پاسخنامه تشریحی

۱ — **۱** ۲ ۳ ۴ حرکت روی خط راست و بدون تغییر جهت است، بنابراین تندی متوسط برابر اندازهٔ سرعت متوسط است. مکان متحرک در لحظهٔ T را d فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} \text{تندی متوسط پیش از لحظه } T = \left|\dfrac{x_T - x_0}{T - 0}\right| = \left|\dfrac{d - 25}{T}\right| = \dfrac{25 - d}{T} = 0.5\dfrac{m}{s} \\ \text{تندی متوسط پس از لحظه } T = \left|\dfrac{x_{18} - x_T}{18 - T}\right| = \left|\dfrac{0 - d}{18 - T}\right| = \dfrac{d}{18 - T} = 2.5\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25 - d = 0.5T \\ d = 45 - 2.5T \end{cases} \Rightarrow 25 = 45 - 2T \Rightarrow T = 10s \Rightarrow d = 20m$$

$$\text{تندی در لحظه } T = |\text{شیب خط مماس در لحظه } T| = \left|\dfrac{d - 30}{T - 0}\right| = \left|\dfrac{20 - 30}{10 - 0}\right| = 1\dfrac{m}{s}$$

۲ — ۱ ۲ **۳** ۴ چون شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظهٔ $t = 4s$ صفر است در نتیجه $v_4 = 0$ است ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ $t = 3s$ تا $t = 4s$ پس:

$$\begin{cases} a_{av} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_4 - v_3}{4 - 3} \\ v_3 = \text{شیب خط مماس} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \dfrac{0 - \frac{3}{2}}{1} = -\dfrac{3}{2}m/s^2$$

۳ — **۱** ۲ ۳ ۴ راه‌حل اول:

$$\begin{cases} 2s < t < 4s \,,\ \vec{v}_{av} = (-6m/s)\vec{i} \Rightarrow \dfrac{\vec{d}(4s) - \vec{d}(2s)}{4s - 2s} = (-6m/s)\vec{i} \\ 4s < t < 8s \,,\ \vec{v}_{av} = (18m/s)\vec{i} \Rightarrow \dfrac{\vec{d}(8s) - \vec{d}(4s)}{8s - 4s} = (18m/s)\vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{d}(4s) - \vec{d}(2s) = (-12m)\vec{i} \\ \vec{d}(8s) - \vec{d}(4s) = (+72m)\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{d}(8s) - \vec{d}(2s) = (+60m)\vec{i}$$

$$\begin{cases} t_1 = 2s \\ t_2 = 8s \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \dfrac{\vec{d}(8s) - \vec{d}(2s)}{8s - 2s} = \dfrac{(+60m)\vec{i}}{6s} = (+10m/s)\vec{i}$$

راه‌حل دوم:

متحرک در بازهٔ $2s < t < 4s$ (مدت ۲ ثانیه) سرعت متوسط $-6\vec{i}$ متر بر ثانیه و در بازهٔ $4s < t < 8s$ (مدت ۴ ثانیه) سرعت متوسط $+18\vec{i}$ متر بر ثانیه داشته است.

$$\vec{v}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{d}_1 + \Delta\vec{d}_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{\vec{v}_1\Delta t_1 + \vec{v}_2\Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{(-6\vec{i}) \times 2 + (+18\vec{i}) \times 4}{2 + 4} = \dfrac{+60\vec{i}}{6} = +10\vec{i}$$

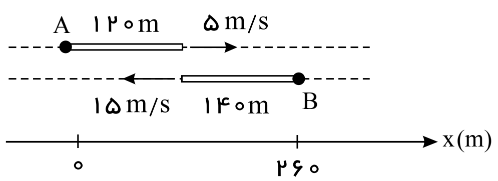
۴ — ۱ **۲** ۳ ۴ اگر طول کل مسیر را x و زمان پیمودن آن را t فرض کنیم، داریم:

$$\text{بزرگی سرعت متوسط کل} = \dfrac{\text{اندازه جابه‌جایی کل}}{\text{مدت زمان کل}} = \dfrac{\frac{x}{4} + \frac{3x}{4}}{\dfrac{\frac{x}{4}}{\frac{v}{1}} + \dfrac{\frac{3x}{4}}{\frac{2v}{1}}} =$$

$$\dfrac{\frac{x}{1}}{\frac{x}{4v} + \frac{3x}{8v}} = \dfrac{\frac{x}{1}}{\frac{2x + 3x}{8v}} = \dfrac{\frac{x}{1}}{\frac{5x}{8v}} = \dfrac{x \times 8v}{5x} = \dfrac{8}{5}v = 1.6v$$

۵ — **۱** ۲ ۳ ۴ در حرکت تندشونده همواره قدرمطلق (اندازه‌ی) سرعت زیاد می‌شود که تنها در گزینهٔ (۱) این‌گونه است. به عبارتی در حرکت تندشونده، همواره نمودار $v - t$ از محور زمان دور می‌شود.

۶ — ۱ **۲** ۳ ۴ لحظهٔ رسیدن قطارها به هم:



قطارها وقتی به‌طور کامل از کنار هم عبور می‌کنند که انتهای آن‌ها به‌هم برسند (A, B).

$$\begin{cases} x_A = 5t + 0 \\ x_B = -15t + 260 \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B} 20t = 260 \Rightarrow t = 13s$$

۷ ۱ **۲** ۳ ۴ از لحظهٔ $t=0$ تا لحظهٔ $t=6$ نمودار v-t خطی راست با شیب ثابت است، پس در این حالت، شتاب متحرک در هر لحظه با شتاب متوسط متحرک در هر بازه‌ای بین $t=0$ و $t=6s$ یکسان و برابر شیب خط است یعنی:

$$a_{av_{(3-6)}} = a_{av_{(0-4)}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-12}{4-0} = -3 \Rightarrow |a_{av}| = 3\frac{m}{s^2}$$

۸ ۱ **۲** ۳ ۴ در لحظات $t=1s$ و $t=2s$ و $t=3s$ سرعت صفر شده است ولی چون $t=2s$ ریشهٔ مضاعف معادله است، سرعت فقط صفر می‌شود ولی تغییر علامت نمی‌دهد. پس در مجموع ۲ بار تغییر جهت رخ داده است.

۹ ۱ **۲** ۳ ۴ در بازه زمانی ذکر شده، سرعت مثبت است، پس جهت حرکت در جهت محور x است. یعنی در خلاف جهت محور x نیست.

۱۰ ۱ **۲** ۳ ۴ زمانی که قطار از روی پل می‌گذرد باید طول قطار نیز از روی پل عبور کند.

$\Delta x =$ طول پل + طول قطار

$$\left.\begin{matrix} v = 30\frac{m}{s} \\ t = 20\,s \end{matrix}\right\} \to \Delta x = v \cdot t \Rightarrow 30\frac{m}{s} \times 20s = 600m$$

$600 = x + 200 \to$ طول قطار $= 600 - 200 = 400m$

۱۱ ۱ **۲** ۳ ۴ تعداد مولکول‌ها نسبت مستقیم با تعداد مول‌ها دارد، پس باید ترکیبی را پیدا کنیم که ۱ گرم از آن، مول‌های کمتری داشته باشد. با توجه به رابطهٔ $\frac{\text{گرم}}{\text{جرم مولی}} =$ مول یا $n = \frac{m}{M}$، هرچه جرم مولی بیش‌تر باشد، تعداد مول‌های ۱ گرم از ترکیب کم‌تر است؛ پس کافی است ترکیبی با بیش‌ترین جرم مولی را پیدا کنیم. جرم مولی NH_3، CO_2، CH_4 و F_2 به ترتیب ۱۷، ۴۴، ۱۶، ۳۸ گرم بر مول است.

۱۲ **۱** ۲ ۳ ۴

$$320gO_2 \times \frac{1molO_2}{32gO_2} \times \frac{2molO}{1molO_2} \times \frac{N_A atom}{1molO} = 20N_A$$

$$xgCH_3OH \times \frac{1molCH_3OH}{32gCH_3OH} \times \frac{4molH}{1molCH_3OH} \times \frac{N_AH}{1molH} = \frac{4N_A}{32}x$$

$$20\cancel{N_A} = \frac{4\cancel{N_A}}{32}x \Rightarrow x = 160g$$

۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴

یون X^- دارای ۳۶ الکترون است، پس اتم خنثی X دارای ۳۵ الکترون و ۳۵ پروتون است:

$X : Z = p = e = 35$

$A_1 : A = \frac{16}{7}Z = \frac{16}{7} \times 35 = 80$ فراوانی 90%

$\begin{cases} N = Z + 9 \\ 44 = 35 + 9 \end{cases} \Rightarrow A_2 : Z + N = 35 + 44 = 79$ فراوانی 10%

جرم اتمی میانگین $= \frac{(79 \times 10) + (80 \times 90)}{100} = 79{,}9$

۱۴ ۱ **۲** ۳ ۴ موارد (آ) و (ت) درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) از یون چند اتمی حاوی تکنسیم برای تصویربرداری از غدهٔ تیروئید استفاده می‌شود که این یون اندازهٔ مشابهی با یون یدید دارد.

پ) جرم اتم ^7_3Li را می‌توان $7amu$ در نظر گرفت.

۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$n = 4 \Rightarrow l = 0, 1, 2, 3$

$n = 4 \Rightarrow$ حداکثر گنجایش تعداد الکترون $= 2n^2 = 2 \times 4^2 = 32$

۱۶ ۱ ۲ **۳** ۴ این مسأله را می‌توان به دو روش زیر حل کرد:

$^A_ZY^q \qquad ^{A'}_{Z'}X^{q'}$

$$e = e' \Rightarrow Z - q = Z' - q' \Rightarrow Z = Z' - q' + q \Rightarrow N = N' \Rightarrow A - Z = A' - Z' \Rightarrow A - Z' + q' - q = A' - Z' \Rightarrow A - A' = q - q'$$

یعنی اختلاف عدد جرمی دو گونه، همان اختلاف بار الکتریکی آن‌ها است.

$$\Rightarrow A - 35 = -2 - (-1) \Rightarrow A = 35 - 1 = 34$$

روش دوم: با توجه به این‌که الکترون‌های این دو یون با هم برابرند، باید پروتون Y یک واحد کمتر از پروتون X باشد. چون نوترون‌های این دو یون با هم برابرند، اختلاف عدد جرمی آن‌ها همان اختلاف پروتون‌های آن‌ها خواهد بود. در نتیجه عدد جرمی Y باید یک واحد کمتر از عدد جرمی X باشد.

۱۷ **۱** ۲ ۳ ۴ فقط عبارت (پ) درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) در مقیاس amu، جرم الکترون در حدود $\frac{1}{2000}$ یا $0/0005amu$ است.

ب) در جدول دوره‌ای، جرم اتمی میانگین لیتیم نوشته شده که با توجه به دو ایزوتوپ لیتیم $({}^{6}Li\ ,\ {}^{7}Li)$، قطعاً مقدار آن کمتر از ۷ می‌باشد.

ت) جرم پروتون به میزان کمی از جرم amu بیشتر است. از آن‌جا که اتم هیدروژن دارای یک پروتون و یک الکترون است، قطعاً جرم آن بیشتر از $1amu$ می‌باشد.

۱۸ ۴ ۳ ۲ **۱** همهٔ عبارت‌ها صحیح‌اند.

۱۹ ۴ ۳ **۲** ۱ بررسی عبارت‌ها:

-عبارت اول نادرست است. همهٔ Tc (تکنسیم) موجود در جهان باید به طور مصنوعی و با استفاده از واکنش‌های هسته‌ای ساخته شود و ایزوتوپ اورانیوم (${}^{235}U$) در مخلوط طبیعی دارای فراوانی کم‌تر از ۰٫۷ درصد است.

- عبارت دوم درست است.

- عبارت سوم درست است.

- عبارت چهارم نادرست است. پسماندهای راکتورهای اتمی هنوز خاصیت پرتوزایی دارند و دفع آن‌ها یک چالش اساسی به شمار می‌آید.

۲۰ **۴** ۳ ۲ ۱ در میان ایزوتوپ‌های طبیعی هیدروژن، ${}^{1}_{1}H$ سبک‌ترین ایزوتوپ و فراوان‌ترین است؛ اما در مورد لیتیم، ${}^{7}_{3}Li$ از ${}^{6}_{3}Li$ پایدارتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): منیزیم دارای ۳ ایزوتوپ طبیعی ${}^{24}_{12}Mg$، ${}^{25}_{12}Mg$ و ${}^{26}_{12}Mg$ است.

گزینهٔ (۲): ایزوتوپ‌ها در خواص فیزیکی وابسته به جرم مانند چگالی با یکدیگر تفاوت دارند.

گزینهٔ (۳): اغلب هسته‌هایی که نسبت $\frac{N}{P}$ در آن‌ها برابر یا بیش از ۱٫۵ باشد، رادیوایزوتوپ یا ناپایدارند.

۲۱ ۴ **۳** ۲ ۱

اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، در خود معادله صدق می‌کنند و $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ است.

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x_2^2-3x_2+1=0 \Rightarrow 3x_2-1=x_2^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2(3x_2-1)}=\sqrt{x_1^2x_2^2}=|x_1x_2|=\frac{c}{a}=1$$

۲۲ **۴** ۳ ۲ ۱

در سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ خط به معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن است.

$$y=(a-1)x^2+x+3 \xrightarrow[x=\frac{-b}{2a}]{\text{محور تقارن}} x=\frac{-1}{2(a-1)} \xrightarrow{x=2} -\frac{1}{2(a-1)}=2$$
$$\Rightarrow a-1=-\frac{1}{4} \Rightarrow \text{ضابطهٔ تابع}: y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$$

نقاط برخورد منحنی با محور xها عبارتند از:

$$-\frac{1}{4}x^2+x+3=0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x-6)(x+2)=0 \xrightarrow{x>0} x=6\ ,\ x=-2$$

مقدار مثبت $x=6$ است.

۲۳ ۴ ۳ **۲** ۱

می‌دانیم: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ \ ,\ \ P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$$
$$(x-2)(x^2+mx+m+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2+mx+m+3=0 \end{cases}$$

یکی از جواب‌ها ۲ $x=$ است. اگر جواب‌های معادله‌ی $x^2+mx+m+3=0$ را α و β در نظر بگیریم، با توجه به اینکه مجموع مجذورات جواب‌ها برابر ۱۳ است، بنابراین:

$$2^2+\alpha^2+\beta^2=13 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=9 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9 \qquad (*)$$

چون α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2+mx+m+3=0$ هستند، بنابراین:

$$x^2+mx+m+3=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-m \\ \alpha\cdot\beta=m+3 \end{cases} \xrightarrow{(*)} m^2-2m-6=9 \Rightarrow m^2-2m-15=0$$
$$\rightarrow \begin{cases} m=5 \xrightarrow[\text{درجه دوم}]{\text{در معادله‌ی}} x^2+5x+8=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشه ندارد.} \\ m=-3 \xrightarrow[\text{درجه دوم}]{\text{در معادله‌ی}} x^2-3x=0 \end{cases}$$

پس تنها $m=-3$ قابل قبول است.

۲۴ ۴ **۳** ۲ ۱

روش اول: ریشه‌های معادله‌ی جدید از معکوس ریشه‌های معادلهٔ قبلی یک واحد بیشتر است.

$$۲x^{۲}-۳x-۴=۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها معکوس شده}} -۴x^{۲}-۳x+۲=۰ \xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه‌ها اضافه شده}} -۴(x-۱)^{۲}-۳(x-۱)+۲=۰$$
$$-۴x^{۲}+۸x-۴-۳x+۳+۲=۰ \Rightarrow -۴x^{۲}+۵x+۱=۰ \Rightarrow ۴x^{۲}-۵x-۱=۰$$

روش دوم:

ریشه‌های معادلهٔ قدیم را α و β و ریشه‌های معادلهٔ جدید را α' و β' می‌نامیم:

$$\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}, \alpha\beta=-۲ \ , \ \alpha'=\frac{۱}{\alpha}+۱ \ , \ \beta'=\frac{۱}{\beta}+۱$$
$$S'=\alpha'+\beta'=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{۵}{۴}$$
$$P'=\alpha'\beta'=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=-\frac{۱}{۴}$$
$$x^{۲}-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^{۲}-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow ۴x^{۲}-۵x-۱=۰$$

۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$y=ax^{۲}+bx+c \Rightarrow (۰,-۴) \Rightarrow -۴=۰+۰+c \Rightarrow c=-۴ \Rightarrow y=ax^{۲}+bx-۴$$
$$\text{رأس}\,(۳,۵) \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{b}{۲a}=۳ \Rightarrow b=-۶a \\ ۵=۹a+۳b-۴ \Rightarrow ۹=۹a+۳(-۶a) \Rightarrow ۹=-۹a \Rightarrow a=-۱ \end{cases}$$
$$\Rightarrow b=-۶a=-۶(-۱)=۶ \Rightarrow y=-x^{۲}+۶x-۴$$

سهمی را با خط $y=۱$ قطع می‌دهیم.

$$-x^{۲}+۶x-۴=۱ \Rightarrow x^{۲}-۶x+۵=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۱ \ , \ x=۵$$

طول پاره‌خط ایجاد شده $=|۵-۱|=۴$

۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴ **داریم:**

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۲-۲ & ۲-۳ \\ ۲+۲ & ۲+۲ & ۴-۳ \\ ۳+۲ & ۳+۴ & ۳+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۴ & ۱ \\ ۵ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $=۲۸$

۲۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۴=۰$ باشند، آنگاه در خود معادله صدق می‌کنند و داریم:

$$S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-۲ \ , \ P=x_۱\cdot x_۲=\frac{c}{a}=-۴$$
$$x^{۲}+۲x-۴=۰ \Rightarrow x_۱^{۲}+۲x_۱-۴=۰ \Rightarrow x_۱^{۲}=-۲x_۱+۴ \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین معادله را در } x_۱} x_۱^{۳}=-۲x_۱^{۲}+۴x_۱$$
$$x_۱^{۳}-۲x_۲^{۲}+۴x_۲=-۲x_۱^{۲}+۴x_۱-۲x_۲^{۲}+۴x_۲=-۲(x_۱^{۲}+x_۲^{۲})+۴(x_۱+x_۲)$$
$$=-۲(S^{۲}-۲P)+۴S=-۲(۴+۸)+۴(-۲)=-۳۲$$

۲۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \ , \ P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$$

می‌دانیم $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۵$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۱}=۲$

$$A=(\alpha+\frac{۲}{\beta})^{۲}+(\beta+\frac{۲}{\alpha})^{۲}=(\frac{\alpha\beta+۲}{\beta})^{۲}+(\frac{\alpha\beta+۲}{\alpha})^{۲}$$
$$\Rightarrow A=(\frac{۲+۲}{\beta})^{۲}+(\frac{۲+۲}{\alpha})^{۲}=\frac{۱۶}{\beta^{۲}}+\frac{۱۶}{\alpha^{۲}}=\frac{۱۶(\alpha^{۲}+\beta^{۲})}{(\alpha\beta)^{۲}}$$
$$A=\frac{۱۶(S^{۲}-۲P)}{P^{۲}}=\frac{۱۶(۲۵-۴)}{۴}=۸۴$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ **۴** **چون $f(-۱)=f(۴)=۰$ پس ضابطهٔ f را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=k(x+۱)(x-۴)$ در نظر بگیریم. از طرف دیگر طول رأس سهمی برابر $\frac{۳}{۲}=\frac{-۱+۴}{۲}$ است و عرض آن برابر -۵ است. پس:**

$$f(\frac{۳}{۲})=-۵ \Rightarrow k(\frac{۳}{۲}+۱)(\frac{۳}{۲}-۴)=-۵$$
$$-\frac{۲۵}{۴}k=-۵ \Rightarrow k=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{۴}{۵}(x+۱)(x-۴)=\frac{۴}{۵}x^{۲}-\frac{۱۲}{۵}x-\frac{۱۶}{۵}$$

پس $a=\frac{4}{5}$, $b=\frac{12}{5}$, $c=-\frac{16}{5}$ و درنتیجه:

$$a+b-c=\frac{4}{5}+\frac{12}{5}+\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ باشند، $x_1,\frac{1}{8},x_2$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. پس داریم:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow x_1+x_2=\frac{1}{4}\xrightarrow{-\frac{b}{a}=\frac{1}{4}}\frac{3}{m^2-4}=\frac{1}{4}\Rightarrow m^2=16\Rightarrow m=\pm 4$$

باید $\Delta>0$ باشد(x_1, x_2 ریشه‌های حقیقی معادله‌اند.)

$$m=4\Rightarrow 12x^2-3x+4=0\Rightarrow \Delta=9-192<0:\ \text{غ ق ق}$$

$$m=-4\Rightarrow 12x^2-3x-4=0\Rightarrow \frac{c}{a}<0\Rightarrow\Delta>0:\ \text{ق ق}$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ **۴** ماتریس AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & n & -1\\ 2 & 1 & -m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & -2\\ 1 & m\\ 2n & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2m-n & 1+mn\\ 2m-2mn+1 & -2m-4\end{bmatrix}\to\begin{cases}1+mn=0\to mn=-1\\ 2m-2mn+1=0\\ \xrightarrow{mn=-1} 2m+2+1=0\to m=-\frac{3}{2}\end{cases}\to n=\frac{2}{3}$$

$$\to m-n=-\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{13}{6}$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ **۴** ضرب ماتریسی را از سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$[x\ \ 1\ \ 0]_{1\times 3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}=[x-1\quad x+1\quad -1]$$

$$[x-1\quad x+1\quad -1]\begin{bmatrix}-x\\ 1\\ x\end{bmatrix}=0\to -x^2+x+x+1-x=0\Rightarrow -x^2+x+1=0\xrightarrow{\alpha\ \text{و}\ \beta\ \text{ریشه‌ها}}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=1\\ \alpha^2=\alpha+1,\beta^2=\beta+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)+2=3$$

۳۳ ۱ ۲ **۳** ۴ ماتریس $B\times A$ را تشکیل می‌دهیم:

$$B\times A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & b\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & a\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a+4\\ 9+b & 3a-2b\end{bmatrix}$$

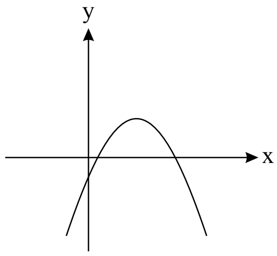
ماتریس قطری، ماتریسی است که کلیه درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی صفر باشند:

$$a+4=0\to a=-4$$

$$9+b=0\to b=-9\Rightarrow 3a-2b=3(-4)-2(-9)=-12+18=6$$

$$\to B\times A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\to \text{مجموع درایه‌های ماتریس } B\times A=1+0+0+6=7$$

۳۴ ۱ ۲ ۳ **۴** نمودار فرضی تابع به شکل



است.(شکل می‌تواند از مبدأ هم بگذرد.)

$$\Delta>0\to b^2-4ac=(-2m)^2-4(2-m)>0\to 4m^2+4m-8>0\xrightarrow{\div 4}m^2+m-2>0\to(m+2)(m-1)>0\to\begin{cases}m>1\\ \text{یا}\\ m<-2\end{cases}\quad(1)$$

$$a<0\to 2-m<0\to m>2\quad(2)$$

$$S>0\to-\frac{b}{a}=\frac{-(-2m)}{2-m}=\frac{2m}{2-m}>0\to 0<m<2\quad(3)$$

$$P>0\to\frac{c}{a}=\frac{1}{2-m}>0\to m<2\quad(4)$$

$$(1)\cap(2)\cap(3)\cap(4)=\varnothing$$

۳۵ **۱** ۲ ۳ ۴

از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم (البته برای ماتریس):

$$(A-B)^{۲}=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

داریم : $(A-B)^{۲}=(A-B)(A-B)=A^{۲}-AB-BA+B^{۲}=A^{۲}+B^{۲}-(AB+BA)=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}-(AB+BA)$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۶\\ ۰ & ۱۰\end{bmatrix}-(AB+BA)\rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}۲ & ۶\\ ۰ & ۱۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۶\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$$

۳۶) ۴ ۳ **۲** ۱ چون تعداد مهره‌های قرمز در ظرف اول کمتر از ۲ می‌باشد، پس تنها حالت ممکن آن است که از هر ظرف، ۲ مهرهٔ آبی خارج شده باشد.

$$P(\underbrace{\text{۴ مهره همرنگ}}_{A})=P(\text{۲ مهره از اولی آبی})\times P(\text{۲ مهره از دومی آبی})\Rightarrow P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۴}{۲}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۳}{۶}\times\frac{۶}{۲۱}=\frac{۱}{۷}$$

۳۷) **۴** ۳ ۲ ۱

یا ۲ نفر از گروه A و یک نفر از گروه B هستند و یا برعکس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۶\times۳+۳\times۴}{۳۵}=\frac{۳۰}{۳۵}=\frac{۶}{۷}$$

۳۸) ۴ ۳ **۲** ۱ A: پیشامد آنکه عدد مضرب ۲ باشد.

B: پیشامد آنکه عدد مضرب ۳ باشد.

$A\cap B$: پیشامد آنکه عدد مضرب ۶ باشد.

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=۱-P(A\cap B)=۱-\frac{[\frac{۱۰۰}{۶}]}{۱۰۰}=۱-\frac{۱۶}{۱۰۰}=\frac{۸۴}{۱۰۰}$$

۳۹) ۴ ۳ ۲ **۱** یعنی یا تعداد مردها و زن‌ها برابر باشد که ممکن نیست (چون ۵ عددی فرد است) یا ۳ مرد و ۲ زن و یا ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

$$\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۵}}=\frac{(۶\times۱)+(۴\times۳)}{۲۱}=\frac{۱۸}{۲۱}=\frac{۶}{۷}$$

۴۰) ۴ ۳ ۲ **۱**

پیشامد ابتلا به بیماری ریوی : B ، پیشامد ابتلا به بیماری قلبی : A

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۲۵-۰/۱۵=۰/۱$$