AB^۳ = kB^۳A$ به دست می‌آید:

$$k = ۲۷$$

۱۸ گزینه ۳

دقت کنید که چون در حالت کلی در ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد، پس اتحادها در آن‌ها برقرار نیست. اکنون می‌نویسیم:

$$(A+B)^۲-(A-B)^۲=(A+B)(A+B)-(A-B)(A-B)$$
$$=A^۲+AB+BA+B^۲-(A^۲-AB-BA+B^۲)$$
$$=A^۲+AB+BA+B^۲-A^۲+AB+BA-B^۲=۲AB+۲BA$$
$$=۲(AB+BA)$$

۱۹ گزینه ۳

چون ضرب $A\times B$ تعریف شده و حاصل برابر C است، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}۴x-۱=۷\\ ۲=y-۱\\ ۳=z+۲\end{cases}$$

یعنی: $x=۲$، $y=۳$ و $z=۱$

اکنون می‌نویسیم:

$$۲x-y+z=۴-۳+۱=۲$$

۲۰ گزینه ۲

ابتدا ماتریس AB را به دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & m & ۲\\ ۳ & m+۱ & n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۱ & ۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m-۱ & m+۴\\ m-n+۴ & m+n+۷\end{bmatrix}$$

بنا بر اطلاعات صورت سؤال: $m+n+۷=۱۰$ و $m+۴=۴$. پس $m=۰$ و $n=۳$. در نهایت می‌نویسیم:

$$۲m+n=۲\times۰+۳=۳$$

۲۱

گزینه ۱

از برابری $۳AB + BA = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم:

$$AB = (-\frac{۱}{۳})BA \quad (۱)$$

از راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$AB^۲ = (-\frac{۱}{۳})BAB \xrightarrow{(۱)} AB^۲ = (-\frac{۱}{۳})B(-\frac{۱}{۳}BA) = \frac{۱}{۹}B^۲A$$

مجدداً از راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$AB^۳ = \frac{۱}{۹}B^۲AB \xrightarrow{(۱)} AB^۳ = \frac{۱}{۹}B^۲(-\frac{۱}{۳}BA) = -\frac{۱}{۲۷}B^۳A$$

اکنون با مقایسهٔ $AB^۳ = -\frac{۱}{۲۷}B^۳A$ و $AB^۳ = k.B^۳A$ داریم:

$$k = -\frac{۱}{۲۷}$$

۲۲

گزینه ۱

از تعریف ماتریس A به دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

می‌نویسیم:

$$AB = \begin{bmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ ۲(a+d+g) & ۲(b+e+h) & ۲(c+f+i) \\ ۳(a+d+g) & ۳(b+e+h) & ۳(c+f+i) \end{bmatrix}$$

بنا بر فرض مسئله مجموع درایه‌های AB برابر ۴۲ است. مجموع درایه‌های ستون دوم B را x فرض می‌کنیم. اکنون باتوجه‌به اینکه مجموع درایه‌های ستون اول و سوم ماتریس B برابر ۵ است، به دست می‌آید:

$$۶ \times ۵ + ۶x = ۴۲$$

درنتیجه $x = ۲$.

۲۳

گزینه ۲

$$(A-B)(A+B) = A^۲ + AB - BA - B^۲$$
$$= A^۲ + AB - (-AB) - B^۲ = A^۲ + ۲AB - B^۲$$

۲۴ گزینه ۲

ابتدا ماتریس حاصل‌ضرب را یافته، سپس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x-۱+۴y & -۲x+۴ \\ ۷+y & -۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قطری است}} \begin{cases} -۲x+۴=۰ \\ ۷+y=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۷ \end{cases}$$

(دقت کنید که نیازی به یافتن درایه‌های واقع بر قطر اصلی نبود.)

۲۵ گزینه ۱

حاصلضرب ماتریس‌ها را می‌یابیم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱۱x-۱ & -x-۲ & -۳x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۱x^۲ - x - ۲x^۲ - ۴x + ۳x = ۰ \Rightarrow ۹x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x(۹x-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \ \text{یا}\ x = \frac{۲}{۹}$$

پس جواب غیر صفر، $x = \frac{۲}{۹}$ است.

۲۶ گزینه ۲

تذکر: صورت سوال ابهام دارد. طبق کلید سنجش گزینهٔ "۲" صحیح است.

دو دیدگاه زیر وجود دارد:

- دیدگاه اول: فقط یکی از تاس‌ها عدد اول بوده باشد:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱					✓	
۲				✓		✓
۳				✓		✓
۴		✓	✓		✓	
۵	✓			✓		✓
۶		✓	✓		✓	

$$P(A) = \frac{۱۴}{۳۶} = \frac{۷}{۱۸}$$

پاسخ در گزینه‌ها نیست!

- دیدگاه دوم: حداقل یکی از اعداد اول بوده باشد:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱					✓	
۲				✓	✓	✓
۳			✓	✓	✓	✓
۴		✓	✓		✓	
۵	✓	✓	✓	✓	✓	✓
۶		✓	✓		✓	

$$P(A) = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$$

۲۷ گزینه ۳

فرض کنید A مجموعه عددهای بخش‌پذیر بر ۴ و B مجموعه عددهای بخش‌پذیر بر ۵ باشند. اکنون می‌توان نوشت:

$$n(S) = ۳۰۰\ ,\ n(A) = \left[\frac{۵۰۰}{۴}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۴}\right] = ۱۲۵ - ۵۰ = ۷۵$$

$$n(B) = \left[\frac{۵۰۰}{۵}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۵}\right] = ۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{۵۰۰}{۲۰}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۲۰}\right] = ۲۵ - ۱۰ = ۱۵$$

در نتیجه:

$$P(A' \cap B') = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$
$$= ۱ - \frac{۷۵}{۳۰۰} - \frac{۶۰}{۳۰۰} + \frac{۱۵}{۳۰۰} = \frac{۱۸۰}{۳۰۰} = ۰/۶$$

۲۸ گزینه ۲

به‌دست می‌آید:

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$P(B) = ۱ - P(B') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

در نتیجه:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= \frac{۲}{۳} + \frac{۴}{۵} - \frac{۱۴}{۱۵} = \frac{۸}{۱۵}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B)$$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{۲}{۳} + \frac{۴}{۵} - ۲ \times \frac{۸}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

پاسخ سؤال ۲۹

۲۹ گزینه ۲

$$\frac{۲}{۷}$$

۳۰

گزینه ۴

گام اول

به طور کلی $۸ = ۳ + ۵$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. پیشامد مطلوب این است که فقط یکی از موش‌ها دیابتی باشد. پس یک موش از بین ۵ موشِ سالم و یک موش از بین ۳ موشِ دیابتی انتخاب می‌شود.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۸}{۲} = \frac{۸!}{۲!۶!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲ \times ۶!} = \frac{۵۶}{۲} = ۲۸$$

$$n(A) = \binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱} = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

۳۱

گزینه ۴

بنا بر قوانین احتمال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۲۱} \\ P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{۸}{۲۱} \end{cases}$$

از هم کم می‌کنیم:

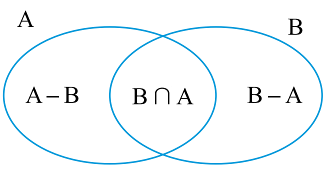
$$P(B) - P(A) = \frac{۱}{۲۱} \xrightarrow{P(B)=\frac{۱۳}{۱۲}P(A)} \frac{۱۳}{۱۲}P(A) - P(A) = \frac{۱}{۲۱}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۱۲}{۲۱}$$

درنتیجه از $P(A) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۲۱}$ و $P(A) = \frac{۱۲}{۲۱}$ به دست می‌آید:

$$P(A \cap B) = \frac{۵}{۲۱}$$

اکنون با استفاده از نمودار زیر می‌توان نوشت:



$$P(A \cup B) = P(A-B) + P(A \cap B) + P(B-A)$$
$$= \frac{۷}{۲۱} + \frac{۵}{۲۱} + \frac{۸}{۲۱} = \frac{۲۰}{۲۱}$$

۳۲ گزینه ۱

$$P(\text{آمار}) = ۰/۷ = P(A)$$

$$P(\text{هندسه}) = ۰/۴ = P(H)$$

$$P(\text{هندسه و آمار}) = ۰/۲ = P(A \cap H)$$

$$P(\text{آمار} - \text{هندسه}) = P(\text{آمار}) - P(\text{هندسه و آمار})$$

$$P(A - H) = P(A) - P(A \cap H) = ۰/۷ - ۰/۲ = ۰/۵$$

۳۳ گزینه ۴

$$\text{فضای نمونه}: n(S) = \binom{۱۲}{۳} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۲}} \times ۱۱ \times ۱۰}{\cancel{۳ \times ۲}} = ۲۲۰$$

$$\text{هر سه مهره همرنگ باشد}\ n(A') = \underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{۳ مهرهٔ سفید}} + \overbrace{\binom{۴}{۳}}^{\text{۳ مهرهٔ قرمز}} + \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ مهرهٔ سبز}}$$

$$= ۱ + ۴ + ۱۰ = ۱۵$$

$$P(A') = \frac{۱۵}{۲۲۰} = \frac{۳}{۴۴}$$

$$P(A) = ۱ - \frac{۳}{۴۴} = \frac{۴۱}{۴۴}$$

۳۴ گزینه ۲

$$\text{کل اعداد سه‌رقمی}: n(S) = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰$$

$$\text{اعداد سه‌رقمی مضرب ۵}: n(A) = ۹ \times ۱۰ \times ۲ = ۱۸۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۸۰}{۹۰۰} = \frac{۱}{۵}$$

۳۵

گزینه ۲

عددی مضرب ۴۲ است که هم بر ۶ و هم بر ۷ بخش‌پذیر باشد. اگر پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخاب‌شده بر ۶ را با A و بخش‌پذیر بودن آن بر ۷ را با B نشان دهیم، هدف محاسبهٔ $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ است.

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S)=۳۰۰-۵۱+۱=۲۵۰$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۶ برابر است با:

$$n(A)=\left[\frac{۳۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۵۰}{۶}\right]=۵۰-۸=۴۲$$

بنابراین داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۲}{۲۵۰}$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۷ برابر است با:

$$n(B)=\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right]-\left[\frac{۵۰}{۷}\right]=۴۲-۷=۳۵$$

بنابراین داریم:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳۵}{۲۵۰}$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۴۲ برابر $n(A\cap B)$ است:

$$n(A\cap B)=\left[\frac{۳۰۰}{۴۲}\right]-\left[\frac{۵۰}{۴۲}\right]=۷-۱=۶$$

بنابراین:

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۵۰}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=\frac{۴۲}{۲۵۰}+\frac{۳۵}{۲۵۰}-\frac{۱۲}{۲۵۰}=\frac{۶۵}{۲۵۰}=\frac{۱۳}{۵۰}=۰/۲۶$$

۳۶

گزینه ۳

$$n(S)=\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۵\times۴=۲۰$$

$$\text{پیشامد حاصل‌ضرب کوچک‌تر یا مساوی ۱۰}=\{(۱,۲),(۱,۴),(۱,۶),(۱,۸),(۳,۲),(۵,۲)\}$$

$$P(\text{حاصل‌ضرب بزرگ‌تر از ۱۰})=۱-P(\text{حاصل‌ضرب کوچک‌تر یا مساوی ۱۰})$$

$$=۱-\frac{۶}{۲۰}=\frac{۱۴}{۲۰}=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷$$

۳۷ گزینه ۴

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۱}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۵ \times ۴}{\frac{۱۰!}{۷!۳!}} = \frac{۵ \times ۴}{\frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳!}} = \frac{۱}{۶}$$

۳۸ گزینه ۳

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow ۰/۲ = ۰/۶ - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۴$$

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow ۰/۳ = P(B) - ۰/۴ \Rightarrow P(B) = ۰/۷$$

۳۹ گزینه ۴

مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای، برابر ۱ است. معادله خط به‌صورت $y = ax$ است، می‌توان نوشت:

$$P(۱) + P(۲) + \cdots + P(۶) = ۱ \Rightarrow a + ۲a + \cdots + ۶a = ۱$$
$$\Rightarrow (۱ + ۲ + \cdots + ۶)a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲۱}$$

پس شیب خط برابر $\frac{۱}{۲۱}$ است.

۴۰ گزینه ۲

در نظر می‌گیریم:

A: پیشامد بخش‌پذیر بودن بر ۲   B: پیشامد بخش‌پذیر بودن بر ۵

از ما $A \cup B$ را می‌خواهد، به دست می‌آید:

$$n(S) = ۶۰۰ - ۱۰۰ = ۵۰۰$$

$$n(A) = [\frac{۶۰۰}{۲}] - [\frac{۱۰۰}{۲}] = ۳۰۰ - ۵۰ = ۲۵۰$$
$$n(B) = [\frac{۶۰۰}{۵}] - [\frac{۱۰۰}{۵}] = ۱۲۰ - ۲۰ = ۱۰۰$$

$$n(A \cap B) = [\frac{۶۰۰}{۱۰}] - [\frac{۱۰۰}{۱۰}] = ۶۰ - ۱۰ = ۵۰$$

اکنون می‌نویسیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{۲۵۰}{۵۰۰} + \frac{۱۰۰}{۵۰۰} - \frac{۵۰}{۵۰۰} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$$

۴۱ گزینه ۱

گام اول: تعداد کل حالت‌های پیش‌آمده برابر است با:

$$\binom{۸}{۱} \times \binom{۵}{۱} = ۸ \times ۵ = ۴۰$$

گام دوم: حالت‌های مطلوب را می‌نویسیم:

$$(۴, ۵)$$
$$(۵, ۴), (۵, ۵)$$
$$(۶, ۳), (۶, ۴), (۶, ۵)$$
$$(۷, ۲), (۷, ۳), (۷, ۴), (۷, ۵)$$
$$(۸, ۱), (۸, ۲), (۸, ۳), (۸, ۴), (۸, ۵)$$

تعداد حالت‌ها برابر ۱۵تا است.

گام آخر: احتمال مطلوب ما برابر است با:

$$P(A) = \frac{۱۵}{۴۰} = \frac{۳}{۸}$$

۴۲ گزینه ۲

در پرتاب مکرر یک تاس، عدد ۴ یا بعد از ۶ می‌آید و یا قبل از ۶ که احتمال آمدن عدد ۴ قبل از عدد ۶، برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۴۳ گزینه ۳

اگر مسئله از راه متمم حل شود، ساده‌تر خواهد بود؛ یعنی:

$$P(\text{روشن حداقل یک ۶}) = ۱ - P(\text{اصلاً ۶ نیاید}) = ۱ - \frac{۵ \times ۵ \times ۵}{۶ \times ۶ \times ۶}$$
$$= ۱ - \frac{۱۲۵}{۲۱۶} = \frac{۲۱۶ - ۱۲۵}{۲۱۶} = \frac{۹۱}{۲۱۶}$$

۴۴ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$n(S) = ۳۶$$

$$\begin{aligned} A = \{&(۱\,,\,۶)\,,\,(۲\,,\,۳)\,,\,(۲\,,\,۴)\,,\,(۲\,,\,۵)\,,\,(۲\,,\,۶)\,,\\ &(۳\,,\,۲)\,,\,(۳\,,\,۳)\,,\,(۳\,,\,۴)\,,\,(۳\,,\,۵)\,,\,(۳\,,\,۶)\,,\\ &(۴\,,\,۲)\,,\,(۴\,,\,۳)\,,\,(۴\,,\,۴)\,,\,(۴\,,\,۵)\,,\,(۴\,,\,۶)\,,\\ &(۵\,,\,۲)\,,\,(۵\,,\,۳)\,,\,(۵\,,\,۴)\,,\,(۵\,,\,۵)\,,\,(۵\,,\,۶)\,,\\ &(۶\,,\,۱)\,,\,(۶\,,\,۲)\,,\,(۶\,,\,۳)\,,\,(۶\,,\,۴)\,,\,(۶\,,\,۵)\,,\,(۶\,,\,۶)\} \Rightarrow n(A) = ۲۶ \end{aligned}$$

$$P\,(A) = \frac{۲۶}{۳۶} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

راه‌حل دوم:

$$\begin{aligned} A' = \{&(۱\,,\,۱)\,,\,(۱\,,\,۲)\,,\,(۱\,,\,۳)\,,\,(۱\,,\,۴)\,,\,(۱\,,\,۵)\,,\\ &(۲\,,\,۱)\,,\,(۲\,,\,۲)\,,\,(۳\,,\,۱)\,,\,(۴\,,\,۱)\,,\,(۵\,,\,۱)\} \end{aligned}$$

$$P\,(A') = \frac{۱۰}{۳۶} \Rightarrow P\,(A) = ۱ - \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۲۶}{۳۶} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

۴۵ گزینه ۳

اعضای پیشامد A برابر است با:

$$\begin{aligned} \{&(۱, ۱, \text{رو})\,(۱, ۲, \text{رو})\,(۱, ۳, \text{رو})\,(۱, ۴, \text{رو})\,(۲, ۱, \text{رو})\,(۲, ۲, \text{رو})\,(۲, ۳, \text{رو})\\ &(۱, ۱, \text{پ})\,(۱, ۲, \text{پ})\,(۱, ۳, \text{پ})\,(۱, ۴, \text{پ})\,(۲, ۱, \text{پ})\,(۲, ۲, \text{پ})\,(۲, ۳, \text{پ})\\ &(۳, ۱, \text{رو})\,(۳, ۲, \text{رو})\,(۴, ۱, \text{رو})\,(۳, ۱, \text{پ})\,(۳, ۲, \text{پ})\,(۴, ۱, \text{پ})\} \end{aligned}$$

حال در مجموعه بالا، اعضایی که سکه رو آمده است، ۱۰ تا و در بخش اعضایی که سکه پشت است، تعداد اعضایی که حداقل یکی از اعداد تاس زوج است، ۷ تا می‌باشد.

تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۶ \times ۶ \times ۲ = ۷۲$

بنابراین: $P\,(A \cap B) = \frac{۱۷}{۷۲} = ۰/۲۳$