۱ گزینه ۴

راه‌حل اول: نامعادله فقط برای $x > ۰$ جواب دارد. بنابراین:

$$|x^۲ - ۲x| < x \Rightarrow |x(x-۲)| < x \xrightarrow{x>۰} |x-۲| < ۱$$

$$\Rightarrow -۱ < x - ۲ < ۱ \Rightarrow ۱ < x < ۳$$

راه‌حل دوم: داریم:

$$|a| < k \Rightarrow -k < a < k$$

نامعادله را در دو مرحله ($-k < a$ و $a < k$) حل کرده و بین مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم.

$$|x^۲ - ۲x| < x \Rightarrow -x < x^۲ - ۲x < x$$

$$۱)\ \ x^۲ - ۲x > -x \Rightarrow x^۲ - x > ۰ \Rightarrow x(x-۱) > ۰ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < ۰ \quad (I)$$

$$۲)\ \ x^۲ - ۲x < x \Rightarrow x^۲ - ۳x < ۰ \Rightarrow x(x-۳) < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۳ \quad (II)$$

نامعادله‌های ۱ و ۲ باید هم‌زمان برقرار باشند، پس بین دو مجموعه‌جواب به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II)\ :\ ۱ < x < ۳ \Rightarrow x \in (۱, ۳)$$

۲ گزینه ۳

روش اول:

این نامعادله را در دو حالت حل می‌کنیم. یک بار $x \geq 0$ و بار دیگر $x < 0$ فرض می‌شود. مجموعه جواب نامعادله را در هریک از حالت‌ها به دست آورده و چون هر دوی آن‌ها برای ما قابل‌قبول است بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$1)\ x \geq 0 \Rightarrow |x| = x : x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3 \xrightarrow{|x|=x} x + x \leq \frac{1}{2}x + 3$$
$$\Rightarrow 2x \leq \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{2}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{x\geq 0} 0 \leq x \leq 2$$

$$2)\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x : x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3 \xrightarrow{|x|=-x} x - x \leq \frac{1}{2}x + 3$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \geq -3 \Rightarrow x \geq -6 \xrightarrow{x<0} -6 \leq x < 0$$

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = [-6, 0) \cup [0, 2] = [-6, 2]$$

روش دوم:

اگر $|x| \leq a$ و $a \geq 0$، آنگاه $-a \leq x \leq a$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3$$
$$|x| \leq -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow -(-\frac{1}{2}x + 3) \leq x \leq -\frac{1}{2}x + 3$$
$$x \leq -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{3}{2}x \leq 3 \Rightarrow x \leq 2$$
$$x \geq -(-\frac{1}{2}x + 3) \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}x - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x \geq -3 \Rightarrow x \geq -6$$

بنابراین $-6 \leq x \leq 2$ است.

ازطرفی:

$$-\frac{1}{2}x + 3 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x \geq -3 \Rightarrow x \leq 6$$

پس مجموعه جواب نامعادله به صورت $[-6, 2]$ به دست می‌آید.

۳ گزینه ۱

با فرض $x \neq -\frac{1}{2}$ طرفین نامعادله را در $|2x+1|$ ضرب کرده و آن را از حالت کسری خارج می‌کنیم. وقتی دو طرف نامعادله مثبت باشند، می‌توان با خیال راحت دو طرف را به توان دو رساند تا از شر قدرمطلق راحت شده و مجموعه جواب نامعادله را به راحتی تعیین کنیم.

$$\frac{|x-2|}{|2x+1|} > 1 \xrightarrow{x\neq -\frac{1}{2}} |x-2| > |2x+1| \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} (x-2)^2 > (2x+1)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 < 0 \Rightarrow (x+3)(3x-1) < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{1}{3}$$

با توجه به شرط $x = -\frac{1}{2}$ در ابتدای حل تست، باید این مقدار x را از مجموعه جواب به‌دست‌آمده خارج کنیم:

$$\text{مجموعه جواب نامعادله} = (-3, \frac{1}{3}) - \left\{-\frac{1}{2}\right\} = (-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$$

دقت کنید که گزینه‌های ۳ و ۴ نیز شامل بخشی از جواب هستند، اما کامل‌ترین گزینه، گزینهٔ ۱ است.

۴ گزینه ۲

$$x \geq ۵ \Rightarrow |x-۵| = x-۵ \Rightarrow ۳x + |x-۵| > ۷ \Rightarrow ۳x + x - ۵ > ۷ \Rightarrow ۴x > ۱۲$$
$$\Rightarrow x > ۳ \xrightarrow{x\geq ۵} x \geq ۵ \qquad (I)$$
$$x < ۵ \Rightarrow |x-۵| = ۵-x \Rightarrow ۳x + |x-۵| > ۷ \Rightarrow ۳x + ۵ - x > ۷ \Rightarrow ۲x > ۲$$
$$\Rightarrow x > ۱ \xrightarrow{x<۵} ۱ < x < ۵ \qquad (II)$$
$$(I)\,,\,(II) \xrightarrow{\cup} \left.\begin{matrix} x \geq ۵ \\ ۱ < x < ۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x > ۱$$

۵ گزینه ۳

$$|۲x+۳| < |x^۲| \Rightarrow (۲x+۳-x^۲)(۲x+۳+x^۲) < ۰$$
$$\xrightarrow{x^۲+۲x+۳>۰} -x^۲ + ۲x + ۳ < ۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۳) > ۰$$
$$\Rightarrow x \in (-\infty\,,\,-۱) \cup (۳\,,\,+\infty)$$

۶ گزینه ۴

باید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ برای xهای مشترک هم‌علامت باشند که در هیچ بازه‌ای چنین اتفاقی نیفتاده است. پس جواب $\varnothing$ می‌باشد.

۷ گزینه ۱

در نامعادله $|۲x^۲-۱| < x$ باید $x > ۰$ باشد.

$$|۲x^۲-۱| < x \xrightarrow{x>۰} |۲x^۲-۱| < |x| \Rightarrow (۲x^۲-۱-x)(۲x^۲-۱+x) < ۰$$
$$\Rightarrow (۲x^۲-x-۱)(۲x^۲+x-۱) < ۰ \Rightarrow \underbrace{(x-۱)(۲x+۱)(x+۱)(۲x-۱)}_{p(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۲}$		$\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
$p(x)$		+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	

$$p(x) < ۰ \xrightarrow{(x>۰)} \frac{۱}{۲} < x < ۱$$

۸ گزینه ۳

$$f^۲(x) + f(x) - ۶ = ۰ \Rightarrow (f(x)-۲)(f(x)+۳) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲ \Rightarrow x = ۴\,,\; x = ۱\,,\; x = -۲ \\ f(x) = -۳ \Rightarrow x = -۴ \end{cases}$$
$$|x| - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۴		-۲		-۱		۱		۴		$+\infty$
صورت		+	۰	−	۰	+		+	۰	−	۰	+	
مخرج		+		+		+	۰	−	۰	+		+	
A		+	۰	− ج	۰	+	ت ن	− ج	ت ن	− ج	۰	+	

۹ گزینه ۴

$$A = \frac{f(x)(f^{۲}(x) - ۳f(x) + ۵)}{x(x-۳)(x-۱)}$$

عبارت $f^{۲}(x) - ۳f(x) + ۵$ همواره مثبت است، زیرا:

$$\begin{cases} \Delta = ۹ - ۲۰ < ۰ \\ a = ۱ > ۰ \end{cases}$$

حال جدول تعیین علامت را برای A رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۱		۳		$+\infty$
f(x)		+	۰	−	۰	+		+	۰	−	۰	+	
$x^{۳}-۴x^{۲}+۳x$		−		−		−	۰	+	۰	−	۰	+	
A		−	۰	+	۰	−	ت ن	+	ت ن	+	ت ن	+	

$$\Rightarrow A > ۰ \Rightarrow (-۵\,,\ -۳) \cup (۰\,,\ ۱) \cup (۱\,,\ ۳) \cup (۳\,,\ +\infty)$$

۱۰ گزینه ۳

گام اول

الف) باتوجه‌به ریشه‌های قدر مطلق $|۲x|$ و $|x-۱|$، عبارت درون قدرمطلق‌ها را در سه محدودهٔ $x < ۰$، $۰ \le x \le ۱$ و $x > ۱$ تعیین علامت می‌کنیم.

ب) جواب سؤال بازه‌ای است که روی آن $f(x) > g(x)$ باشد که در هریک از سه محدودهٔ مشخص‌شده به‌صورت جداگانه تعیین می‌شود.

ج) اجتماع بازه‌های به‌دست‌آمده جواب سؤال خواهد بود.

گام دوم

$$۱)\ \ x < ۰ \Rightarrow |۲x| = -۲x \ \text{و}\ |x-۱| = -(x-۱) = ۱ - x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x-۱| > |۲x| \Rightarrow ۵ - (۱-x) > -۲x \Rightarrow x + ۴ > -۲x \Rightarrow ۳x > -۴$$
$$\Rightarrow x > -\frac{۴}{۳} \xrightarrow{x<۰} x \in (-\frac{۴}{۳}\,,\ ۰)$$

$$۲)\ \ ۰ \le x \le ۱ \Rightarrow |۲x| = ۲x \ \text{و}\ |x-۱| = -(x-۱) = ۱ - x$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x-۱| > |۲x| \Rightarrow ۵ - (۱-x) > ۲x \Rightarrow x + ۴ > ۲x \Rightarrow x < ۴ \xrightarrow{۰\le x\le ۱} x \in [۰\,,\ ۱]$$

$$۳)\ \ x > ۱ \Rightarrow |۲x| = ۲x \ \text{و}\ |x-۱| = x - ۱$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow ۵ - |x-۱| > ۲x \Rightarrow ۵ - (x-۱) > ۲x \Rightarrow ۵ - x + ۱ > ۲x \Rightarrow ۳x < ۶$$
$$\Rightarrow x < ۲ \xrightarrow{x>۱} x \in (۱\,,\ ۲)$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله به صورت $(-\frac{۴}{۳}\,,\ ۲)$ درمی‌آید.

۱۱

گزینه ۴

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

عبارت $x^۲ + ۱$ همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^۲ + ۱| = x^۲ + ۱$$

نامعادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر می‌شود:

$$۲x + ۱ - |x - ۲| > x^۲ + ۱$$

نامعادله را در دو حالت $x \geq ۲$ و $x < ۲$ حل می‌کنیم:

$$(I) \quad x \geq ۲ \;\Rightarrow\; x - ۲ \geq ۰ \;\Rightarrow\; |x - ۲| = x - ۲$$
$$۲x + ۱ - (x - ۲) > x^۲ + ۱ \;\Rightarrow\; ۲x + ۱ - x + ۲ > x^۲ + ۱$$
$$\Rightarrow x^۲ - x - ۲ < ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۱) < ۰$$
$$\Rightarrow \; -۱ < x < ۲ \xrightarrow{x \geq ۲}$$ x هیچ مقداری نمی تواند داشته باشد

$$(II) \quad x < ۲ \;\Rightarrow\; x - ۲ < ۰ \;\Rightarrow\; |x - ۲| = -(x - ۲)$$
$$۲x + ۱ + x - ۲ > x^۲ + ۱ \;\Rightarrow\; x^۲ - ۳x + ۲ < ۰$$
$$\Rightarrow \; (x - ۲)(x - ۱) < ۰ \;\Rightarrow\; ۱ < x < ۲ \xrightarrow{x<۲} ۱ < x < ۲$$

اجتماع دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده؛ یعنی بازهٔ $(۱, ۲)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲x + ۱ - |x - ۲| > |x^۲ + ۱|$ می‌شود.

۱۲

گزینه ۱

دو طرف نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x - ۳}{x + ۱} < ۳ \Rightarrow \frac{۲x - ۳}{x + ۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-x - ۶}{x + ۱}}_{p(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		-۶		-۱		$+\infty$
$p(x)$		$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$	

$p(x) < ۰ \Rightarrow x < -۶$ یا $x > -۱ \quad (۱)$

$$\frac{۲x - ۳}{x + ۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۲x - ۳}{x + ۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{x - ۴}{x + ۱}}_{q(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
$q(x)$		$+$	ت.ن	$-$	۰	$+$	

$q(x) > ۰ \Rightarrow x < -۱$ یا $x > ۴ \quad (۲)$

اشتراک (۱) و (۲) جواب مسئله است که اجتماع دو بازهٔ $(-\infty, -۶)$ و $(۴, +\infty)$ می‌باشد که به‌صورت $\mathbb{R} - [-۶, ۴]$ است.

۱۳ گزینه ۴

$$-۲ < y < ۰ \Rightarrow -۲ < \frac{۲}{(x-۱)(x-۲)} < ۰ \Rightarrow \frac{۲}{(x-۱)(x-۲)} < ۰ \Rightarrow ۱ < x < ۲ \Rightarrow$$ هیچ مقدار

۱۴ گزینه ۲

عبارت $x^۲ + ۱$ همواره مثبت است و همچنین با شرط $x > \frac{۷}{۳}$ عبارت‌های $۳x - ۷$ و $\sqrt{x} - ۱$ نیز مثبت‌اند، پس نامعادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(x-۳)^۳ < ۰ \Rightarrow x - ۳ < ۰ \Rightarrow x < ۳ \xrightarrow{\cap (x > \frac{۷}{۳})} x \in (\frac{۷}{۳}, ۳)$$

$$\Rightarrow a \times b = \frac{۷}{۳} \times ۳ = ۷$$

۱۵ گزینه ۴

گام اول

مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $f(x) > \frac{۷}{۲}$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$f(x) > \frac{۷}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + ۶ > \frac{۷}{۲} \xrightarrow{\times ۲} -x^۲ + ۴x + ۱۲ > ۷$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x - ۵ < ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۵ \Rightarrow x \in (-۱, ۵)$$

بنابراین بازهٔ (a, b) به‌صورت $(-۱, ۵)$ درآمده و بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$b - a = ۵ - (-۱) = ۵ + ۱ = ۶$$

۱۶ گزینه ۱

$$\frac{x}{۲x-۱} - \frac{x}{x^۲+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{x(x^۲ + ۱ - ۲x + ۱)}{(۲x-۱)(x^۲+۱)} < ۰ \Rightarrow \frac{x(x^۲ - ۲x + ۲)}{(۲x-۱)(x^۲+۱)} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲x-۱} < ۰ \Rightarrow ۰ < x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴b^۲ = ۱$$

دقت کنید که عبارت‌های $x^۲ - ۲x + ۲$ و $x^۲ + ۱$ همواره مثبت‌اند.

۱۷ گزینه ۱

$$\frac{۱}{x^۲-۴} > ۲ \Rightarrow \frac{۱}{x^۲-۴} - ۲ > ۰ \Rightarrow \frac{-۲x^۲+۹}{x^۲-۴} > ۰$$

$$\begin{cases} -۲x^۲+۹ = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۹}{۲}} = \pm۲/... \\ x^۲-۴ = ۰ \Rightarrow x = \pm۲ \end{cases}$$

		$-\sqrt{\frac{۹}{۲}}$		-۲		۲		$\sqrt{\frac{۹}{۲}}$	
	−	∘	+	ت	−	ت	+	∘	−
			ج	ت		ت	ج		

می‌دانیم که در بازهٔ $(-\sqrt{\frac{۹}{۲}}\,,\,-۲) \cup (۲\,,\,\sqrt{\frac{۹}{۲}})$ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

۱۸ گزینه ۳

وقتی $\Delta < ۰$ باشد، آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد، پس:

$$(-m)^۲ - ۴(۲)(-m) < ۰ \Rightarrow m^۲ + ۸m < ۰ \Rightarrow m(m+۸) < ۰$$

		-۸		۰	
$m^۲+۸m$	+	∘	−	∘	+

$$\Rightarrow -۸ < m < ۰$$

۱۹ گزینه ۲

برای اینکه عبارت درجه دوم همواره منفی باشد، باید ضریب $x^۲$ منفی و Δ نیز منفی باشد، پس:

$$۶m < ۰ \Rightarrow m < ۰$$

$$\Delta = ۴ + ۲۴m < ۰ \Rightarrow ۲۴m < -۴ \Rightarrow m < -\frac{۱}{۶}$$

بنابراین به ازای $m < -\frac{۱}{۶}$ عبارت موردنظر همواره منفی است.

۲۰

گزینه ۳

وقتی نمودار بالای محور xها و بر آن مماس است؛ یعنی ریشهٔ مضاعف دارد، بنابراین:

$$y=(m-۲)x^۲-۳x+m+۲\geq ۰$$
$$\begin{cases}\Delta=۰\Rightarrow b^۲-۴ac=۰\Rightarrow ۹-۴(m-۲)(m+۲)=۰\\ a\geq ۰\Rightarrow m-۲\geq ۰\Rightarrow m\geq ۲\end{cases}$$
$$۹-۴(m-۲)(m+۲)=۰\Rightarrow ۹-۴(m^۲-۴)=۰\Rightarrow ۹-۴m^۲+۱۶=۰$$
$$\Rightarrow -۴m^۲+۲۵=۰$$

$$\Rightarrow -۴m^۲=-۲۵\Rightarrow m^۲=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow \begin{cases}m=\frac{۵}{۲}\\ m=-\frac{۵}{۲}\end{cases}\xrightarrow{m\geq ۲} m=\frac{۵}{۲}$$

۲۱

گزینه ۲

نکته: برای اینکه نمودار تابع درجه‌دو همواره بالای محور xها قرار گیرد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $\Delta<۰$

۲) ضریب $x^۲$ بیشتر از صفر باشد.

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}x^۲\ \text{ضریب} >۰\Rightarrow ۱-a>۰\Rightarrow a<۱\quad (۱)\\ \Delta<۰\Rightarrow (۲\sqrt{۶})^۲+۴a(۱-a)<۰\Rightarrow ۲۴+۴a-۴a^۲<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^۲-a-۶>۰\Rightarrow (a+۲)(a-۳)>۰\Rightarrow a<-۲ \ \text{یا}\ a>۳\quad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} a<-۲$$

۲۲

گزینه ۲

اگر سهمی پایین محور xها باشد، باید $\Delta<۰$ و $a<۰$ باشد. پس:

$$y=(۱-m)x^۲+۲(m-۳)x-۱$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۴(m-۳)^۲+۴(۱-m)=۴\left(m^۲-۶m+۹\right)+۴-۴m<۰$$
$$\xrightarrow{\div ۴} m^۲-۶m+۹+۱-m<۰\Rightarrow m^۲-۷m+۱۰<۰$$
$$\Rightarrow (m-۲)(m-۵)<۰\Rightarrow ۲<m<۵\quad (۱)$$
$$a=۱-m<۰\Rightarrow m>۱\quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر بازهٔ $(۲,۵)$ است.

۲۳

گزینه ۴

گام اول

می‌خواهیم نامعادلهٔ $x^{2}-ax+a-2>0$ به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد. ضریب x^{2} که مثبت است، تنها این نکته باقی می‌ماند که عبارت درجه دو موردنظر ریشه نداشته و $\Delta<0$ باشد.

گام دوم

$$y=x^{2}-ax+a-2>0\Rightarrow \Delta<0$$
$$\Rightarrow (-a)^{2}-4(1)(a-2)<0\Rightarrow a^{2}-4a+8<0$$
$$\Rightarrow a^{2}-4a+4+4<0\Rightarrow (a-2)^{2}+4<0$$

به یک عبارت همواره نادرست رسیدیم، زیرا $(a-2)^{2}$ عبارتی نامنفی است، اگر با ۴ هم جمع شود نمی‌تواند منفی باشد. پس هیچ مقداری برای a وجود نداشته و مجموعه جواب برابر $\varnothing$ می‌شود.

۲۴

گزینه ۳

عبارت درجهٔ دو در صورتی به ازای هر مقدار x منفی است که اولاً ضریب x^{2} منفی باشد، ثانیاً معادله ریشه نداشته و $\Delta<0$ باشد. مجموعه‌جواب نامعادله‌های گفته‌شده را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$f(x)=(a-1)x^{2}+(a-1)x+1$$
$$1)\quad a-1<0\Rightarrow a<1\quad (I)$$
$$2)\quad \Delta<0\Rightarrow (a-1)^{2}-4(a-1)(1)<0$$
$$\Rightarrow (a-1)(a-1-4)<0\Rightarrow (a-1)(a-5)<0\Rightarrow 1<a<5\quad (II)$$

بین دو مجموعه‌جواب (I) و (II) هیچ اشتراکی وجود ندارد، بنابراین مجموعه‌جواب قابل‌قبول برای a مجموعهٔ $\varnothing$ است.

۲۵

گزینه ۲

عبارت درجه دوم $y=ax^{2}+bx+c$ در صورتی به ازای هر مقدار دلخواه x مثبت است که دو شرط $a>0$ و $\Delta<0$ همزمان برقرار باشد. مجموعه جواب این دو شرط را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$1)\quad a>0\Rightarrow m-1>0\Rightarrow m>1\quad (I)$$
$$f(x)=(m-1)x^{2}+6x+2m+1$$
$$2)\quad \Delta<0\Rightarrow 6^{2}-4(m-1)(2m+1)<0$$
$$\Rightarrow 36-4(m-1)(2m+1)<0\ \xrightarrow{\div 4}\ 9-(m-1)(2m+1)<0$$
$$\Rightarrow 9-2m^{2}+m+1<0\Rightarrow -2m^{2}+m+10<0$$
$$\Rightarrow 2m^{2}-m-10>0\Rightarrow (2m-5)(m+2)>0$$
$$\Rightarrow m>\frac{5}{2}\ \text{یا}\ m<-2\quad (II)$$

بین دو مجموعه جواب (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:

$$(I)\ \cap\ (II):m>\frac{5}{2}\Rightarrow m>2/5$$

۲۶ گزینه ۴

اختلاف ریشه‌های معادله درجه دوم عبارتند از:

$$D=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow\frac{\sqrt{۴k^۲-۲۰}}{۱}=\frac{۴}{۳}k$$
$$\xrightarrow{k\geq ۰}۴k^۲-۲۰=\frac{۱۶}{۹}k^۲\Rightarrow ۳۶k^۲-۱۸۰=۱۶k^۲$$
$$\Rightarrow ۲۰k^۲=۱۸۰\Rightarrow k^۲=۹\Rightarrow k=\pm ۳\xrightarrow{k\geq ۰}k=۳$$

بنابراین:

$$\left[\frac{k^۲}{۲}\right]=\left[\frac{۹}{۲}\right]=۴$$

۲۷ گزینه ۴

$$mx^۲-۴x+m^۲-۴=۰$$
$$\frac{c}{a}=\frac{m^۲-۴}{m}\xrightarrow{\sqrt{۳}\ \text{واسطه}}\frac{m^۲-۴}{m}=\sqrt{۳}^۲\Rightarrow m^۲-۴=۳m$$
$$\Rightarrow m^۲-۳m-۴=۰\Rightarrow(m+۱)(m-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\m=۴\end{cases}$$
$$\xrightarrow{m=-۱}-x^۲-۴x-۳=۰\Rightarrow S=-\frac{b}{a}=-۴$$
$$\xrightarrow{m=۴}۴x^۲-۴x+۱۲=۰\xrightarrow{\Delta<۰}\text{ریشه ندارد}$$

۲۸ گزینه ۴

$$\left|\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}\right|=\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha\beta|}=\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{\left|\frac{c}{a}\right|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|c|}=\frac{\sqrt{۱+۱۶}}{|-۲|}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

۲۹ گزینه ۲

اگر فرض کنیم $x_۱=\alpha\beta^۲$ و $x_۲=\alpha^۲\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۸x^۲+kx-۱=۰$ باشند آنگاه کافی است $x_۱+x_۲$ را به دست آوریم.

$$۲x^۲-۳x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{۳}{۲}\\P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$
$$۸x^۲+kx-۱=۰\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}$$
$$\Rightarrow\alpha\beta^۲+\alpha^۲\beta=\frac{-k}{۸}\Rightarrow\alpha\beta(\beta+\alpha)=-\frac{k}{۸}\Rightarrow(-\frac{۱}{۲})(\frac{۳}{۲})=-\frac{k}{۸}\Rightarrow k=۶$$

۳۰ گزینه ۴

برای حل، یکی از ریشه‌های معادله را α و دیگری را $\alpha+2$ در نظر می‌گیریم.
در معادلهٔ داده‌شده حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم از روی حاصل‌جمع مقدار α محاسبه می‌شود و با داشتن α و رابطهٔ حاصل‌ضرب مقدار m را هم محاسبه می‌کنیم.

$$3x^2-15x+m=0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (\alpha+2) \text{ ریشه های}} \begin{cases}\alpha+\alpha+2=-(-\frac{15}{3})=5\\ \alpha(\alpha+2)=\frac{m}{3}\end{cases}$$

مقدار α را حساب می‌کنیم:

$$2\alpha+2=5 \Rightarrow 2\alpha=3 \Rightarrow \alpha=\frac{3}{2}$$

محاسبهٔ مقدار m:

$$\alpha(\alpha+2)=\frac{m}{3} \xrightarrow{\alpha=\frac{3}{2}} \frac{3}{2}(\frac{3}{2}+2)=\frac{m}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{m}{3} \Rightarrow \frac{m}{3}=\frac{21}{4} \Rightarrow m=\frac{63}{4}$$

۳۱ گزینه ۲

گام اول

α و β را ریشه‌های معادلهٔ درجه دو فرض می‌کنیم. $\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی بین α و β است. بنابراین داریم:

$$\alpha\beta=(\sqrt{2})^2=2$$

گام دوم

در معادلهٔ درجهٔ دو به فرم $ax^2+bx+c=0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$mx^2-5x+m^2-3=0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \alpha\beta=\frac{m^2-3}{m}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=2} 2=\frac{m^2-3}{m} \Rightarrow m^2-3=2m$$

$$\Rightarrow m^2-2m-3=0 \Rightarrow (m-3)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=3\\ m=-1\end{cases}$$

$$m=3:\quad 3x^2-5x+6=0 \Rightarrow \Delta=25-72<0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$m=-1:\quad -x^2-5x-2=0 \Rightarrow \Delta=25-8>0$$

پس فقط $m=-1$ قابل‌قبول است.

۳۲ گزینه ۲

یک ریشه را α و ریشهٔ دیگر را $۳\alpha + ۳$ در نظر می‌گیریم.
با استفاده از حاصل‌جمع ریشه‌ها مقدار α را محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از حاصل‌ضرب ریشه‌ها مقدار m را به دست می‌آوریم.

$$۳x^۲ - ۱۷x + m = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } (۳\alpha+۳) \text{ و } \alpha} \alpha + (۳\alpha + ۳) = -(-\frac{۱۷}{۳})$$
$$\Rightarrow ۴\alpha + ۳ = \frac{۱۷}{۳} \Rightarrow ۴\alpha = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \alpha = \frac{۲}{۳}$$
$$۳\alpha + ۳ = ۳(\frac{۲}{۳}) + ۳ = ۲ + ۳ = ۵$$

پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha \times (۳\alpha + ۳) = \frac{۲}{۳} \times ۵ = \frac{m}{۳} \Rightarrow \frac{m}{۳} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow m = ۱۰$$

۳۳ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ $x(۵x + ۳) = ۲$ را به فرم استاندارد معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل کرده و باتوجه‌به اینکه α و β ریشه‌های آن است، مقدار $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم.
برای یافتن k باید حاصل $\frac{۱}{\beta^۲} + \frac{۱}{\alpha^۲}$ را محاسبه کرده و برابر $\frac{k}{۴}$ قرار دهیم.

$$x(۵x + ۳) = ۲ \Rightarrow ۵x^۲ + ۳x = ۲ \Rightarrow ۵x^۲ + ۳x - ۲ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \beta \text{ و } \alpha} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{۳}{۵} \\ \alpha\beta = -\frac{۲}{۵} \end{cases}$$

مقدار k را محاسبه می‌کنیم:

$$۴x^۲ - kx + ۲۵ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه‌های } \frac{۱}{\beta^۲} \text{ و } \frac{۱}{\alpha^۲}} \frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\beta^۲} = \frac{k}{۴}$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲} = \frac{(\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta}{\alpha^۲\beta^۲} = \frac{k}{۴}$$
$$\Rightarrow \frac{(-\frac{۳}{۵})^۲ - ۲(-\frac{۲}{۵})}{(-\frac{۲}{۵})^۲} = \frac{k}{۴} \Rightarrow \frac{\frac{۹}{۲۵} + \frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}} = \frac{\frac{۲۹}{۲۵}}{\frac{۴}{۲۵}} = \frac{۲۹}{۴} = \frac{k}{۴} \Rightarrow k = ۲۹$$

۳۴

گزینه ۲

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^۲ + x = t$، معادلهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲+x=t} t^۲ - ۱۸t + ۷۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (t - ۱۲)(t - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱۲ \\ t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = ۶ \end{cases}$$

حال مقادیر x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۴ \\ x_۲ = ۳ \end{cases}$$
$$t = ۶ \Rightarrow x^۲ + x = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۳ = -۳ \\ x_۴ = ۲ \end{cases}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = -۴ + ۳ - ۳ + ۲ = -۲$$

۳۵

گزینه ۱

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادلهٔ درجه دو داده‌شده، باشد می‌دانیم $\alpha^۲ + \beta^۲ = ۶$ است. $\alpha^۲ + \beta^۲$ برابر است با:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = S^۲ - ۲P = ۶$$

ب) درصورتی‌که $\Delta > ۰$ باشد معادلهٔ درجه دو، دو ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^۲ - (m + ۳)x + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \dfrac{m + ۳}{m} \\ P = \alpha\beta = \dfrac{۵}{m} \end{cases}$$
$$\alpha^۲ + \beta^۲ = (\frac{m + ۳}{m})^۲ - ۲(\frac{۵}{m}) = ۶ \Rightarrow \frac{m^۲ + ۶m + ۹}{m^۲} - \frac{۱۰}{m} = ۶$$
$$\xrightarrow{\times m^۲} m^۲ + ۶m + ۹ - ۱۰m = ۶m^۲ \Rightarrow ۵m^۲ + ۴m - ۹ = ۰ \Rightarrow (۵m + ۹)(m - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = -۴ < ۰ \Rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی} \\ m = -\dfrac{۹}{۵} \Rightarrow -\dfrac{۹}{۵}x^۲ - \dfrac{۶}{۵}x + ۵ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰ \Rightarrow \text{دارای دو ریشهٔ حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{۹}{۵}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۳۶ گزینه ۳

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{a}{۳}\xrightarrow{\beta=۳\alpha}\alpha+۳\alpha=\frac{a}{۳}\Rightarrow ۴\alpha=\frac{a}{۳}\Rightarrow a=۱۲\alpha$$

$$\alpha.\beta=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\beta=۳\alpha}\alpha.۳\alpha=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \alpha^{۲}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow \alpha=\pm\frac{۲}{۳}$$

$$a=۱۲\alpha=۱۲(\pm\frac{۲}{۳})=\pm۸\Rightarrow ۸-(-۸)=۱۶$$

۳۷ گزینه ۲

چون α ریشهٔ معادله است، پس:

$$\alpha^{۲}=\alpha+۱\xrightarrow{\times\alpha}\alpha^{۳}=\alpha^{۲}+\alpha\xrightarrow{\alpha^{۲}=\alpha+۱}\alpha^{۳}=\alpha+۱+\alpha=۲\alpha+۱$$

$$A=\alpha^{۳}+۲\beta-۱=۲\alpha+۱+۲\beta-۱=۲(\alpha+\beta)=۲(۱)=۲$$

۳۸ گزینه ۴

نکته: در معادله $ax^{۴}+bx^{۲}+c=۰$ با شرط وجود ریشه حقیقی، همواره $S=۰$ (جمع ریشه‌ها) است.

$$\xrightarrow{x^{۲}=t}t^{۲}-۵t+۱=۰\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}\Rightarrow x_{۱}=\pm\sqrt{\dfrac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}}\\ t=\dfrac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}\Rightarrow x_{۲}=\pm\sqrt{\dfrac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}}\end{cases}$$

$$۲SP^{۲}+\frac{S}{P}+۲P^{۲}\xrightarrow{S=۰}۰+۰+۲((-\sqrt{\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}})^{۲}\times(-\frac{\sqrt{۵-\sqrt{۲۱}}}{۲})^{۲})^{۲}$$

$$=۲((\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲})(\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}))^{۲}=۲(\frac{۲۵-۲۱}{۴})^{۲}=۲$$

۳۹ گزینه ۲

$$S = \frac{m+۲}{\frac{m}{۳}} = \frac{۳(m+۲)}{m} \ , \ P = \frac{m-۴}{\frac{m}{۳}} = \frac{۳(m-۴)}{m}$$

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = ۲۷ \Rightarrow S^۲ - ۲P = ۲۷ \Rightarrow \frac{۹(m+۲)^۲}{m^۲} - \frac{۶(m-۴)}{m} = ۲۷$$

$$۹(m^۲ + ۴m + ۴) - ۶m(m-۴) = ۲۷m^۲$$

$$۹m^۲ + ۳۶m + ۳۶ - ۶m^۲ + ۲۴m = ۲۷m^۲ \Rightarrow ۲۴m^۲ - ۶۰m - ۳۶ = ۰$$

$$۲m^۲ - ۵m - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{۱}{۲} : -\frac{۱}{۶}x^۲ - \frac{۳}{۲}x - \frac{۹}{۲} = ۰ \\ m = ۳ \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{۹}{۴} - ۴(-\frac{۱}{۶})(-\frac{۹}{۲}) = -\frac{۳}{۴} < ۰ \quad \text{غقق}$$

$$m = ۳ : x^۲ - ۵x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵ + ۴ = ۲۹ > ۰$$

فقط $m = ۳$ قابل قبول است.

۴۰ گزینه ۴

α و β ریشه‌های معادله:

$$\alpha = ۲\beta + ۱$$

$$\alpha \cdot \beta = ۲\beta^۲ + \beta \xrightarrow{\alpha\cdot\beta=۳} ۲\beta^۲ + \beta - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \beta = ۱ \\ \beta = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

صدق ریشه در معادله:

$$\beta = ۱ : ۱ + m + ۳ = ۰ \Rightarrow m = -۴$$

۴۱ گزینه ۲

$$۳x^۲ - ۴x - ۵ = ۰ \Rightarrow a = ۳ \ , \ b = -۴ \ , \ c = -۵$$

مجموع ریشه‌ها $S = -\frac{b}{a} = \frac{۴}{۳}$

حاصلضرب ریشه‌ها $P = \frac{c}{a} = -\frac{۵}{۳}$

$$x_۱^۳ + x_۲^۳ = S^۳ - ۳SP = \frac{۶۴}{۲۷} - ۳(\frac{۴}{۳})(-\frac{۵}{۳}) = \frac{۲۴۴}{۲۷}$$

۴۲

گزینه ۱

$$x^۲ - ۳x + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = ۳ \\ P = \alpha.\beta = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$k = \frac{۱}{\sqrt{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{S + ۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{۳ + ۱}}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

۴۳

گزینه ۱

$$x^۲ = u \Rightarrow ۲u^۲ - ۷u - ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴۹ + ۳۲ = ۸۱ \Rightarrow u = \frac{۷ \pm ۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲ = -\frac{۱}{۲} \ (\text{غ ق ق}) \\ u = ۴ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = -۴ \end{cases}$$

۴۴

گزینه ۱

$$x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = ۳ \\ P = \alpha \cdot \beta = -۱ \end{cases}$$

$$\text{جدید} S_۱ = x_۱ + x_۲ = (۱ + \frac{۲}{\alpha}) + (۱ + \frac{۲}{\beta}) = ۲ + ۲(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}) = ۲ + ۲(\frac{S}{P})$$

$$S_۱ = ۲ + ۲(\frac{۳}{-۱}) = ۲ - ۶ = -۴$$

$$\text{جدید} P_۱ = x_۱ \cdot x_۲ = (۱ + \frac{۲}{\alpha}) \cdot (۱ + \frac{۲}{\beta}) = ۱ + \frac{۲}{\alpha} + \frac{۲}{\beta} + \frac{۴}{\alpha\beta} = ۱ + ۲(\frac{S}{P}) + \frac{۴}{P}$$

$$P_۱ = ۱ + ۲(\frac{۳}{-۱}) + \frac{۴}{-۱} = ۱ - ۶ - ۴ = -۹$$

$$\text{معادلهٔ جدید}: x^۲ - S_۱x + P_۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۴x - ۹ = ۰$$

۴۵

گزینه ۴

گام اول

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر از معکوس ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{۳}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر به‌صورت $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ است، لذا:

$$S' = (\frac{۱}{\alpha} - ۱) + (\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} - ۲ = -۵$$

$$P' = (\frac{۱}{\alpha} - ۱)(\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{۱}{\alpha\beta} - \frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta} + ۱$$

$$= \frac{۱ - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + ۱ = \frac{۱ - \frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} + ۱ = ۲$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$$

۴۶

گزینه ۴

$$۲x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \qquad \{\alpha , \beta\} \qquad \{\alpha + ۲ , \beta + ۲\}$$

$$S = \alpha + \beta = ۲ \ , \ P = \alpha \cdot \beta = \frac{-۱}{۲}$$

معادلهٔ جدید $S_۱ = x_۱ + x_۲ = (\alpha + ۲) + (\beta + ۲) = (\alpha + \beta) + ۴ = ۲ + ۴ = ۶$

معادلهٔ جدید $P_۱ = x_۱ \times x_۲ = (\alpha + ۲)(\beta + ۲) = \alpha\beta + ۲\alpha + ۲\beta + ۴$

$$= \alpha\beta + ۲(\alpha + \beta) + ۴ = P + ۲S + ۴ = -\frac{۱}{۲} + ۲(۲) + ۴ = \frac{۱۵}{۲}$$

$$x^۲ - S_۱x + P_۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + \frac{۱۵}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۵ = ۰$$

۴۷ گزینه ۱

$$x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰ : S = \alpha + \beta = ۲ \;,\; P = \alpha \cdot \beta = -۱$$

ریشه اول معادله جدید:

$$x_{۱} = \alpha^{۲} + \beta^{۲} = (\alpha + \beta)^{۲} - ۲\alpha\beta = S^{۲} - ۲P = ۴ - ۲(-۱) = ۶$$

ریشه دوم معادله جدید:

$$x_{۲} = \alpha^{۲}\beta + \alpha\beta^{۲} = \alpha\beta \cdot (\alpha + \beta) = P \cdot S = (-۱)(۲) = -۲$$

$$S_{۱} = x_{۱} + x_{۲} = ۶ + (-۲) = ۴$$

$$P_{۱} = x_{۱} \times x_{۲} = ۶(-۲) = -۱۲$$

$$x^{۲} - S_{۱}x + P_{۱} = ۰ \Rightarrow x^{۲} - ۴x - ۱۲ = ۰$$

۴۸ گزینه ۲

$$۲x^{۲} - x - ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{۱}{۲} \\ P = -\dfrac{۵}{۲} \end{cases}$$

معادله جدید:

$$S' = (۲\alpha + ۱) + (۲\beta + ۱) = ۲S + ۲ = ۳$$

معادله جدید:

$$P' = (۲\alpha + ۱) \cdot (۲\beta + ۱) = ۴\alpha\beta + ۲(\alpha + \beta) + ۱$$
$$= ۴P + ۲S + ۱ = -۱۰ + ۱ + ۱ = -۸$$

$$X^{۲} - S'X + P' = ۰ \Rightarrow X^{۲} - ۳X - ۸ = ۰$$

۴۹ گزینه ۴

P: ضرب ریشه‌ها

$$P = \frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۱ - k}{k + ۳} < ۰$$

k		-۳		۱	
$\frac{۱-k}{k+۳}$	$-$	‖	$+$	۰	$-$
	ج				ج

به ازای $k > ۱$ یا $k < -۳$ معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.

۵۰ گزینه ۴

$$\Delta > ۰ : (m-۱)^۲ - ۴(m+۲) > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۲m + ۱ - ۴m - ۸ > ۰$$

$$m^۲ - ۶m - ۷ > ۰$$

m		۱-		۷	
	+	۰	−	۰	+
	ج				ج

$$m < -۱ \cup m > ۷ \quad (I)$$

$$P > ۰ : \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow m + ۲ > ۰ \Rightarrow m > -۲ \quad (II)$$

$$S > ۰ : \frac{-b}{a} > ۰ \Rightarrow -(m-۱) > ۰ \Rightarrow m - ۱ < ۰ \Rightarrow m < ۱ \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow -۲ < m < -۱$$

۵۱ گزینه ۴

$$\left(\sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱\right) = ۲\sqrt[۳]{x}$$

$$\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۴} + \sqrt[۳]{x^۲} + ۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱\right) = ۲\sqrt[۳]{x}$$

$$\xrightarrow{\times \sqrt[۳]{x^۲}} \left(\underbrace{\sqrt[۳]{x^۴}}_{a^۲} + \underbrace{\sqrt[۳]{x^۲}}_{ab} + \underbrace{۱}_{b^۲}\right)\left(\underbrace{\sqrt[۳]{x^۲}}_{a} - \underbrace{۱}_{b}\right) = ۲x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱ = ۲x \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$$

جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است: $\frac{-b}{a} = ۲$

۵۲ گزینه ۱

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$P = \alpha \cdot \beta = -\frac{۱}{۳}$$

$$S' = \alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳SP = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۳ - ۳\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۰}{۲۷}$$

$$\Rightarrow -\frac{-k}{۲۷} = \frac{۱۰}{۲۷} \Rightarrow \quad k = ۱۰$$

۵۳ گزینه ۴

β ریشه است $\Rightarrow ۳\beta^۲ - \beta = ۷ \Rightarrow ۳\beta^۲ = \beta + ۷$

$$\Rightarrow ۳\beta^۲ + \alpha + \frac{۲۰}{۳} = \beta + ۷ + \alpha + \frac{۲۰}{۳} = \underbrace{\beta + \alpha}_{S = -\frac{b}{a} = \frac{۱}{۳}} + ۷ + \frac{۲۰}{۳}$$

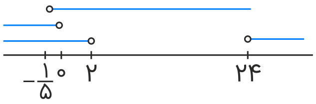
$$= \frac{۱}{۳} + ۷ + \frac{۲۰}{۳} = ۱۴$$

۵۴

گزینه ۴

برای داشتن دو ریشه باید $\Delta > ۰$ باشد و چون دو ریشه مثبت‌اند پس P و S هم باید مثبت باشند:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow (m-۲)^۲ - ۴(۵m+۱) > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۲۴m > ۰ \Rightarrow m > ۲۴ \text{ یا } m < ۰ \\ \dfrac{c}{a} > ۰ \Rightarrow ۵m + ۱ > ۰ \Rightarrow m > -\dfrac{۱}{۵} \\ -\dfrac{b}{a} > ۰ \Rightarrow ۲ - m > ۰ \Rightarrow m < ۲ \end{cases}$$



در بازه $(-\frac{۱}{۵}\ ,\ ۰)$ جواب داریم ولی در این بازه عدد صحیحی وجود ندارد.

۵۵

گزینه ۳

با فرض $x^۲ - ۲x = t$ داریم:

$$t^۲ - t - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} x = ۱ \\ t = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۳} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.