

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0 \begin{cases} x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 0 \\ -1 \leq x^2 + x \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a > 0, \Delta < 0} x \in R \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < x < 0$$

$$-1 < x < 0 \xrightarrow{\text{توان } 2} 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

۲ - گزینه ۳

$$3x^2 + 5x + 2 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \forall x \notin \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = -1 \rightarrow [-x] = -[x] - 1 \\ -1 < x < -\frac{2}{3} \rightarrow -3 < 3x < -2 \rightarrow [3x] = -3 \end{cases}$$

$$\text{پس: } \frac{3^{-[x]}}{3^{[-x]}} + [3x] = \frac{3^{-[x]}}{3^{-[x]-1}} - 3 = 3 - 3 = 0$$

۳ - گزینه ۴

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

با تعیین علامت عبارت $\frac{4-2x}{3x+1}$ ، نامعادله داده شده را حل می کنیم:

$$4-2x=0 \Rightarrow x=2$$

$$3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$\frac{4-2x}{3x+1}$	-	ت	+	-

بنابراین $-\frac{1}{3} < x \leq 2$ و داریم:

$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6 \Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, \dots, 6$$

مجموعه مقادیر $[3x]$ شامل ۸ عضو است.

۴ - گزینه ۲

$$3[x^2] + x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\text{عدد صحیح}} - 3 \frac{[x^2]}{\text{عدد صحیح}}$$

باتوجه به این که حاصل براکت عددی صحیح است از رابطه ی بالا نتیجه می شود که x باید عدد صحیح باشد پس x^2 نیز عددی صحیح است و داریم:

$$x = 2 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(3x-2) = 0$$

$$x = -1, \quad x = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{جواب } \boxed{x = -1}$$

۵ - گزینه ۲

$$[2x-1] = 3 \Rightarrow [2x] - 1 = 3 \Rightarrow [2x] = 4 \Rightarrow 4 \leq 2x < 5 \xrightarrow{\times 2} 8 \leq 4x < 10$$

$$8+3 \leq 4x+3 < 10+3 \Rightarrow 11 \leq 4x+3 < 13 \Rightarrow [4x+3] = 11, 12$$



۶ - گزینه ۲

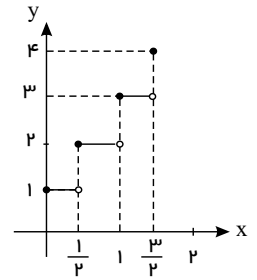
$$0 \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 3$$

$$0 \leq 2x < 1 \rightarrow y = 0 + 1 = 1, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$1 \leq 2x < 2 \rightarrow y = 1 + 1 = 2, \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$2 \leq 2x < 3 \rightarrow y = 2 + 1 = 3, \quad 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

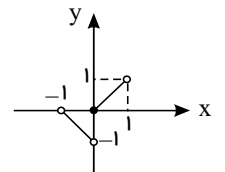
$$2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow y = 4$$



۷ - گزینه ۴

$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -x - 1 \Rightarrow (-1, 0) \quad (0, -1)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = x + 0 = x \Rightarrow (0, 0), (1, 1)$$



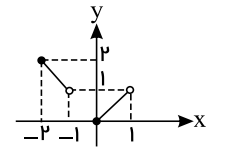
۸ - گزینه ۴

$$x = \underbrace{[2x + 5]}_{\text{عدد صحیح}} + \underbrace{[x - 3]}_{\text{عدد صحیح}} - \underbrace{7}_{\text{عدد صحیح}} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x \in \mathbb{Z}$$

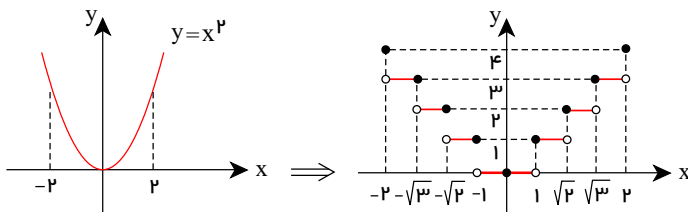
$$x = [2x] + 5 + [x] - 3 - 7 \Rightarrow x = 2x + x - 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

۹ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\rightarrow y = \frac{x}{-2+1} = -x \quad \left| \begin{array}{c} -2 \\ 2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right| \\ -1 \leq x < 0 &\rightarrow y = \frac{x}{-1+1} = \frac{x}{0} \quad \text{تعریف نشده} \\ 0 \leq x < 1 &\rightarrow y = \frac{x}{0+1} = x \quad \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \end{aligned}$$



۱۰ - گزینه ۱ ابتدا نمودار $y = x^2$ را رسم کرده و سپس $y = [x^2]$ را بدست می آوریم:



۱۱ - گزینه ۴ می دانیم اگر دو سطر (یا دو ستون) ضربی از هم (یا مانند هم) باشند حاصل دترمینان صفر است. بنابراین اگر $x - 1 = 1$ (یا $x - 2 = 2$) باشند ستون اول (یا ستون دوم) با ستون سوم مانند یکدیگر می شوند. پس:

$$\begin{aligned} x - 1 = 1 &\rightarrow x = 2 \\ x - 2 = 2 &\rightarrow x = 4 \end{aligned} \rightarrow \text{حاصل ضرب جواب ها} = 8$$

۱۲ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} y = \frac{4x+1}{x-2} \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \text{باید} : x - 2 \mid 4x + 1 \xrightarrow{x-2 \mid x-2} x - 2 \mid 4x + 1 - 4(x-2) \\ &\Rightarrow x - 2 \mid 9 \Rightarrow x - 2 \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\} \xrightarrow{+2} x \in \{-7, -1, 1, 3, 5, 11\} \end{aligned}$$

چون قرار است نقطه مورد نظر در ربع دوم باشد بایستی $x < 0$ و $y > 0$ باشد.

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{4x+1}{x-2} = 1 \rightarrow \text{در ربع دوم است.}$$

$$x = -7 \rightarrow y = \frac{4x+1}{x-2} = \frac{-27}{-9} = 3 \rightarrow \text{در ربع دوم است.}$$

۱۳ - گزینه ۲

A^{-1} را از سمت چپ در رابطه ماتریسی ضرب می کنیم:

$$AX = A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} \underbrace{A^{-1}A}_I X = A^{-1}(A - 2I) \Rightarrow X = A^{-1}A - 2A^{-1}I$$



$$\Rightarrow X = I - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۴ - گزینه ۲ مطابق فرض داریم:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3m - 4 = x \\ 2m = 2 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow 3(1) - 4 = x \rightarrow x = -1$$

۱۵ - گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال و استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$A^2 = 3I \rightarrow A^2 - I = 2I$$

$$\rightarrow (A - I)(A + I) = 2I \rightarrow (A + I) \frac{(A - I)}{2} = I$$

$$\Rightarrow (A + I)^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$$

۱۶ - گزینه ۲ دترمینال ماتریس اولیه و ماتریس حاصل را نسبت به سطرها (مثلاً سطر اول) بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & b \\ 7 & 10 & c \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & b \\ 10 & c \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & b \\ 7 & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+3 \\ 3 & 4 & b \\ 7 & 10 & c \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & b \\ 10 & c \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & b \\ 7 & c \end{vmatrix} + (a+3) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$$

با مقایسه دو دترمینان فوق متوجه می‌شویم اختلاف این دو $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$ می‌باشد که برابر است با:

$$3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 6$$

۱۷ - گزینه ۴ طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} 11 | 3a + 2b + 14 \\ 11 | (a - 3b + k) \times 3 \end{cases} \Rightarrow 11 | 3a + 2b + 14 - (3a - 9b + 3k)$$

بنابراین $11 | 11b + 14 - 3k$ ، با توجه به اینکه $11 | 11b$ پس باید $14 - 3k$ از اینجا کم‌ترین مقدار k ، به دست می‌آید.

۱۸ - گزینه ۴

$$xy + 3y = 2x - 5 \Rightarrow y(x + 3) = 2x - 5 \Rightarrow y = \frac{2x - 5}{x + 3}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} -x + 3 | 2x - 5 \\ x + 3 | 2(x + 3) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x + 3 | 11 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x + 3 = 11 \Rightarrow x = 8$$

۱۹ - گزینه ۲

$$a^5 | b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۶}} a^{30} | b^{42} \rightarrow a^{28} | b^{42} \xrightarrow{\frac{1}{7} \text{ به توان}} a^4 | b^6 \rightarrow \text{پس گزینه اول همواره درست است}$$

$$a^5 | b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^{10} | b^{14} \xrightarrow{\times b} a^{10} | b^{15} \rightarrow \text{پس گزینه سوم همواره درست است}$$

$$a^5 | b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} a^{15} | b^{21} \rightarrow a^{14} | b^{21} \xrightarrow{\frac{1}{7} \text{ به توان}} a^2 | b^3 \rightarrow \text{پس گزینه چهارم همواره درست است}$$

$$a^5 | b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۱۱}} a^{55} | b^{77} \xrightarrow{\frac{1}{7} \text{ به توان}} \frac{55}{7} < 8 \rightarrow \text{پس الزاماً گزینه دوم همواره درست نیست}$$

۲۰ - گزینه ۲ سعی کنیم a^2 را حذف کنیم:

$$\left. \begin{matrix} d | 3a - 1 \xrightarrow{\times a} d | 3a^2 - a \\ d | a^2 + a \xrightarrow{\times 3} d | 3a^2 + 3a \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d | 4a$$

حال سعی می‌کنیم a را حذف کنیم:

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} d | 4a \xrightarrow{\times 3} d | 12a \\ d | 3a - 1 \xrightarrow{\times 4} d | 12a - 4 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d | 4$$

پس $d \in \{1, 2, 4\}$ و مجموع مقادیر مختلف می‌شود: $1 + 2 + 4 = 7$.

۲۱ - گزینه ۳

$$Q = mc\Delta\theta = 0.1 \times 400 \times (40 - (-20)) = 2400 J$$

$$\text{گرمایی که جسم در هر ثانیه گرفته} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{2400}{120} = 20 \frac{J}{s}$$



۲۲ - گزینه ۲ چون رابطه دمای دو دماسنج خطی است.

دماسنج سلسیوس (C)	۲۰	θ _۱	θ _۲	...
دماسنج مجهول	۵۶	θ' _۱	θ' _۲	...

$$\rightarrow \frac{20 - \theta_2}{56 - \theta'_2} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta'_1 - \theta'_2}$$

$$\begin{cases} \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = 6^\circ C \\ \Delta\theta' = \theta'_1 - \theta'_2 = 10^\circ C \end{cases} \Rightarrow \frac{20 - x}{56 - x} = \frac{6}{10} \rightarrow \frac{20 - x}{56 - x} = \frac{3}{5} \rightarrow 3 \times 56 - 3x = 100 - 5x \rightarrow 2x = 100 - 168 = -68 \rightarrow \boxed{x = -34^\circ C}$$

به فرض $\rightarrow \theta_2 = \theta'_2 = x = ?$

۲۳ - گزینه ۱ نصف انرژی جنبشی گلوله موقع برخورد، صرف گرم کردن خود گلوله می‌شود. پس:

$$\frac{1}{2}K = Q \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m v^2 = m c \Delta\theta \Rightarrow \frac{1}{4} \times 400^2 = 125 \times \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = 320^\circ C = 320 K$$

۲۴ - گزینه ۱

$$Q_A = Q_B \Rightarrow m_A c_A \Delta\theta_A = m_B c_B \Delta\theta_B \rightarrow 3c_A \times 5 = 2c_B \times 3 \rightarrow 15c_A = 6c_B \rightarrow \frac{c_A}{c_B} = \frac{6}{15} = 0.4$$

۲۵ - گزینه ۲ وقتی گفته می‌شود که بخشی از یخ آب نمی‌شود بدین معناست که دمای تعادل صفر درجه سانتی گراد است.

$$(m) - 20^\circ C \text{ یخ} \rightarrow (m - 50) \text{ یخ صفر درجه} \leftarrow 20^\circ C \text{ آب}, m' = 250 g$$

Q_1	$+$	Q_2	$=$	$ Q_3 $
↓		↓		↓
گرمای افزایش		گرمای ذوب		گرمای تبدیل

آب ۲۰ به آب ۰ ° قسمتی از یخ دمای یخ از ۲۰ به ۰ °

$$m \times 21 \times 20 + (m - 50) \times 336 = 250 \times 42 \times 20$$

توجه شود که ۵۰ گرم یخ ذوب نشده باقی می‌ماند.

$$42 \times m + 336m - 16800 = 21000$$

$$378m = 37800 \Rightarrow m = 100 g$$

۲۶ - گزینه ۲

آب ۵۰ ° $\xrightarrow{Q_2}$ آب ۰ ° $\xrightarrow{Q_1}$ یخ ۰ ° $\xrightarrow{Q_3}$ یخ ۵۰ ° C

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = mc_{\text{یخ}} \Delta\theta + mL_F + mc_{\text{آب}} \Delta\theta$$

$$Q_T = \frac{2}{10} \times 2100 \times 5 + \frac{2}{10} \times 336000 + \frac{2}{10} \times 4200 \times 50$$

$$Q_T = 111100 J = 111.1 kJ$$

۲۷ - گزینه ۴

$$Q_F = mL_F \Rightarrow 100.8 = m \times 336 \Rightarrow m = \frac{100.8}{336} = 0.3 kg = 300 g$$

$$\frac{\text{جرم آب منجمد شده}}{\text{جرم کل}} = \frac{300}{500} = 0.6 = 60\%$$

۲۸ - گزینه ۲

$$F = 1.8\theta + 32 \rightarrow \Delta F = 1.8\Delta\theta \rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta F}{1.8} \rightarrow \Delta\theta = \frac{9}{1.8} = 5^\circ C$$

$$Q = mc\Delta\theta = 1 \times 4200 \times 5 = 21000 J = 21 (kJ)$$

۲۹ - گزینه ۴ فرآیندهای ذوب، تبخیر و تصعید گرماگیر و فرآیندهای انجماد، میعان و چگالش گرماده هستند.

۳۰ - گزینه ۱

$$\rho_A = 2\rho_B \xrightarrow[m_A=V_B]{m=\rho V} m_A = 2m_B$$

$$Q_A = Q_B$$

$$m_A c_A \Delta\theta_A = m_B c_B \Delta\theta_B$$



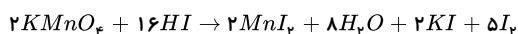
$$2m_B \times r_{c_B} \times \Delta\theta_A = m_B \times c_B \times \Delta\theta_B$$

$$4\Delta\theta_A = \Delta\theta_B \Rightarrow \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \frac{1}{4}$$

۳۱ - گزینه ۲

$$\text{چگالی } ad \text{ درصد جرمی } 10 = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{غلظت مولی}} \Rightarrow \frac{10 \times 49 \times 1,25}{98} = 6,25 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

۳۲ - گزینه ۱ برای موازنه واکنش (I)، می‌توان ابتدا به $KMnO_4$ ضریب ۱ داد و بقیه ضرایب را با توجه به آن به‌دست آورد و پس از تبدیل ضرایب‌های کسری به عدد صحیح، معادله به صورت زیر موازنه می‌شود:



برای موازنه واکنش (II) ابتدا باید هیدروژن‌ها را موازنه کرد، یعنی به H_2O ضریب ۱ و به $NaOH$ ضریب ۲ داده و در مرحله بعدی، اکسیژن را موازنه نمود. موازنه معادله (II) به صورت زیر است:



$$II \text{ و } I \text{ در واکنش‌های } H_2O \text{ مجموع ضرایب } = 8 + 3 = 11$$

۳۳ - گزینه ۲ گزینه ۱: گاز نئون - گاز نیتروژن - گاز نئون آرایش هشت‌تایی دارد و اتم‌های گاز نیتروژن نیز با تشکیل یک پیوند اشتراکی سه‌گانه به آرایش هشت‌تایی رسیده است. (نادرست)

گزینه ۲: بخار سدیم - گاز کلر - سدیم با تشکیل یون به آرایش گاز نجیب قبل از خود می‌رسد ولی کلر با تشکیل یون به آرایش گاز نجیب هم دوره خود می‌رسد. (درست)

گزینه ۳: گاز آرگون - گاز هلیوم - مقدار گازهای نجیب در هواکره بسیار کم است و به گازهای کمیاب معروف هستند. (نادرست)

گزینه ۴: گاز اکسیژن - گاز هیدروژن - در واکنش تشکیل آب از گازهای هیدروژن و اکسیژن که نوعی سوختن است، H_2 و O_2 هر دو واکنش‌دهنده هستند. (نادرست)

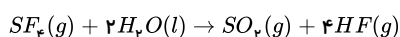
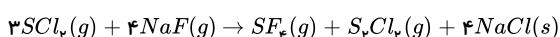
۳۴ - گزینه ۴ کاهش جرم مواد جامد مربوط به جرم گازهای تولیدشده است، پس باید مجموع جرم گازهای N_2 و O_2 را محاسبه کنیم:

$$gO_2 : 2,8LO_2 \times \frac{1molO_2}{22,4LO_2} \times \frac{32gO_2}{1molO_2} = 4gO_2$$

$$gN_2 : 2,8LO_2 \times \frac{1molO_2}{22,4LO_2} \times \frac{2molN_2}{5molO_2} \times \frac{28gN_2}{1molN_2} = 1,4gN_2$$

$$\text{جرم کاهش جرم} = 1,4 + 4 = 5,4g$$

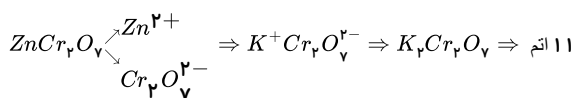
۳۵ - گزینه ۴



$$?gNaF = 50LHF \times \frac{0,8gHF}{1LHF} \times \frac{1molHF}{20gHF} \times \frac{4molNaF}{4molHF} \times \frac{42gNaF}{1molNaF} = 84gNaF$$

$$?gSO_2 = 50LHF \times \frac{0,8gHF}{1LHF} \times \frac{1molHF}{20gHF} \times \frac{1molSO_2}{4molHF} \times \frac{64gSO_2}{1molSO_2} = 32gSO_2$$

۳۶ - گزینه ۴



۳۷ - گزینه ۱

$$\text{جرم حل شونده} \\ \text{جرم حلال + جرم حل شونده} \times 100 = \text{درصد جرمی}$$

$$Ca^{2+} \text{ درصد جرمی} = \frac{1360 \times 10^{-3}(g)}{1000g} \times 100 = 0,136\%$$

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{مقدار مول حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{\frac{1360 \times 10^{-3}}{40}(mol)}{1(L)} = 0,034mol \cdot L^{-1}$$



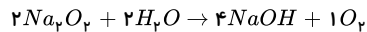
$$1360 \text{ mg} \rightarrow 1,36 \text{ g Ca}$$

$$mol_{Ca} = \frac{1,36}{40} = 0,034 \text{ mol}$$

$$d_{\text{آب}} = 1 \rightarrow \text{لیتر} \rightarrow \text{کیلوگرم}$$

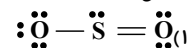
$$\text{غلظت مولار} = \frac{0,034}{1} = 0,034$$

۳۸ - گزینه ۲

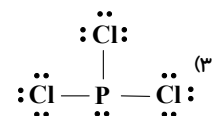


۳۹ - گزینه ۴ در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب «ساختار لوویس، نام CO_2 و ساختار لوویس PCl_3 »، نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:



(۲) کربن دی‌اکسید



در ساختار لوویس، الکترون‌های ناپیوندی هم باید نشان داده شوند.

۴۰ - گزینه ۲ - عبارت‌های سوم و پنجم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

مورد اول: دگرشکل، به شکل‌های گوناگون بلوری یا مولکولی یک عنصر گفته می‌شود.

مورد دوم: فرمول مولکولی برای مواد مولکولی به کار می‌رود که در ساختار آن‌ها یون وجود ندارد.

مورد چهارم: در توسعه پایدار، هزینه‌های اجتماعی نیز باید در نظر گرفته شود.