

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ با نوشتن رابطه تقسیم داریم:

$$p(x) = (x^2 + 3x + 2)q(x) + 2x + 1 = (x+1)(x+2)q(x) + 2x + 1 \quad (1)$$

حال برای یافتن باقی مانده تقسیم $p(x-1) - p(x-2)$ بر x داریم:

$$x = 0 \Rightarrow \text{باقی مانده} = p(0-1) - p(0-2) = p(-1) - p(-2)$$

$$(1) \Rightarrow p(-1) = 0 + 2(-1) + 1 = -1, \quad p(-2) = 0 + 2(-2) + 1 = -3$$

$$\text{باقی مانده} = p(-1) - p(-2) = -1 - (-3) = 2$$

۲ - گزینه ۱ باقی مانده $p(x)$ بر $x-1$ برابر ۳ می باشد، پس: $p(1) = 3$

باقی مانده $p(x)$ بر $x+1$ برابر ۲ می باشد، پس: $p(-1) = -2$

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ برابر است با $f(-2)$ ، بنابراین:

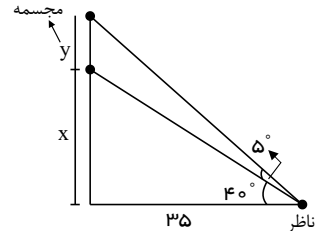
$$f(-2) = p(-1) - 2p(1) + 4 + 6k = -2 - 6 + 4 + 6k = 0 \Rightarrow 6k = 4 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

۳ - گزینه ۳ باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۸ است، پس $P(1) = 8$ و باقی مانده تقسیم بر $2x+1$ برابر ۵ است پس $P(-\frac{1}{2}) = 5$. باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ یک چندجمله ای درجه اول به صورت $mx+n$ است.

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + mx + n \Rightarrow \begin{cases} P(1) = m + n = 8 \\ P(-\frac{1}{2}) = -\frac{m}{2} + n = 5 \end{cases} \Rightarrow m = 2, \quad n = 6$$

بنابراین باقی مانده این تقسیم $2x+6$ است.

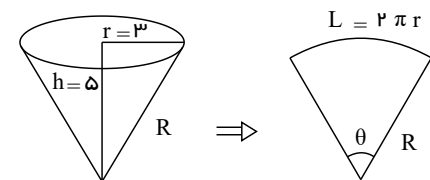
۴ - گزینه ۳ با در نظر گرفتن شکل زیر داریم:



۵ - گزینه ۲

ابتدا طبق شکل مقابل اندازه مولد R را می یابیم.

محیط قاعده مخروط برابر طول کمان مقابل به زاویه θ در قطاع است.



$$R^2 = r^2 + h^2 = 9 + 25 = 34 \rightarrow R = \sqrt{34}$$

$$L = 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$$

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{6\pi}{\sqrt{34}} \rightarrow \text{مساحت} S = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi R^2 = \frac{6\pi}{\sqrt{34}} \times \pi \times 34 = \frac{6\pi}{\sqrt{34}} \times \pi \times 34$$

$$S = \frac{6\pi}{\sqrt{34}} \times \pi \times 34 = \frac{3\pi \times 34}{\sqrt{34}} = 3\pi\sqrt{34}$$

۶ - گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که: $f(x) = a \sin(bx - \frac{\pi}{4}) = -a \cos(bx)$



از روی نمودار معلوم است که نصف دوره تناوب تابع برابر ۳ است. پس:

$$\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{3}$$

همچنین کمترین مقدار تابع برابر ۳- است. پس:

$$|-a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

چون نمودار تابع f شبیه نمودار تابع $y = -\cos x$ است، پس a باید مثبت باشد، بنابراین:

$$f(x) = -3 \cos\left(\pm \frac{\pi}{3} x\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right)$$

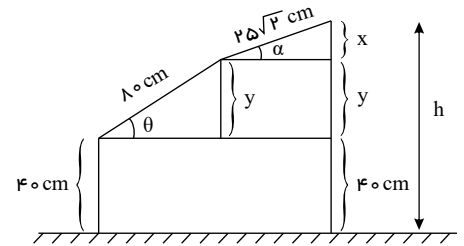
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{3} \times \frac{5}{2}\right) = -3 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{25\sqrt{2}} \Rightarrow x = 25\sqrt{2} \sin \alpha, \quad \sin \theta = \frac{y}{80} \Rightarrow y = 80 \sin \theta$$

$$h = 40 + x + y = 40 + 25\sqrt{2} \sin \alpha + 80 \sin \theta$$

$$\Rightarrow h = 40 + 25\sqrt{2} \sin(-45^\circ) + 80 \sin(0) = 40 - 25\sqrt{2} \sin 45^\circ + 0$$

$$\Rightarrow h = 40 - 25\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 40 - 25 = 15$$



۸ - گزینه ۳

می‌دانیم: $y = \sin bx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$y = 1 + a \cdot \sin bx \cdot \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx$$

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$y = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تابع در اطراف $x = 0$ صعودی است، پس a و b هم‌علامتند و داریم:

$$a + b = 2 \quad \text{یا} \quad a + b = -2$$

۹ - گزینه ۳ می‌دانیم که در تابع $y = a \cdot \sin bx$ اگر $a \cdot b > 0$ باشد، تابع در نقطه شروع $x = 0$ صعودی خواهد بود و اگر $a \cdot b < 0$ باشد، نزولی خواهد بود. توجه:

$$y = k \cdot \sin ax \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{2\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل، منحنی دو بار تکرار شده است. پس عدد $\frac{4}{3}$ دو برابر دوره تناوب تابع است.

$$3T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{4}{9} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{4}{9} \Rightarrow |b| = 3$$

کمترین مقدار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ زمانی ایجاد می‌شود که مقدار سینوس عدد ۱ یا ۱- باشد و با توجه به شکل مقدار $\min$ عدد ۱- است. پس:

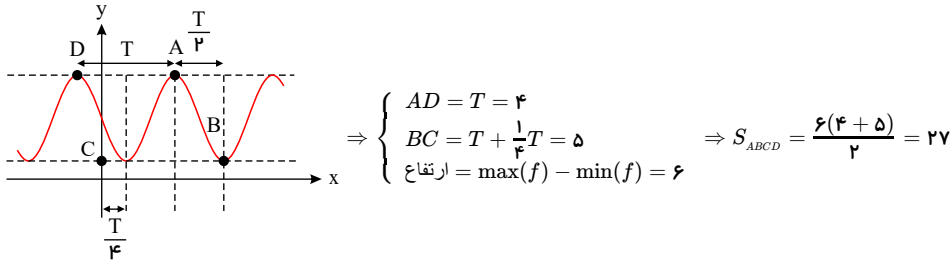
$$\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases}$$

۱۰ - گزینه ۴ برای تابع f داریم:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4, \quad \begin{cases} \max(f) = |-3| + 4 = 1 \\ \min(f) = -|-3| + 4 = 1 \end{cases}$$



از طرفی چهارضلعی $ABCD$ دوزنقه است.



۱۱ - گزینه ۴

$$3x + 1 | x + 2 \xrightarrow{\times 3} \left\{ \begin{array}{l} 3(3x + 1) | 3(x + 2) \\ 3x + 1 | 3x + 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3x + 1 | 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ 3x + 1 = -5 \Rightarrow x = -2 \\ 3x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 3x + 1 = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین هیچ مقدار طبیعی برای x وجود ندارد.

۱۲ - گزینه ۴

تذکر:

$$1) \begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases} \quad 2) p \wedge \sim p \equiv F \quad 3) \sim p \vee p \equiv T$$

$$4) F \vee p \equiv p \quad 5) T \wedge p \equiv p$$

$$\begin{aligned} & \sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge q)] \equiv \sim [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge (\sim q \vee q)] \\ & \equiv \sim [F \vee (p \wedge q)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge T] \equiv \sim (p \wedge q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p) \\ & \equiv \sim q \vee (\sim p \wedge p) \equiv \sim q \vee F \equiv \sim q \end{aligned}$$

۱۳ - گزینه ۴ از فرض سؤال، ماتریسی مانند X را می‌یابیم که رابطه $AX = I$ برقرار باشد:

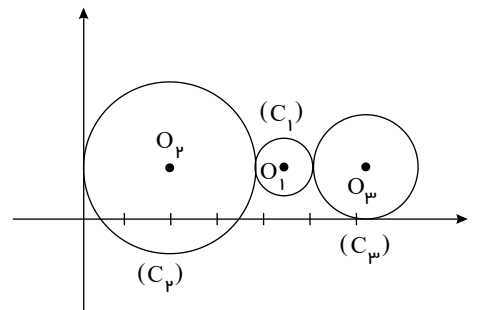
$$A^r = A + 4I \rightarrow A^r - A = 4I \rightarrow A(A - I) = 4I \rightarrow A \times \frac{1}{4}(A - I) = I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(A - I)$$

۱۴ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} C_1 : (x - \frac{9}{4})^2 + (y - 1)^2 &= \frac{1}{4} \rightarrow O_1 = (\frac{9}{4}, 1) \text{ و } R_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 &= 0 \rightarrow O_2 = (2, 1) \text{ و } R_2 = 1 \\ C_3 : x^2 + y^2 - 12x - 2y + 36 &= 0 \rightarrow O_3 = (6, 1) \text{ و } R_3 = 1 \end{aligned}$$

مرکز ۳ دایره روی خط $y = 1$ قرار دارند و داریم:

$$\left. \begin{aligned} O_1 O_2 &= \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} \\ O_1 O_3 &= 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4} \\ O_2 O_3 &= 6 - 2 = 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow O_2 O_3 = O_1 O_2 + O_1 O_3$$



مطابق شکل، دایره C_1 با دایره‌های C_2 و C_3 مماس خارج است.

۱۵ - گزینه ۱

روش اول: بین این دو تاریخ ۵ ماه ۳۱ روزه (اردیبهشت، خرداد، تیر، مرداد و شهریور) و یک ماه ۳۰ روزه (مهر) و ۳۰ روز از فروردین ($30 = 31 - 1$) داریم. لذا جمعاً

$$215 = 30 + 31 + 5 \times 31 \text{ روز داریم. حال باقیمانده } 215 \text{ به هفت روز هفته را حساب می‌کنیم:}$$

پس در این بازه زمانی تعدادی هفته کامل داریم و ۵ روز $\Rightarrow 215 \div 7 = 30 \text{ هفته و } 5 \text{ روز. هفته‌های کامل تا همان روز یکشنبه را می‌سازند. ۵ روز اضافه را باید به یکشنبه اضافه کنیم. پنج روز بعد از یکشنبه می‌شود جمعه.}$



روش دوم: می‌توانیم باقیمانده‌های هر ماه به ۷ روز را هم جدا جدا حساب کنیم:

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور	مهر	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	≡
۳۰	۳۱	۳۱	۳۱	۳۱	۳۱	۳۰	≡
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
۲	۳	۳	۳	۳	۳	۲	۱۹ ≡

۵ روز بعد از یکشنبه یعنی جمعه

۱۶ - گزینه ۱ می‌دانیم حاصل ضرب دو ماتریس که وارون یکدیگرند برابر ماتریس همانی است، پس طبق فرض داریم:

$$(I - 5A)(I + \lambda A) = I$$

$$I^2 + \lambda AI - 5AI - 5\lambda A^2 = I \xrightarrow{A^2=A}$$

$$I + \lambda A - 5A - 5\lambda A = I \rightarrow -4\lambda A - 5A = \overline{0} \rightarrow -A(4\lambda + 5) = \overline{0} \xrightarrow{A \neq \overline{0}} 4\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{5}{4}$$

۱۷ - گزینه ۱

$$a = 8q + 5 = 8q + 4 + 1 = 4(2q + 1) + 1 = 4k + 1 \Rightarrow a - 1 = 4k \quad (1)$$

$$a = 9q' + 7 = 9q' + 6 + 1 = 3(3q' + 2) + 1 = 3k' + 1 \Rightarrow a - 1 = 3k' \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a - 1 = 12k'' \Rightarrow a = 12k'' + 1$$

تذکر: عددی که بر ۳ و ۴ بخش پذیر باشد، بر ۱۲ بخش پذیر است.

۱۸ - گزینه ۳ می‌دانیم برای ماتریس وارون پذیر x داریم $XX^{-1} = I$ پس با توجه به فرض خواهیم داشت:

$$\text{همواره} : (A - 2I)(A - 2I)^{-1} = I$$

$$\rightarrow A(A - 2I)^{-1} - 2I(A - 2I)^{-1} = I$$

$$\rightarrow A(A - 2I)^{-1} - 2I \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 3 + 4 - 6 + 9 = 10$$

۱۹ - گزینه ۲ از ماتریس داده شده، دترمینان می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2|A| - 6 & -2 \\ 3 & |A| \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2|A| - 6 & -2 \\ 3 & |A| \end{vmatrix} \rightarrow |A| = 2|A|^2 - 6|A| + 6$$

$$\rightarrow 2|A|^2 - 6|A| + 6 = 0 \rightarrow (2|A| - 3)(|A| - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} |A| = \frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ |A| = 2 \end{cases}$$

$$|A| = \frac{3}{2} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 \times \frac{3}{2} - 6 & -2 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ -2 & -2 \end{bmatrix} : \text{گزینه (۲)}$$

$$|A| = 2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 \times 2 - 6 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

۲۰ - گزینه ۳ با توجه به اینکه با جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ایجاد نمی‌شود، پس $\{b, d\}$ و $\{d, b\}$ یک عضو محسوب می‌شوند. چون زیرمجموعه‌های مورد نظر فاقد عضو $\{b, d\}$ هستند، پس هر کدام از آن‌ها زیرمجموعه‌ای از مجموعه $B = \{b, d, \{d\}, \{\{d, b\}\}\}$ بوده و در نتیجه تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $2^4 = 16$ است.

۲۱ - گزینه ۴ در اینجا کار مفید پمپ معادل کار انجام شده بر روی وزن آب است. بنابراین اگر بازده را با Ra نمایش دهیم، داریم:

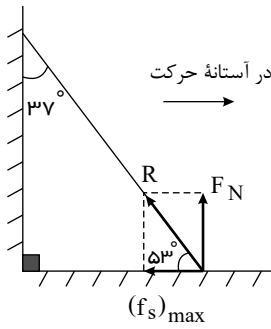
$$Ra = \frac{mgh}{Pt} \Rightarrow \frac{80}{100} = \frac{252000 \times 10 \times 12}{P \times 3600} \Rightarrow P = 10,8 kW$$

۲۲ - گزینه ۳ با استنباط از متن تست داده شده چنین برمی‌آید W_1 و W_2 کار نیروی خالص وارد بر جسم است که تغییرات سرعت جسم منوط به انجام این کار است.

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \rightarrow \begin{cases} W_1 = \frac{1}{2}m(v^2 - 0^2) = \frac{1}{2}mv^2 \\ W_2 = \frac{1}{2}m((3v)^2 - v^2) = 4mv^2 \end{cases} \rightarrow \frac{W_2}{W_1} = 8$$

۲۳ - گزینه ۳

قدم اول: نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، معادل برآیند نیروی اصطکاک و عمودی تکیه‌گاه است، با رسم نیروی وارد بر نردبان از طرف سطح زمین، داریم:



$$\tan 53^\circ = \frac{F_N}{(f_s)_{\max}} = \frac{F_N}{\mu_s F_N} = \frac{1}{\mu_s} \rightarrow \mu_s = \frac{1}{\tan 53^\circ} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \rightarrow \mu_s = 0.75$$

وزن نردبان تأثیری نداشته است!

۲۴ - گزینه ۲ هنگامی که جسم به تندی حدی می‌رسد، نیروی خالص وارد بر جسم برابر صفر می‌شود. یعنی نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر خواهد شد.

۲۵ - نکته: ۱ چون وزن ظاهری بیش‌تر از وزن واقعی است پس شتاب حرکت آسانسور به سمت بالا است یعنی آسانسور تند شونده به سمت بالا حرکت می‌کند یا کند شونده به سمت پایین. باتوجه به جهت حرکت آسانسور در این تست داریم:

$$W = mg \Rightarrow m = \frac{720}{9.8} = 73.47 \text{ kg}$$

$$F_N - mg = ma \Rightarrow 720 - 73.47 \times 9.8 = 73.47 a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

۲۶ - گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} W_t &= K_v - K_1 \\ W_t &= W_F + W_{mg} + W_N \end{aligned} \right\} W_F = K_v \Rightarrow F d \cos \theta = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow 10 \times 5 \times 1 = \frac{1}{2} \times 4 \times v_f^2 \Rightarrow v_f^2 = 25 \Rightarrow v_f = 5 \frac{m}{s}$$

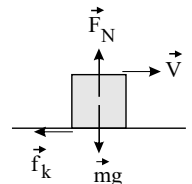
۲۷ - گزینه ۳ اگر بزرگی نیروی کشش نخ را T فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$m = 50 \text{ g} = 0.05 \text{ kg}$$

$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a) = 0.05(10 + 2)N = 0.6N$$

۲۸ - گزینه ۱

با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:



$$(F_{\text{net}})_y = ma_y = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

$$(F_{\text{net}})_x = ma_x \Rightarrow -f_k = ma_x \Rightarrow -\mu_k F_N = ma_x$$

$$\Rightarrow -\mu_k mg = ma_x \Rightarrow a_x = -\mu_k g$$

از طرفی با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی، مسافتی که جسم طی می‌کند تا بایستد، برابر است با:

$$v_f^2 - v_o^2 = 2a_x \Delta x \Rightarrow 0 - v_o^2 = 2(-\mu_k g) \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_o^2}{2\mu_k g}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\Delta x_B}{\Delta x_A} = \left(\frac{v_{oB}}{v_{oA}} \right)^2 \times \frac{(\mu_k)_A}{(\mu_k)_B}$$

$$\Rightarrow \frac{2\Delta x_A}{\Delta x_A} = \left(\frac{20}{10} \right)^2 \times \frac{(\mu_k)_A}{(\mu_k)_B} \Rightarrow \frac{(\mu_k)_B}{(\mu_k)_A} = 2$$

۲۹ - گزینه ۲

$$\text{قانون دوم نیوتون در راستای قائم: } \uparrow F_v + mg = F_N \uparrow$$

$$f_s \text{ ثابت می‌ماند} \Rightarrow f_s = F_1 \Rightarrow \text{قانون دوم نیوتون در راستای افقی}$$

$$F_{\text{Net}} \text{ تغییر نمی‌کند} \Rightarrow F_{\text{Net}} = 0 \Rightarrow \text{جسم ساکن است}$$

۳۰ - گزینه ۳ در نقطه اوج، نیروی خالص وارد بر توپ، برابند دو نیروی وزن و مقاومت هوا است، بنابراین داریم:

$$W = mg = 4.8 \text{ N} \rightarrow m \times 10 = 4.8 \Rightarrow m = 0.48 \text{ kg}$$

$$\text{در نقطه اوج} \Rightarrow F_{\text{net}} = ma \Rightarrow \sqrt{f_D^2 + 4.8^2} = 0.48 \times \frac{65}{6} = 5.2$$

$$f_D^2 + 4.8^2 = 5.2^2 \Rightarrow f_D^2 = 5.2^2 - 4.8^2 = (5.2 - 4.8)(5.2 + 4.8) = 0.4 \times 10 = 4 \Rightarrow f_D = 2 \text{ N}$$



۳۱ - گزینه ۲ روش اول: ابتدا با معلوم بودن نیروی عمودی تکیه‌گاه، شتاب حرکت آسانسور را می‌یابیم:

$$F_N - mg = ma \Rightarrow 720 - 600 = 60a \Rightarrow a = 2m/s^2$$

اگر M مجموع جرم شخص و آسانسور باشد، طبق قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$T - Mg = Ma$$

$$T - 2000 = 200 \times 2 \Rightarrow T = 2400N$$



روش دوم: شخص و آسانسور، هردو با شتاب a حرکت می‌کنند (نسبت به ناظر ساکن) بنابراین، یکبار، قانون دوم نیوتون را برای شخصی و بار دیگر برای مجموعه شخص و اتاقک آسانسور می‌نویسیم و داریم: (جرم شخص و m' جرم اتاقک آسانسور است) (چون $f_N > mg$ است، پس جهت شتاب a روبه بالاست)

$$\begin{cases} F_N - mg = ma \\ T - (M + m')g = (M + m')a \end{cases} \rightarrow \frac{F_N - mg}{T - (M + m')g} = \frac{m}{M + m'} \rightarrow \frac{720 - 600}{T - 2000} = \frac{60}{2400} \rightarrow T = 2400N$$

۳۲ - گزینه ۴

$$HBr : pH = 2 \Rightarrow [H^+] = 10^{-2} \frac{mol}{L} \Rightarrow H^+ \text{ مول} = 10^{-2} \frac{mol}{L} \times 0.4L = 0.004 mol H^+$$

$$KOH : pH = 12.3 \Rightarrow [H^+] = 10^{-12.3} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-1.7} = OH^- = 2 \times 10^{-2} \frac{mol}{L}$$

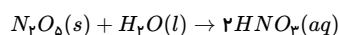
$$\Rightarrow OH^- \text{ مول} = 2 \times 10^{-2} \frac{mol}{L} \times 0.1L = 0.002 mol OH^-$$

تعداد مول H^+ بیشتر از تعداد مول OH^- است؛ پس تعداد مول H^+ باقی‌مانده عبارت است از:

$$\text{تعداد مول } H^+ \text{ باقی‌مانده} = 0.004 - 0.002 = 0.002 mol$$

$$[H^+] = \frac{0.002 \frac{mol}{L}}{0.001 \times 10^{-3} L} = 0.004 \rightarrow pH = -\log 4 \times 10^{-3} = 3 - \log 4 = 2.4$$

۳۳ - گزینه ۴ دی نیتروژن پنتاکسید، یک اکسید اسیدی است و در اثر حل شدن در آب، نیتریک اسید (اسید قوی) تولید می‌کند.



$$? mol H^+ = 2.16g N_2O_5 \times \frac{1 mol}{108g} \times \frac{2 mol HNO_3}{1 mol N_2O_5} \times \frac{1 mol H^+}{1 mol HNO_3} = 0.04 mol H^+$$

$$[H^+] = \frac{0.04 mol}{0.5L} = 0.08 mol \cdot L^{-1}$$

$$pH = -\log 8 \times 10^{-2} = -\log 2^3 + (-\log 10^{-2}) = -0.9 + 2 = 1.1$$

۳۴ - گزینه ۴

$$\text{جرم محلول} = (mL) \times \left(\frac{g}{mL}\right) \text{ چگالی محلول} = 10^4 mL \times 1.25 \frac{g}{mL} = 1.25 \times 10^4 g$$

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{x}{1.25 \times 10^4} \times 10^6 \Rightarrow x = \frac{80 \times 1.25 \times 10^4}{10^6} = 1000 g$$

۳۵ - گزینه ۲ موارد اول و چهارم درست‌اند.

بررسی موارد نادرست:

مورد دوم) در میدان الکتریکی، اتم اکسیژن که سر منفی مولکول آب می‌باشد، به سمت قطب مثبت و اتم‌های هیدروژن که سر مثبت مولکول آب هستند، به سمت قطب منفی میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

مورد سوم) مولکول‌های CH_4 و CO_2 و O_2 ناطبی هستند و رفتاری متفاوت با مولکول‌های آب در میدان الکتریکی دارند و برخلاف آب، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

۳۶ - گزینه ۳ هیدروسیانیک‌اسید یک اسید تک‌پروتون‌دار ضعیف است، بنابراین انحلال هر مول از آن در آب، نمی‌تواند باعث تولید یک مول یون هیدرونیوم شود.

۳۷ - گزینه ۴ در شرایط یکسان هرچه شمار یون‌های موجود در محلول بیشتر باشد، رسانایی آن محلول بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: شکر در آب یون تولید نمی‌کند، پس این محلول رسانایی ناچیزی دارد.

گزینه ۲:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M} \Rightarrow [H^+] = [CH_3COO^-] = 0.002 \frac{mol}{L}$$

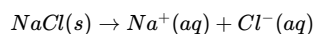
$$\text{شمار یون‌ها} = 0.002 + 0.002 = 0.004 mol$$

گزینه ۳: هیدروکلریک‌اسید، یک اسید قوی بوده و به‌طور کامل یونیده می‌شود.



$$0.02 \text{ mol} = 0.01 \times 2 = \text{شمار مولکول} \times 2 = \text{شمار یون ها}$$

گزینه ۴: سدیم کلرید ترکیب یونی محلول در آب است.



$$0.01 \text{ mol} = 0.005 \times 2 = \text{شمار یون ها}$$

۳۸ - گزینه ۳ با توجه به روابط زیر غلظت یون هیدروکسید و هیدرونیوم محاسبه می شود.

$$[H_3O^+] = 10^{-pH}, [OH^-] = 10^{pH-14} \rightarrow \frac{[OH^-]}{[H_3O^+]} = 10^{2pH-14}$$

پس خواهیم داشت:

$$10^{2pH-14} = 4 \times 10^5 = 2^2 \times 10^5 = 10^{0.6} \times 10^5 = 10^{5.6} \rightarrow 2pH - 14 = 5.6 \rightarrow pH = 9.8$$

۳۹ - گزینه ۲ حاصل عبارت $\frac{K_a}{M}$ برابر 4×10^{-6} می باشد که از 0.002 کوچک تر است. pH محلول اسید را قبل از اضافه کردن پتاسیم هیدروکسید محاسبه می کنیم:

$$K_a = M\alpha^2 \Rightarrow 4 \times 10^{-6} = 0.1\alpha^2 \rightarrow \alpha^2 = 4 \times 10^{-6} \rightarrow \alpha = 2 \times 10^{-3}$$

$$pH_1 = -\log M \cdot \alpha \cdot n_z = -\log(0.1 \times 2 \times 10^{-3}) = -\log 2 \times 10^{-4} = -[0.3 - 4] = 3.7$$

پتاسیم هیدروکسید اضافه شده 90 درصد غلظت اسید خنثی می شود، پس غلظت از 0.1 به 0.01 (پس $0.1 - 0.09 = 0.01$) مولار خواهد شد.

pH محلول جدید را محاسبه می کنیم:

با تغییر غلظت اسید و باز قوی، K_a و α ثابت است. اما با تغییر غلظت اسید ضعیف، k_a ثابت مانده، اما α تغییر می کند. پس اسید ضعیف در هر غلظت خاصی α منحصر به فرد دارد (K_a ثابت معادل اسیدی تابع دما است و فقط با تغییر دما، تغییر می کند و تغییر غلظت بر مقدار K_a تأثیر ندارد).

$$K_a = M\alpha^2 \rightarrow 4 \times 10^{-6} = 0.1\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \times 10^{-5}$$

$$\alpha = \sqrt{4 \times 10^{-5}} = 2\sqrt{10^{-5}} = 2(0.00316) = 0.00632 = 6.32 \times 10^{-3}$$

$$pH_2 = -\log(M \cdot \alpha \cdot n_z) = -\log(0.01 \times 6.32 \times 10^{-3} \times 1) \xrightarrow[\text{باعذر نظر می گیریم}]{\text{برای تقریباً برابر}} -\log(10^{-5} \times 6) = 5 - \log 6 = 4.2$$

$$\Delta pH = 4.2 - 3.7 = 0.5$$

۴۰ - گزینه ۱ ابتدا مقدار باریم سولفات حل شده در آب را محاسبه می کنیم:

$$?gBaSO_4 = 6.85 \times 10^{-3}gBa^{2+} \times \frac{1molBa^{2+}}{137gBa^{2+}} \times \frac{1molBaSO_4}{1molBa^{2+}} \times \frac{233gBaSO_4}{1molBaSO_4} = 11.65 \times 10^{-3}gBaSO_4$$

حال حداکثر مقدار باریم سولفات قابل حل در 5×10^5 گرم آب در دمای داده شده را تعیین می کنیم.

$$5 \times 10^5 g \text{ آب} \times \frac{4 \times 10^{-6}gBaSO_4}{100g \text{ آب}} = 20 \times 10^{-3}gBaSO_4$$

بنابراین مقدار باریم سولفات قابل حل در این محلول برابر است با:

$$20 \times 10^{-3} - 11.65 \times 10^{-3} = 8.35 \times 10^{-3}g = 8.35mg$$

۴۱ - گزینه ۴ گلوکومتر، میلی گرم های گلوکز را در دسی لیتر (۱۰ لیتر) خون نشان می دهد.

$$\frac{\text{مول حل شونده}}{\text{لیتر محلول}} = \text{غلظت مولی} \rightarrow 5 \times 10^{-3} = \frac{n}{0.1} \rightarrow n = 5 \times 10^{-4}molC_6H_{12}O_6$$

$$?mgC_6H_{12}O_6 = 5 \times 10^{-4}molC_6H_{12}O_6 \times \frac{180g}{1mol} \times \frac{1000mg}{1g} = 90mgC_6H_{12}O_6$$