

پاسخنامه تشریحی

گزینه ۱ - ۱

یعنی این معادله درجه دوم باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1$$

توجه کنید که چون $\frac{c}{a} < 0$ است، معادله قطعاً دو ریشه حقیقی دارد. پس $\Delta > 0$ بررسی نمی‌گردد

۲ - گزینه ۱ چون $x = 1$ صفر تابع است، پس باید $f(1) = 0$ باشد.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + mx - 2 \Rightarrow f(1) = 1 - 5 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$$

$f(x)$ را بر $x - 1$ تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 6x - 2 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -4x^2 + 6x - 2 \\ \underline{-(4x^2 - 4x)} \\ 10x - 2 \\ \underline{-(10x - 10)} \\ 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ هستند و داریم:

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$\frac{4^2 - 2 \times 2}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

۳ - گزینه ۴

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5 \text{ و } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2 \text{ می‌دانیم}$$

$$\begin{aligned} A &= \left(\alpha + \frac{2}{\beta}\right)^2 + \left(\beta + \frac{2}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\beta + 2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\beta + 2}{\alpha}\right)^2 \\ \Rightarrow A &= \left(\frac{2+2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2+2}{\alpha}\right)^2 = \frac{16}{\beta^2} + \frac{16}{\alpha^2} = \frac{16(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\beta)^2} \end{aligned}$$

$$A = \frac{16(S^2 - 2P)}{P^2} = \frac{16(25 - 4)}{4} = 116$$

۴ - گزینه ۳ می‌دانیم: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$, $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

اگر ریشه‌های معادله جدید را $\alpha\sqrt{\beta}$ و $\beta\sqrt{\alpha}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$S' = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$$

$$\Rightarrow S'^2 = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = \alpha\beta(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} \quad (1)$$

$$\text{باتوجه به معادله } x^2 - 12x + 4 = 0 \text{ داریم: } S = \alpha + \beta = 12, \quad p = \alpha\beta = 4$$

حال این مقادیر را در (۱) جای گذاری می‌کنیم:

$$S'^2 = 4(12) + 2 \times 4 \times \sqrt{4} = 64 \xrightarrow{S' > 0} S' = 8$$

$$P' = \alpha\sqrt{\beta} \times \beta\sqrt{\alpha} = \alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = 4\sqrt{4} = 8$$

$$\text{معادله جدید برابر است با: } x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$$

۵ - گزینه ۱ ابتدا به دلیل وجود $\sqrt{x+1}$ دامنه x به صورت $x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 0$ است.



برای حل معادله طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x + 1 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x > 0 \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ \hline \begin{array}{ccccc} & 0 & & 3 & \\ & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \\ \hline \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

$$\Rightarrow [-1, 0) \cup (3, +\infty) \Rightarrow a + b + c = -1 + 0 + 3 = 2$$

۶ - گزینه ۴

$$|x| \geq a \xrightarrow{a > 0} \begin{cases} x \geq a \\ \text{یا} \\ x \leq -a \end{cases}$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 2 \right| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} - 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 2+2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 4 \xrightarrow{\times 2} x-1 \geq 8 \Rightarrow x \geq 9 \\ \frac{x-1}{2} - 2 \leq -2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq 2-2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq 0 \xrightarrow{\times 2} x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} \text{مجموعه جواب} = (-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$$

۷ - گزینه ۳

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 1$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a, \quad \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 4$$

$$\Rightarrow 4a + 2(-4a) = 3 \Rightarrow -4a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}, \quad b = -4(-\frac{3}{4}) = 3$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$$

$$\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های معادله } -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ هستند، داریم:}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{-\frac{3}{4}} = 4, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

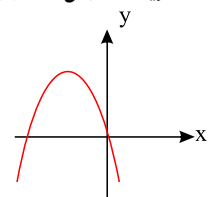
$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 4^3 - 3(-\frac{4}{3}) \times 4 = 64 + 16 = 80$$

۸ - گزینه ۴ سهمی فقط از ربع اول نگذرد این است که $a < 0, \Delta > 0, S < 0$ و $P > 0$ است (مطابق شکل زیر). پس در این سؤال داریم:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (1)$$

$$\Delta = a^2 + 4(a - 3) = a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a - 2) > 0 \Rightarrow a < -6 \text{ یا } a > 2 \quad (2)$$

$$P = \frac{1}{a - 3} > 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \text{ است (۱) همان شرط } S = -\frac{a}{a - 3} < 0 \Rightarrow \frac{a}{a - 3} < 0 \Rightarrow \frac{a}{a - 3} > 0 \Rightarrow a < 0 \text{ یا } a > 3 \quad (3)$$



اشتراک مجموعه‌های (۱)، (۲) و (۳) بازده $a < -6$ است.

۹ - گزینه ۳ از آن‌جا که طبق جدول تعیین علامت، عبارت فقط یک ریشه داشته و علامت عبارت نیز اطراف آن تغییر می‌کند، نتیجه می‌شود، که عبارت درجه یک است، پس $a - 1 = 0$ ، یعنی

$a = 1$ ، از طرفی چون در سمت راست ریشه، علامت عبارت مثبت است، پس ضریب x ، یعنی $2 - b > 0$ لذا $b < 2$ و چون b عددی طبیعی است $b = 1$. بنابراین عبارت به صورت $y = x - c$ است. در انتها چون $x = 3$ ریشه عبارت است، پس با قرار دادن در عبارت داریم:

$$y = x - c \xrightarrow{x=3, y=0} 0 = 3 - c \rightarrow c = 3$$

$$\text{بنابراین: } a - b - c = 1 - 1 + 3 = 3$$

۱۰ - گزینه ۲

$$\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-2}{x+2} + 1 < 0 \rightarrow \frac{(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 6) + x^2 + 5x + 6}{(x+3)(x+2)} < 0$$

$$\frac{x^2 + 5x + 10}{x^2 + 5x + 6} < 0, \quad x^2 + 5x + 10 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow x^2 + 5x + 10 > 0$$

$$a > 0$$

عبارت $x^2 + 5x + 10$ همواره مثبت است پس می‌توانیم آن را از نامعادله حذف کنیم. در نتیجه باید مخرج کسر منفی شود.



$$x^2 + 5x + 6 < 0 \rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = -2, x = -3$$

مجموعه جواب $(-3, -2)$

X	-3	-2
x^2+5x+6	+	-
	+	+

$$(2n - 1, m - 4) = (-3, -2) \rightarrow 2n - 1 = -3, m - 4 = -2 \rightarrow n = -1, m = 2$$

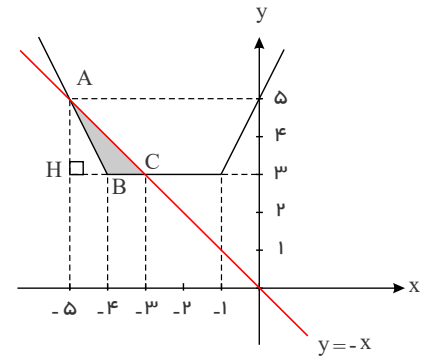
$$|x - 1| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

۱۱ - گزینه ۳ نمودار دو تابع $y = -x$ و $f(x) = |x + 1| + |x + 4|$ را رسم کرده و نقاط تقاطع آن‌ها را می‌یابیم.

$$x < -4 \Rightarrow f(x) = -x - 1 - x - 4 = -2x - 5 \quad \begin{array}{c|cc} x & -4 & -5 \\ y & 3 & 5 \end{array}$$

$$-4 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = -x - 1 + x + 4 = 3$$

$$x \geq -1 \Rightarrow f(x) = x + 1 + x + 4 = 2x + 5 \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ y & 3 & 5 \end{array}$$

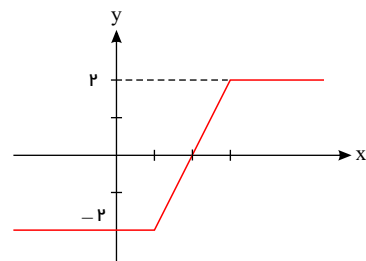


با توجه به شکل مشخص می‌شود که خط $y = -x$ نمودار f را در نقاط $A(-5, 5)$ و $C(-3, 3)$ قطع می‌کند؛ پس داریم:

$$BC = 1, AH = 2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

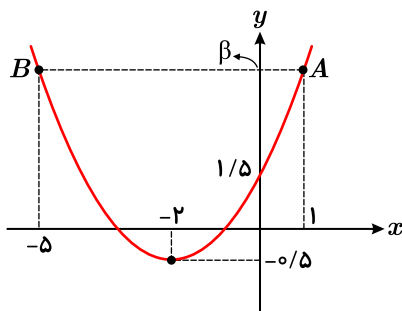
۱۲ - گزینه ۱

برای به دست آوردن برد از روش ترسیم استفاده می‌کنیم.



بنابراین برد تابع برابر است با: $[-2, 2]$

۱۳ - گزینه ۱

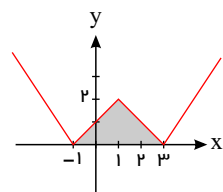


$$\text{طول رأس } x = \frac{-5 + 1}{2} = -2 \rightarrow f(x) = a(x + 2)^2 - \frac{1}{2}$$

$$(0, \frac{1}{5}) \in f(x) \Rightarrow \frac{1}{5} = a(0 + 2)^2 - \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(1, \beta) \in f(x) \rightarrow \beta = \frac{1}{2}(1 + 2)^2 - \frac{1}{2} \rightarrow \beta = 4$$

۱۴ - گزینه ۱ ابتدا بایست $f(x)$ را رسم کنیم و خواهیم داشت:



$$||x - 1| - 2| = 0 \rightarrow |x - 1| = 2 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ x - 1 = -2 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

برای به دست آوردن محل تقاطع $f(x)$ ، محور x ها عبارت را برابر صفر می‌گذاریم:



$$S = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \quad \text{بنابراین مساحت محصور برابر است با: } 4$$

۱۵ - گزینه ۳ با توجه به طبیعی بودن مؤلفه‌های نقاط داده شده، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 7 - 2a \geq 1 \\ a - 2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \leq 6 \\ a \geq 3 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq a \leq 3 \Rightarrow a = 3$$

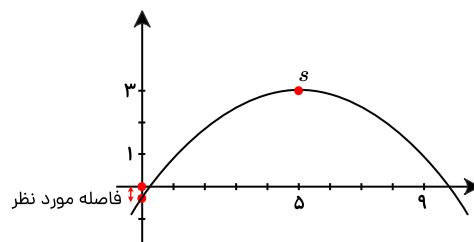
$$\Rightarrow A = (9, 1), B = (1, 1) \Rightarrow \text{طول رأس سهمی} = \frac{9 + 1}{2} = 5$$

$$\Rightarrow b = 5 \Rightarrow \text{رأس سهمی} = (5, 3)$$

$$\Rightarrow \text{ضابطه تابع} : f(x) = k(x - 5)^2 + 3 \xrightarrow[\text{مختصات A}]{\text{جایگذاری}} 16k + 3 = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow f(0) = -\frac{1}{8}(25) + 3 = -\frac{1}{8}$$

$$\text{فاصله مبدأ از نقطه برخورد سهمی با محور عرضها} = \left| -\frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8}$$



۱۶ - گزینه ۴ می‌دانیم اگر دو سطر (یا دو ستون) ضربی از هم (یا مانند هم) باشند حاصل دترمینان صفر است. بنابراین اگر $x - 1 = 1$ (یا $x - 2 = 2$) باشند ستون اول (یا ستون دوم) با ستون سوم مانند یکدیگر می‌شوند. پس:

$$\begin{aligned} x - 1 = 1 &\rightarrow x = 2 \\ x - 2 = 2 &\rightarrow x = 4 \end{aligned} \rightarrow \text{حاصل ضرب جوابها} = 8$$

۱۷ - گزینه ۱ الف) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

ب) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

ج) گزاره همیشه درست است و با استدلال استنتاجی (اثبات مستقیم) ثابت می‌شود.

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$$

د) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

۱۸ - گزینه ۲

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b \xrightarrow[(ab) > 0]{\times ab} a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

$$\rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b) \xrightarrow{\div (a+b)} a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \leftarrow \text{همواره صحیح}$$

۱۹ - گزینه ۲

$$y = \frac{4x + 1}{x - 2} \in Z \Rightarrow \text{باید} : x - 2 \mid 4x + 1 \xrightarrow{x-2 \mid x-2} x - 2 \mid 4x + 1 - 4(x - 2)$$

$$\Rightarrow x - 2 \mid 9 \Rightarrow x - 2 \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\} \xrightarrow{+2} x \in \{-7, -1, 1, 3, 5, 11\}$$

چون قرار است نقطه مورد نظر در ربع دوم باشد بایستی $x < 0$ و $y > 0$ باشد.

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{4x + 1}{x - 2} = 1 \rightarrow \text{در ربع دوم است.}$$

$$x = -7 \rightarrow y = \frac{4x + 1}{x - 2} = \frac{-27}{-9} = 3 \rightarrow \text{در ربع دوم است.}$$

۲۰ - گزینه ۱

نکته: در اثبات برخی نامساوی‌ها یا تساوی‌های ریاضی، حکم را آنقدر ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. حال اگر مسیر طی شده برگشت پذیر باشد، به این روش، اثبات بازگشتی می‌گوییم.



$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 5 \geq 4xy + 4z + 2y \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \geq 0$$

این رابطه، همواره درست است. $\Rightarrow (x - 2y)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 \geq 0$

۲۱ - گزینه ۲

$$(A - B)^2 = A^2 + B^2 - (AB + BA)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - (AB + BA)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} - (AB + BA) \rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

۲۲ - گزینه ۴

$$3x + 1 | x + 2 \xrightarrow{\times 3} \left\{ \begin{array}{l} 33x + 1 | 3x + 6 \\ 3x + 1 | 3x + 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3x + 1 | 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ 3x + 1 = -5 \Rightarrow x = -2 \\ 3x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 3x + 1 = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین هیچ مقدار طبیعی برای x وجود ندارد.

۲۳ - گزینه ۲ از سمت چپ، ضرب ماتریس ها را انجام می دهیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -x + 1 & -2x - 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -x^2 + x - 4x - 2 = 0 \rightarrow -x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه ها} : \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -3$$

۲۴ - گزینه ۱ با توجه به فرض داریم:

$$(I - A)^2 = I - 2AI + \underbrace{A^2}_A = I - 2A + A = I - A$$

به همین ترتیب $(I - A)^3$ و $(I - A)^4$ و ... نیز برابر $I - A$ به دست می آیند.

۲۵ - گزینه ۴ دترمینان مورد نظر را توسط دستور ساروس محاسبه می کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 10 + 72) - (-3 + 60 + 0) = 25$$

دو ستون اول

۲۶ - گزینه ۴ فشار وارد از طرف مایعات به کف ظرف، برابر مجموع فشار ناشی از ستون هریک از مایعات می باشد. پس در ابتدا فشار ناشی از مایعات را می یابیم:

$$P_T = P_{\text{اب}} + P_{\text{روغن}} \Rightarrow P_T = (\rho g h)_{\text{اب}} + (\rho g h)_{\text{روغن}}$$

$$\Rightarrow P_T = (1000 \times 10 \times 0.1) + (800 \times 10 \times 0.05) \Rightarrow P_T = 1000 + 400 \Rightarrow P_T = 1400 \text{ Pa}$$

نیروی وارد بر هر سطحی از رابطه $F = P \cdot A$ قابل محاسبه است، بنابراین داریم:

$$F_T = P_T \times A \Rightarrow F_T = 1400 \times 50 \times 10^{-4} \Rightarrow F_T = 7(N)$$

دقت کنید که سطح مقطع استوانه روغن تأثیری در حل مسئله ندارد، زیرا فشار را روی سطح مقطع 50 cm^2 می خواهیم.

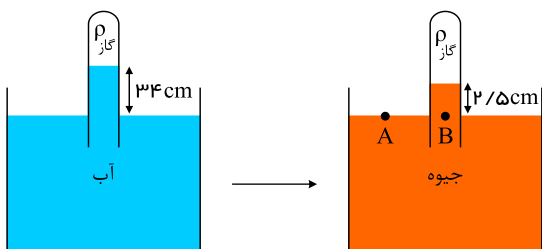
۲۷ - گزینه ۴ دما، جریان الکتریکی و جرم از کمیت های اصلی در SI هستند.

۲۸ - گزینه ۲ در ابتدا ارتفاع ستون جیوه ای که فشاری معادل ستون ۳۴ سانتی متری آب ایجاد می کند را می یابیم.

$$h_{\text{cmHg}} = \frac{\rho h}{13.6}$$

$$h_{\text{cmHg}} = \frac{34}{13.6} = 2.5 \text{ cmHg}$$

حال با توجه به نقاط هم تراز A و B داریم:



$$P_A = P_B \rightarrow P_o = h_{\text{cmHg}} + P_{\text{گاز}} \rightarrow P_o = 2.5 + 72 \rightarrow P_o = 74.5 \text{ cmHg}$$



دبیرستان دخترانه علوی واحد شرق

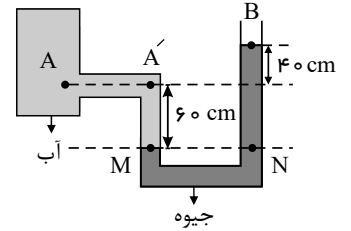
$$P_{\text{گاز}} = P_0 + h_{\text{Cm}} Hg$$

۲۹ - گزینه ۳ با انتخاب نقاط هم تراز M و N و مساوی قرار دادن فشار این نقاط داریم:

$$P_M = P_N \Rightarrow P_{A'} + \rho_{\text{آب}} \cdot g \cdot (h_{A'M}) = P_0 + \rho_{\text{جیوه}} \cdot g \cdot (h_{BN})$$

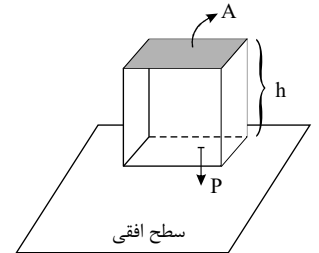
$$\xrightarrow{P_{A'}=P_A} P_A + \underbrace{(1000 \times 10 \times \frac{6}{100})}_{6000 \text{ Pa}} = P_0 + \underbrace{(13600 \times 10 \times 1)}_{136000 \text{ Pa}}$$

$$\Rightarrow P_A - P_0 = 136000 - 6000 = 130000 \text{ Pa} = 130 \text{ kPa}$$



۳۰ - گزینه ۴ از قبل می دانیم، برای اجسامی مانند مکعب مستطیل و ... برای تعیین فشار وارد بر سطح افقی از طرف جسم، علاوه بر رابطه $P = \frac{W}{A}$ می توان از رابطه $P = \rho gh$ نیز استفاده کرد. در اینجا که با هر گونه قرارگیری جسم روی سطح افقی، چگالی جسم تغییر نمی کند، بدیهی است که بیشترین فشار وارد بر سطح متناسب با بیشترین ارتفاع است، یعنی داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho gh \\ \rho = \frac{m}{v} \rightarrow m = \rho v = \rho Ah \end{cases}$$

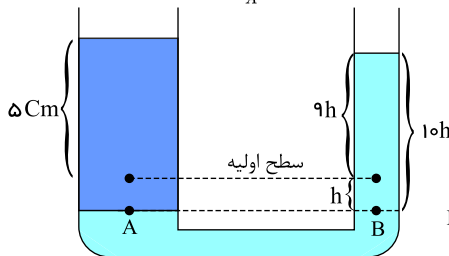


$$\text{if } h = h_{\text{max}} \rightarrow P = P_{\text{max}} = \rho gh_{\text{max}} = (8 \times 10^3)(10)(5 \times 10^{-2}) \rightarrow P = P_{\text{max}} = 4 \times 10^3 \text{ Pa}$$

۳۱ - گزینه ۲ اگر قطر قاعده یکی از دهانه ها، سه برابر دیگری باشد، سطح مقطع آن ۹ برابر دیگری است، یعنی:

$$D_A = 3D_{A'} \rightarrow A_A = 9A_{A'} \quad (1)$$

$$\Delta V_A = \Delta V_{A'} \Rightarrow A_A \times h_A = A_{A'} \times h_{A'} \xrightarrow{(1)} h_{A'} = 9h_A \quad (2)$$



حال جابه جایی سطح مایع در هر شاخه را می یابیم:

دقت کنید، در حالت ثانویه ارتفاع آب در لوله چپ به اندازه h پایین می آید که برابر با مقدار $9h$ اضافه شده به لوله سمت راست است. (در مجموع ارتفاع آب در لوله راست به $10h$ می رسد).

$$\rho_{\text{نفت}} gh_{\text{نفت}} = \rho_{\text{آب}} g(9h + h) \Rightarrow 0.8 \times 10 \times 5 = 1 \times 10 \times h \times 10$$

در ادامه با مساوی قرار دادن فشار در نقاط هم تراز A و B داریم:

$$h_{\text{آب}} = 0.4 \text{ cm} \xrightarrow{(2)} 9h_A = 9 \times 0.4 = 3.6 \text{ cm}$$

↓
مقدار بالا رفتن سطح نسبت به حالت اول

۳۲ - گزینه ۳ جیمی که با رابطه چگالی و جرم جسم به دست می آید، حجم خالص (توپر) کره می باشد:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 2.7 = \frac{1080}{V} \Rightarrow V = 400 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم واقعی}$$

یعنی اگر کره حفره نداشته باشد، حجم آن 400 cm^3 است، اما حجم کره ای که حفره دارد برابر است با:

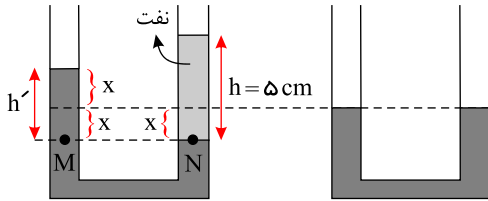
$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V' = \frac{4}{3} \times 3 \times (5)^3 \Rightarrow V' = 500 \text{ cm}^3 \quad \text{حجم ظاهری}$$

$$\text{حجم حفره} = \text{حجم واقعی} - \text{حجم ظاهری} \Rightarrow V_{\text{حفره}} = 500 - 400 = 100 \text{ cm}^3$$

$$\text{درصد حجم حفره به حجم کره} : \frac{V_{\text{حفره}}}{V'} = \frac{100}{500} \times 100 = 20\%$$

بنابراین داریم:

پس:



به طور کلی، در این تیپ از سؤال‌ها که با افزودن مایع در یک شاخه، مرز مایعات جابه‌جا می‌شود، در ابتدا محل قرارگیری مرزها را علامت‌گذاری می‌کنیم. سپس با افزودن مایع، هر حجمی که مایع زیرین در یک شاخه جابه‌جا می‌شود، همان حجم در شاخهٔ روبه‌روی آن نیز جابه‌جا می‌شود (به دلیل خاصیت تراکم‌ناپذیری مایع) پس از آن، جابه‌جایی مرز مایعات را می‌یابیم.

با فرض آنکه سطح مقطع لوله در طرفین یکسان باشد:

$$P_N = P_M \Rightarrow P_0 + \rho gh = P_0 + \rho' gh'$$

$$\Rightarrow \rho h = \rho' h' \Rightarrow 5 \times 0.8 = 1 \times h' \Rightarrow h' = 4 \text{ cm}$$

$$h' = 4x \Rightarrow x = \frac{h'}{4} = 1 \text{ cm}$$

۳۴ - گزینه ۲ اگر فشار هوای محبوس در بالای مخزن را P_G بنامیم، باتوجه به برابر بودن فشار در نقاط هم‌سطح از یک مایع، خواهیم داشت: (سعی می‌کنیم که P_G را در معادلات حذف کنیم.)

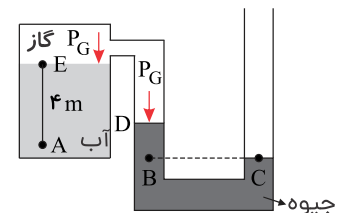
$$P_B = P_C = P_G + DB \text{ فشار ستون } = P_0$$

$$\rightarrow P_G = P_0 - \rho_{Hg} gh_{DB}$$

$$P_A = P_G + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_{EA} \xrightarrow{(1)} P_A = P_0 - \rho_{Hg} gh_{DB} + \rho_{H_2O} gh_{EA} \rightarrow$$

$$P_A = 10^5 - 13600 \times 10 \times 0.15 + 1000 \times 10 \times 4$$

$$P_A = 119600 \text{ Pa} = 119.6 \text{ kPa}$$



۳۵ - گزینه ۱ گام اول: جرم جسم ۱۱.۵g است.

$$m = 11.5 \text{ g} = 11.5 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

گام دوم: حجم جسم برابر مقدار افزایش حجم مایع بالا آمده درون استوانه می‌باشد:

$$V = 23.1 \text{ mL} - 11.5 \text{ mL} = 11.6 \text{ mL} = 11.6 \times 10^{-3} \text{ L} = 11.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

گام سوم:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{11.5 \times 10^{-3} \text{ kg}}{11.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 991.37 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

۳۶ - گزینه ۲ ابتدا همهٔ اتم‌ها را هشت‌تایی می‌کنیم:

$$[: N \equiv N - N \equiv N - \ddot{N} :]^q$$

این ترکیب از ۵ اتم نیتروژن (N) تشکیل شده است و هر اتم نیتروژن در حالت خنثی ۵ الکترون در لایهٔ ظرفیت دارد، بنابراین این گونه در حالت خنثی باید دارای $5 \times 5 = 25$ الکترون باشد. با شمارش تعداد الکترون‌ها، مشاهده می‌شود که این گونه فقط ۲۴ الکترون دارد، بنابراین بار الکتریکی این یون (q) برابر ۱+ است.

$$q = (+1) - (5 \times 5) = -24 \Rightarrow \text{مجموع شمار الکترون‌های به کار رفته در ساختار لوویس} - \text{مجموع شمار الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها} = \text{بار یون}$$

۳۷ - گزینه ۲ تنها عبارت پنجم درست است.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول: در سیارهٔ مشتری عناصر کربن و گوگرد جزو عناصر جامد هستند.

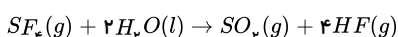
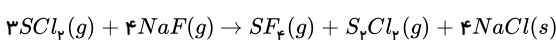
عبارت دوم: هیدروژن و آهن به ترتیب فراوان‌ترین عناصر سازندهٔ مشتری و زمین هستند.

عبارت سوم: هیدروژن، هلیوم و کربن به ترتیب فراوان‌ترین عناصر سازندهٔ مشتری هستند.

عبارت چهارم: بعد از آهن، منیزیم دومین فلز فراوان سیارهٔ زمین است.

عبارت پنجم: عمدهٔ عناصر سازندهٔ سیارهٔ مشتری هیدروژن و هلیوم هستند که سبک‌ترین نافلزات جدول دوره‌ای هستند.

۳۸ - گزینه ۴



$$?g\text{NaF} = 50 \text{ LHF} \times \frac{0.8g\text{HF}}{1\text{LHF}} \times \frac{1\text{molHF}}{20g\text{HF}} \times \frac{4\text{molNaF}}{4\text{molHF}} \times \frac{42g\text{NaF}}{1\text{molNaF}} = 168g\text{NaF}$$

$$?g\text{SO}_2 = 50 \text{ LHF} \times \frac{0.8g\text{HF}}{1\text{LHF}} \times \frac{1\text{molHF}}{20g\text{HF}} \times \frac{1\text{molSO}_2}{4\text{molHF}} \times \frac{64g\text{SO}_2}{1\text{molSO}_2} = 32g\text{SO}_2$$

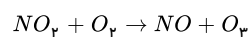
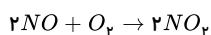
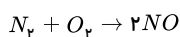
۳۹ - گزینه ۴ A^{2-} یون تشکیل داده؛ بنابراین در گروه ۱۶ جدول قرار دارد و آرایش الکترونی آن به np^4 ختم می‌شود.

$$(n + l) = 12 \Rightarrow 4(n + 1) = 12 \Rightarrow n = 2$$



پس آرایش الکترونی یون A ، $1s^2/2s^2 2p^6$ است که ۱۰ الکترون دارد. آرایش الکترونی عنصر Cu به صورت $[Ar] 3d^1 4s^1$ است که ۱۰ الکترون با $l = 2$ دارد.

۴۰ - گزینه ۱ ابتدا واکنش‌های موازنه‌شده تشکیل اوزون تروپوسفری را می‌نویسیم:



$$4800 \text{ mg } O_2 \times \frac{1 \text{ g } O_2}{1000 \text{ mg } O_2} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 \text{ g } O_2} \times \frac{1 \text{ mol } NO_2}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{2 \text{ mol } NO}{2 \text{ mol } NO_2} \times \frac{1 \text{ mol } N_2}{2 \text{ mol } NO} \times \frac{28 \text{ g } N_2}{1 \text{ mol } N_2} = 0.14 \text{ g } N_2$$

۴۱ - گزینه ۲ - عبارت‌های سوم و پنجم درست‌اند.

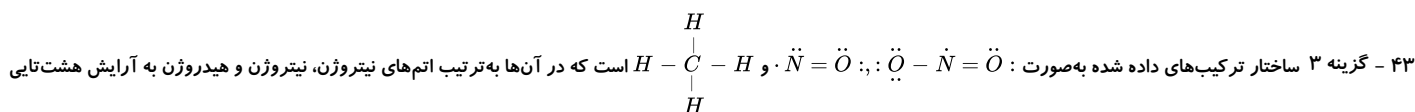
بررسی عبارت‌های نادرست:

مورد اول: دگرشکل، به شکل‌های گوناگون بلوری یا مولکولی یک عنصر گفته می‌شود.

مورد دوم: فرمول مولکولی برای مواد مولکولی به کار می‌رود که در ساختار آن‌ها یون وجود ندارد.

مورد چهارم: در توسعه پایدار، هزینه‌های اجتماعی نیز باید در نظر گرفته شود.

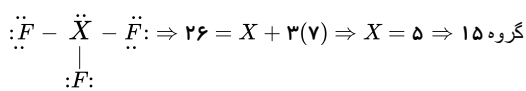
۴۲ - گزینه ۴ هر چهار مورد درست هستند.



نرسیده‌اند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

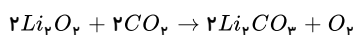
(۱)



(۲) ساختار $NOCl$ به صورت $\ddot{Cl} - \ddot{N} = \ddot{O}$ است که ۳ جفت الکترون پیوندی و ۶ جفت الکترون ناپیوندی دارد.

(۴) ساختار CO و O_3 به صورت $C \equiv O$ و $\ddot{O} = \ddot{O} = \ddot{O}$ است که تعداد الکترون‌های پیوندی در آن‌ها یکسان و برابر ۳ است.

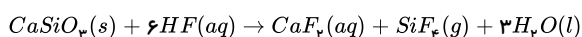
۴۴ - گزینه ۲ ابتدا معادله موازنه‌شده واکنش را می‌نویسیم:



$$22.4 \text{ L } O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{22.4 \text{ L } O_2} \times \frac{2 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{22.4 \text{ L } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 44.8 \text{ L } CO_2$$

$$\text{درصد حجمی } CO_2 = \frac{\text{حجم } CO_2}{\text{حجم هوا}} \times 100 \Rightarrow \frac{44.8}{106} \times 100 \approx 42\%$$

۴۵ - گزینه ۳



با توجه به واکنش موازنه‌شده، بیشترین ضریب استوکیومتری مربوط به ترکیب HF است.