

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

دو نقطه داده شده را در تابع $f(x) = ab^x - 1$ صدق می دهیم.

$$A \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{1}{2} = ab^{-\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{a^2}{b} \rightarrow a^2 = \frac{3}{4}b \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b}$$

$$B \left| \begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 11 = ab - 1 \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b}b = 12 \\ \Rightarrow b\sqrt{b} = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{پس: } f(x) = 3 \times 4^x - 1 \Rightarrow f(-1) = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۲ - گزینه ۴

$$f = \{(2, a), (a, a^2 - 2), (a, 3a - 4), (a^3 - 6, b)\}$$

$$\text{شرط تابع بودن} \Rightarrow a^2 - 2 = 3a - 4 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$$

$$a = 1 : f = \{(2, 1), (1, -1), (-5, b)\} \Rightarrow b \in \mathbb{R} \Rightarrow b^2 \geq 0 \Rightarrow -b^2 \leq 0$$

$$a = 2 : f = \{(2, 2), (2, 2), (2, b)\} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4 - 4 = 0$$

باتوجه به رابطه (۱) گزینه ۴ صحیح است.

۳ - گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع f را تعیین می کنیم، برای این کار معادله خط گذرنده از نقاط $(0, 4)$ و $(2, 0)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(0, 4)$ و $(-4, 0)$ را به دست می آوریم.

$$(0, 4), (2, 0) \Rightarrow \frac{y - 4}{x} = \frac{4}{-2} = -2 \rightarrow y = -2x + 4$$

$$(0, 4), (-4, 0) \Rightarrow \frac{y - 4}{x} = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow y = x + 4$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & x < 0 \\ -2x + 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sqrt{2 - |f(x)|} \Rightarrow 2 - |f(x)| \geq 0 \Rightarrow |f(x)| \leq 2 \\ \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

$$x < 0 \Rightarrow -2 \leq x + 4 \leq 2 \Rightarrow -2 - 4 \leq x \leq 2 - 4 \Rightarrow -6 \leq x \leq -2 \xrightarrow{x < 0} -6 \leq x \leq -2 \quad (1)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow -2 \leq -2x + 4 \leq 2 \Rightarrow -6 \leq -2x \leq -2 \xrightarrow{\div (-2)} 3 \geq x \geq 1 \xrightarrow{x \geq 0} 1 \leq x \leq 3 \quad (2)$$

$$\text{جواب نهایی: } (1) \cup (2) \Rightarrow [-6, -2] \cup [1, 3]$$

۴ - گزینه ۳

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_7^x = 1 + \log_7^{y+1} \Rightarrow \log_7^x = \log_7^2 + \log_7^{y+1} \Rightarrow \log_7^x = \log_7^{2y+2} \Rightarrow x = 2y + 2$$

$$x^2 - y^2 = 32 \Rightarrow (2y + 2)^2 - y^2 = 32 \Rightarrow (4y^2 + 8y + 4) - y^2 = 32 \Rightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 6 \\ y = -\frac{14}{3} \Rightarrow \text{چون جلوی لگاریتم را منفی می کند، غیر قابل قبول است} \end{cases}$$

$$\log_7^{x+y} \stackrel{x=6}{=} \log_7^{6+y} = \log_7^{2^3} = \frac{3}{2}$$

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^a = \frac{1}{\log_a^k}, \quad \log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \quad \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{۵ - گزینه ۲ می دانیم:}$$

$$\log_{\Delta}^{2\Delta x^2} + \log_x^{2\Delta} = 7$$

$$\Rightarrow \log_{\Delta}^{2^2} + \log_{\Delta}^{x^2} + \log_x^{\Delta^2} = 7 \Rightarrow 2 + 2\log_{\Delta}^x + 2\log_x^{\Delta} = 7$$



$$\Rightarrow 2(\log_5^x + \log_x^5) = 5 \xrightarrow{\log_5^x = t} 2\left(t + \frac{1}{t}\right) = 5$$

$$\xrightarrow{\times t} 2t^2 + 2 = 5t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow t = \frac{5 \pm 3}{2 \times 2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \log_5^x = 2 \Rightarrow x = 5^2 = 25 \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_5^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$x = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + 3 = 5 + 3 = 8 \Rightarrow \log_{16}^{(x^2+3)} = \log_{16}^8 = \log_{2^4}^{2^3} = \frac{3}{4}$$

جواب متناظر با، $x = 25$ در بین گزینه‌ها نیست.

۶ - گزینه ۱

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \text{ می‌دانیم:}$$

$$\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1 \Rightarrow \log \frac{2x+2}{x} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x+2}{x} = 10 \Rightarrow 10x = 2x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_8^x = \log_8^{\frac{1}{8}} = \log_{8^r}^{8^{-r}} = -\frac{r}{3}$$

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \text{ می‌دانیم:}$$

$$4^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 72 = 0 \xrightarrow{2^x=A} A^2 + A - 72 = 0 \Rightarrow (A+9)(A-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -9 \Rightarrow 2^x = -9 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2 \xrightarrow{x=2} \log 4 + \log(2y+9) = 2$$

$$\Rightarrow \log(8y+36) = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} 8y+36 = 10^2 \Rightarrow 8y = 64 \Rightarrow y = 8$$

۸ - گزینه ۴ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد و زیر رادیکال، باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$$x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \quad (I)$$

$$1 - \log(x-1) \geq 0 \rightarrow \log(x-1) \leq 1 \rightarrow \log(x-1) \leq \log 10 \rightarrow x-1 \leq 10 \rightarrow x \leq 11 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $1 < x \leq 11$ یا $x \in (1, 11]$ می‌رسیم.

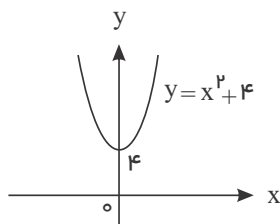
۹ - گزینه ۲ تابعی از x است هرگاه به ازای هر x فقط و فقط یک y وجود داشته باشد.

گزینه ۱: تابع نیست، زیرا اگر $x = 5$ باشد، $y^2 = 1$ است و برای آن دو مقدار ± 1 یافت می‌شود.

گزینه ۳: تابع نیست، زیرا اگر $x = 1$ باشد، $|y-1| = 2$ در نتیجه $y = 3$ یا $y = -1$ که معرف تابع نیست.

گزینه ۴: تابع نیست، زیرا اگر $x = 0$ باشد، y هر مقداری می‌تواند داشته باشد.

گزینه ۲: با توجه به نمودار مقابل، تابع است.



زیرا هر خطی موازی محور y ها رسم کنیم، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۰ - گزینه ۲ فرم کلی تابع خطی بصورت $f(x) = ax + b$ است که در رابطه داده شده در صورت سؤال جایگزین کنیم، داریم:

$$f(x-1) + f(x+2) = x \Rightarrow a(x-1) + b + a(x+2) + b = x$$



$$\Rightarrow ax - a + b + ax + 2a + b = x$$

با توجه به تساوی آخر باید ضریب x در دو طرف یکسان باشد و همچنین مقدار ثابت در دو طرف صفر باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a + 2b = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + 2b = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 2ax + a + 2b = x$$

$$\text{پس: } f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۱۱ - گزینه ۱ الف) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

ب) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

ج) گزاره همیشه درست است و با استدلال استنتاجی (اثبات مستقیم) ثابت می شود.

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$$

د) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

۱۲ - گزینه ۱

نکته: در اثبات برخی نامساوی ها یا تساوی های ریاضی، حکم را آنقدر ساده می کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. حال اگر مسیر طی شده برگشت پذیر باشد، به این روش، اثبات بازگشتی می گوئیم.

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 5 \geq 4xy + 4z + 2y \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 \geq 0. \text{ این رابطه، همواره درست است.}$$

۱۳ - گزینه ۱ ابتدا یکی از دو متغیر a یا b را حذف می کنیم:

$$\begin{array}{l} 11|5a + 4b + 3 \xrightarrow{\times -1} 11| -5a - 4b - 3 + 5a + 15b + 5k \Rightarrow 11|11b + 5k - 3 \\ 11|a + 3b + k \xrightarrow{\times 5} 11|5a + 15b + 5k \end{array}$$

$$\xrightarrow{11|11b} 11|5k - 3 \xrightarrow{\text{عدد گذاری}} k_{min} = 5$$

۱۴ - گزینه ۲ ماتریس A را می سازیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1-2^2 & 1-3^2 & 1-4^2 \\ 2+1 & 2+2 & 2-3^2 & 2-4^2 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3-4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 & -15 \\ 3 & 4 & -7 & -14 \\ 4 & 5 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a_{13} = -8 \\ a_{32} = 5 \end{array} \rightarrow a_{12} + a_{32} = -8 + 5 = -3$$

۱۵ - گزینه ۲

روش اول:

$$\text{گزینه ۱: } a^6|b^3 \Rightarrow a \times a^3|b^3 \Rightarrow a^3|b^3 \Rightarrow a|b \Rightarrow a^5|b^5$$

$$\text{گزینه ۳: } a^6|b^3 \Rightarrow a^{20}|b^{15} \Rightarrow a \times a^{19}|b^{15} \Rightarrow a^{19}|b^{15}$$

$$\text{گزینه ۴: } a|b \Rightarrow a^6|b^6 \Rightarrow a^6|b^7$$

اما رابطه گزینه ۲ در حالت کلی نادرست است مثلاً اگر $a = 8$ و $b = 16$ آنگاه $b^3 = 16^3 = 2^{12}$ ، $a^4 = 8^4 = 2^{12}$ ولی $a^3 = 8^3 = 2^9$ و $a^4|b^3$ است پس $a^4|b^3$ ولی $a^3 = 8^3 = 2^9$



$$a^3/b^2 \text{ است پس } b^2 = 16^2 = 2^8$$

روش دوم: اگر $a^m|b^n$ و بخواهیم بررسی نماییم $a^x|b^y$ ، اگر $\left| \frac{m}{x} \frac{n}{y} \right| \geq 0$ رابطه $a^x|b^y$ صحیح است وگرنه نادرست می‌باشد.

$$a^x|b^y \xrightarrow{\text{بررسی گزینه‌ها}} \begin{cases} \text{گزینه ۱: } \left| \frac{4}{5} \frac{3}{5} \right| = 4 \times 5 - 5 \times 3 > 0 \quad \checkmark \\ \text{گزینه ۲: } \left| \frac{4}{3} \frac{3}{2} \right| = 4 \times 2 - 3 \times 3 = -1 < 0 \quad \times \\ \text{گزینه ۳: } \left| \frac{4}{19} \frac{3}{15} \right| = 4 \times 15 - 19 \times 3 = 60 - 57 > 0 \quad \checkmark \\ \text{گزینه ۴: } \left| \frac{4}{6} \frac{3}{7} \right| = 4 \times 7 - 6 \times 3 = 28 - 18 > 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

۱۶ - گزینه ۲

$$A = [a_{ij}]_{(m-1) \times (n+2)} \quad , \quad B = [b_{ij}]_{(m+3) \times (2n-1)}$$

برای اینکه حاصل ضرب AB تعریف شده باشد، باید داشته باشیم:

$$n+2 = m+3$$

همچنین حاصل ضرب AB از مرتبه زیر خواهد بود:

$$(m-1) \times (2n-1) = 5 \times (p+3) \rightarrow m-1 = 5 \rightarrow m = 6$$

$$n+2 = m+3 \xrightarrow{m=6} n+2 = 6+3 \rightarrow n = 7$$

$$2n-1 = p+3 \xrightarrow{n=7} p = 10 \rightarrow m+n+p = 6+7+10 = 23$$

۱۷ - گزینه ۳

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} x^2 + 10 \\ -4x \end{bmatrix}_{2 \times 1} = 0$$

$$\rightarrow -x^2 - 10 - 8x = 0 \rightarrow x^2 + 8x + 10 = 0$$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{b}{a} = -8 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 64 - 20 = 44 \\ P &= \frac{c}{a} = 10 \end{aligned}$$

۱۸ - گزینه ۳ با کمی تحقیق می‌بینیم که $B^2 = B$ ، پس $B^n = B$ و در حالت کلی داریم:

$$\begin{aligned} (B+I)^6 &= \binom{6}{0} B^6 + \binom{6}{1} B^5 + \binom{6}{2} B^4 + \dots + \binom{6}{6} I \\ &= \binom{6}{0} B + \binom{6}{1} B + \binom{6}{2} B + \dots + \binom{6}{5} B + I \\ &= \left(\binom{6}{0} + \dots + \binom{6}{5} \right) B + 6I = (2^6 - 1)B + 6I = 63B + I \\ B^2 &= B \Rightarrow B^2(B+I)^6 = B(63B + I) = 63B^2 + B = 63B + B = 64B \end{aligned}$$

۱۹ - گزینه ۲ ماتریس‌های A^3 و B^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \xrightarrow{\times A} A^3 = A^2 = A \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} A^4 = A^3 = A$$

$$B = I - 2A \Rightarrow B^2 = I - 4A + \underbrace{4A^2}_{4A} = I \Rightarrow B^2 = I \Rightarrow B^4 = (B^2)^2 \times B = I \times B = B$$

$$\Rightarrow A^4 - B^4 = A - B = A - (I - 2A) = 3A - I$$

۲۰ - گزینه ۴ اگر x عددی صحیح باشد آنگاه تنها در صورتی $! \nmid$ نیز عددی صحیح خواهد بود که صورت کسر بر مخرج کسر بخش پذیر باشد. بنابراین:



$$y = \frac{3x - 1}{x + 2}$$

$$x + 2 \mid 3x - 1, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + 2 \mid 3x - 1 \\ x + 2 \mid x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 \mid 3x - 1 \\ x + 2 \mid 3x + 6 \end{cases} \Rightarrow x + 2 \mid 7$$

$$\Rightarrow x + 2 = -7 \text{ یا } -1 \text{ یا } 1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 5$$

$$\Rightarrow x = -9 \text{ یا } -3 \text{ یا } 1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 5$$

a	-3	-1	-9	5
b	10	-4	4	2

۲۱ - گزینه ۴ اگر سرعت اولیه را v_0 و سرعت در نیمه مسیر را v_1 و سرعت در انتهای مسیر را v_2 فرض کنیم، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v_1^2 - v_0^2 = 2a\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow v_1^2 - 0 = ax \\ v_2^2 - v_1^2 = 2a\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = ax \end{cases} \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 - v_1^2$$

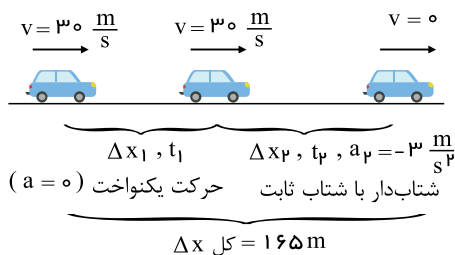
$$\Rightarrow 2v_1^2 = v_2^2 \Rightarrow \sqrt{2}v_1 = v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۲۲ - گزینه ۳

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow 0 - 12 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = -6 m/s$$

با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t = 4$ است، سرعت در $t = 8s$ ، هم‌اندازه سرعت در لحظه صفر است، پس: $v = +6 m/s$

۲۳ - گزینه ۴ در مدت زمان واکنش راننده (t_1) متحرک با سرعت ثابت ($v = 10 \frac{km}{h} = 30 \frac{m}{s}$) حرکت می‌کند و در مدت زمان ترمز (t_2) اتومبیل با شتاب ثابت (کندشونده) حرکت می‌کند.



ابتدا جابه‌جایی متحرک در مرحله دوم را با استفاده از رابطه $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ محاسبه می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 900 = 2(-3)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 150 m$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 165 m \Rightarrow \Delta x_1 + 150 = 165 \Rightarrow \Delta x_1 = 15 m$$

$$\Delta x_1 = vt_1 \Rightarrow 15 = 30t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} s$$

برای محاسبه زمان حرکت متحرک در مرحله دوم از معادله $v = at + v_0$ استفاده می‌کنیم.

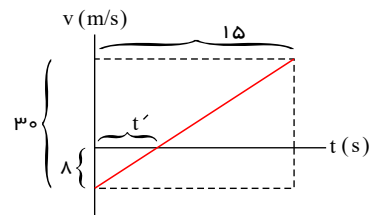
$$v = a_2 t_2 + v_0 \xrightarrow[v_0 = 30]{v = 0} 0 = (-3)t_2 + 30 \Rightarrow t_2 = 10 s$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \text{ برابر است با: } \frac{t_2}{t_1}$$

۲۴ - گزینه ۴ در ابتدا لحظه تلاقی نمودار با محور زمان (t') که همان لحظه تغییر جهت نیز هست را می‌یابیم.

توجه: برای یافتن t' چندین روش وجود دارد. مثلاً می‌توان از قضیه تالس هم کمک گرفت (یا از شیب خط استفاده کرد).

$$\frac{t'}{15} = \frac{8}{30} \rightarrow \boxed{t' = 4 s}$$

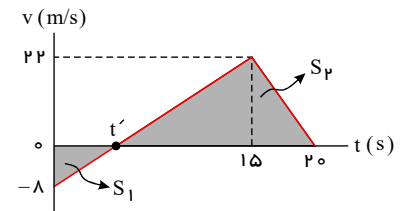


قدرمطلق سطح زیر نمودار $v - t$ ، برابر مسافت پیموده شده است.

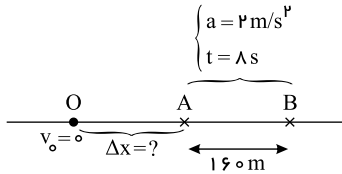


$$\frac{t'}{8} = \frac{15 - t'}{22} \Rightarrow t' = 4s$$

$$\left. \begin{aligned} |S_1| &= \frac{8 \times 4}{2} = 16 \\ S_2 &= \frac{22 \times (20 - 4)}{2} = 176 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مسافت کل}} 16 + 176 = 192m$$



۲۵ - گزینه ۲ در ابتدا با توجه به معلوم بودن زمان جابه‌جایی، شتاب و مقدار جابه‌جایی AB ، سرعت در نقطه A را می‌یابیم



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_A t \rightarrow 160 = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(8)^2 + v_A(8) \rightarrow v_A = 12\left(\frac{m}{s}\right)$$

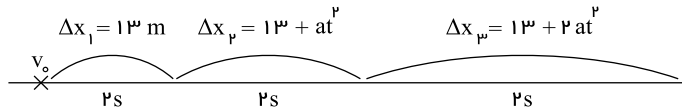
حال با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) بین دو نقطه O و A داریم:

$$v_A^2 - v_o^2 = 2a(\Delta x) \xrightarrow{v_o=0} (12)^2 - 0 = (2)(2)\Delta x \rightarrow \Delta x_{OA} = 36m$$

۲۶ - گزینه ۱

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت در ابتدا یک خط راست، جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، تشکیل یک دنباله با قدر نسبت at^2 می‌دهند. به عبارتی داریم:



$$\Delta x_3 = 13 + 2at^2 \xrightarrow[t=2s]{\Delta x_3=25m} 25 = 13 + 8a \rightarrow a = 1.5 \frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t$$

$$t = 2s \Rightarrow \Delta x(\text{دو ثانیه اول}) = 2a + 2v_o = 13 \Rightarrow a + v_o = 6.5(I)$$

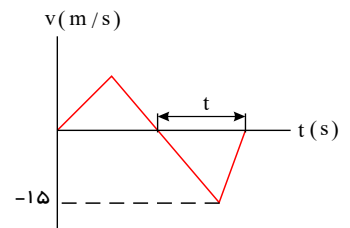
$$\begin{cases} t = 4s \Rightarrow \Delta x_4 = 8a + 4v_o \\ t = 6s \Rightarrow \Delta x_6 = 18a + 6v_o \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x(\text{دو ثانیه سوم}) = \Delta x_6 - \Delta x_4 = 10a + 2v_o = 25 \Rightarrow 5a + v_o = 12.5(II)$$

$$I, II \Rightarrow 4a = 12.5 - 6.5 \Rightarrow a = 1.5 \frac{m}{s^2}$$

۲۷ - گزینه ۲ با توجه به نمودار اگر به اندازه t ثانیه جسم در خلاف جهت محور x حرکت کند، داریم:

$$|\Delta x| = S = \frac{15 \times t}{2} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{2}{t} = 7.5 \frac{m}{s}$$



۲۸ - گزینه ۱ معادله مکان - زمان درجه ۲ برحسب زمان است، بنابراین حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. (مشابه کتاب درسی از مشتق کمک نمی‌گیریم.)



$$\begin{cases} x = 2t^2 + 4t - 8 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = +4 \\ v_0 = +4 \end{cases} \rightarrow v = at + v_0 = 4t + 4$$

مشخص است که $v \neq 0$ یعنی متحرک بر خط راست، بدون تغییر جهت است.

$$\frac{L}{|\Delta x|} = 1 \quad \text{بنابراین:}$$

۲۹ - گزینه ۲ در حرکت با شتاب ثابت در مسیر مستقیم، داریم:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \frac{22 - (-18)}{4} = \frac{v_1 + 16}{2} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

حال با استفاده از معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v - v_0 = at \Rightarrow \frac{v_2 - v_1}{v_2 - v_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0} \Rightarrow \frac{16 - 4}{16 - v_0} = \frac{4}{6} \Rightarrow v_0 = -2 \text{ m/s}$$

۳۰ - گزینه ۴ طبق رابطه شتاب:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \Rightarrow 4 = \frac{25 - v_1}{6} \Rightarrow 24 = 25 - v_1 \Rightarrow v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۳۱ - گزینه ۲ در لحظه سبقت، مکان دو متحرک یکسان و برابر ۷۵ متر است، پس معادله حرکت هریک را می نویسیم و با هم مساوی قرار می دهیم

$$\begin{cases} A: v_A = a_A t + v_{0A} = 1.5t, \text{ و } x_A = \frac{1}{2} \times 1.5t^2 = 0.75t^2 \\ B: v_B = a_B t + v_{0B} = a_B t \text{ و } x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 - 75 \end{cases}$$

$$x_A = x_B = 75 \begin{cases} x_A = 0.75t^2 = 75 \rightarrow \boxed{t = 10 \text{ s}} \text{ در لحظه سبقت} \\ x_B = \frac{1}{2}a_B \times 10^2 - 75 = 75 \rightarrow a_B = 3 \text{ m/s}^2 \end{cases} \rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{3 \times 10}{1.5 \times 10} = 2$$

۳۲ - گزینه ۳ بررسی عبارت‌ها:

(آ) نادرست؛ اتیلن گلیکول دارای فرمول شیمیایی $C_2H_6O_2$ است.

(ب) درست؛ به جز نمک خوراکی بقیه در هگزان حل می شود. چون بنزین، وازلین و روغن زیتون همگی غیرقطبی هستند و در حلال غیرقطبی هگزان حل می شوند.

(پ) نادرست؛ در ساختار لوویس باید جفت الکترون‌های ناپیوندی نیز نمایش داده شود.

N یک جفت و O دو جفت الکترون ناپیوندی دارند.

(ت) درست؛ تعداد هیدروژن در وازلین ۵۲ و در روغن زیتون ۱۰۴ است.

۳۳ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: درست. با توجه به

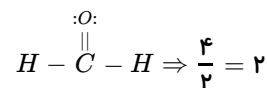
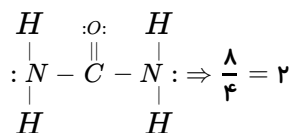
گزینه ۲: درست. $58 - 56 = 2g$ تفاوت جرم مولی $\Rightarrow C_4H_8 = 56$ بوتن، $C_3H_6O = 58$ استون

گزینه ۳: درست. $62 - 60 = 2g$ تفاوت جرم مولی $\Rightarrow C_2H_6O_2 = 62$ اتیلن گلیکول، $CO(NH_2)_2 = 60$ اوره

گزینه ۴: درست.

گزینه ۵: نادرست. طول زنجیر هیدروکربنی ساختار داده شده کم است و نمی تواند صابون باشد.

گزینه ۶: درست.



۳۴ - گزینه ۳ عبارت‌های الف، پ و ت درست هستند.

ترکیب داده شده مربوط به یک استر است که به دلیل غلبه بخش ناقطبی بر بخش قطبی در آن، در آب نامحلول است و در حلال‌های ناقطبی مانند بنزین حل می شود.

۳۵ - گزینه ۲ فرمول استر موردنظر $C_{57}H_{110}O_6$ می باشد.

ابتدا واکنش را نوشته و موازنه می کنیم:



جرم مولی اسید چرب و استر داده شده را محاسبه می کنیم. جرم مولی اسیدچرب، ۲۸۴ گرم بر مول و جرم مولی استر، ۸۹۰ گرم بر مول می باشد.



$$\text{اسید چرب} = ۳۸۳۴g = \frac{۲۸۴g \text{ چرب}}{۱mol \text{ اسید چرب}} \times \frac{۳mol \text{ چرب}}{۱mol \text{ اسید}} \times \frac{۱mol}{۸۹۰g \text{ استر}} \times \frac{۱۰۰g \text{ استر}}{۱kg \text{ استر}} \times ۵,۳۴kg \text{ استر} = \text{اسید چرب گرم اسید چرب?}$$

بازده ۱۰۰

۳۶ - گزینه ۲

فرمول مولکولی اتیلن گلیکول $C_2H_6O_2$

فرمول مولکولی اوره $CO(NH_2)_2$

$$?molatom = ۱gC_2H_6O_2 \times \frac{۱molC_2H_6O_2}{۶۲gC_2H_6O_2} \times \frac{۱۰molatom}{۱molC_2H_6O_2} = \frac{۱۰}{۶۲} = ۰,۱۶mol atom$$

$$?molatom = ۱gCO(NH_2)_2 \times \frac{۱molCO(NH_2)_2}{۶۰gCO(NH_2)_2} \times \frac{۸molatom}{۱molCO(NH_2)_2} = \frac{۸}{۶۰} = ۰,۱۳mol atom$$

تعداد مول اتم‌های موجود در یک گرم اتیلن گلیکول بیشتر از اوره است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱) گرد و غبار هوا و لکه‌های چربی هر دو نمونه‌هایی از آلاینده‌ها هستند.

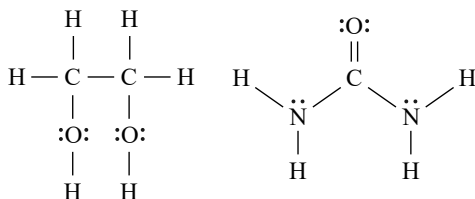
گزینه ۳) با شستن غسل توسط آب، آب نقش حلال را دارد. هنگامی که غسل وارد آب می‌شود؛ مولکول‌های سازنده آن با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار می‌کنند و در سرتاسر آن پخش می‌شوند.

گزینه ۴) اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی هستند و چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیره هستند.

۳۷ - گزینه ۳ اتیلن گلیکول به دلیل داشتن پیوند $O - H$ و اوره به دلیل داشتن پیوند $N - H$ می‌تواند با مولکول‌های خود و یا با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱) اتیلن گلیکول دارای دو گروه هیدروکسیل است و اوره چهار جفت الکترون ناپیوندی دارد.



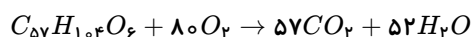
گزینه ۲) روغن زیتون با فرمول مولکولی $C_{57}H_{114}O_6$ دارای ۳ نوع عنصر است و وازلین با فرمول مولکولی $C_{25}H_{52}$ دارای ۲ نوع عنصر است و وازلین در دسته آلکان‌ها طبقه‌بندی می‌شود. فرمول عمومی آلکان‌ها C_nH_{2n+2} است.

گزینه ۴) وازلین و بنزین (C_8H_{18}) هر دو هیدروکربن هستند و گشتاور دوقطبی آن‌ها حدود صفر است.

۳۸ - گزینه ۳ بررسی موارد درست:

مورد آ: تعداد کربن‌های وازلین ($C_{25}H_{52}$) در فرمول مولکولی آن بیش‌تر از بنزین (C_8H_{18}) است؛ بنابراین گران‌روی بیش‌تری داشته و هر دو نیز در هگزان محلول هستند. چون تمام هیدروکربن‌ها ناقطبی هستند.

مورد پ:

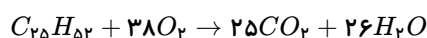


$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع ضرایب فراورده‌ها}}{\text{مجموع ضرایب واکنش‌دهنده}} = \frac{۱۰۹}{۸۱}$$

بررسی موارد نادرست:

مورد ب: چون تعداد کربن‌ها در یک مولکول گریس ($C_{18}H_{38}$) بیش‌تر از بنزین (C_8H_{18}) است، فرار بودن آن از بنزین کم‌تر است. گریس و روغن زیتون هر دو در آب نامحلول هستند.

مورد ت: حجم هوای مورد نیاز برای سوختن ۱ مول وازلین حدود ۵ برابر اکسیژن مورد نیاز آن است. پس جمله نادرست است.



$$\text{لازم} = ۸۵۱,۲LO_2 = \frac{۲۲,۴LO_2}{۱mol O_2} \times \frac{۳۸mol O_2}{۱mol \text{ وازلین}} \times ۱mol \text{ وازلین}$$

$$\text{حجم هوای لازم} = ۸۵۱,۲L \times \frac{۱۰۰}{۲۱}$$

۳۹ - گزینه ۴ بررسی موارد نادرست:



مورد آ) لکهٔ غسل به راحتی با آب شسته می‌شود؛ زیرا حاوی مولکول‌های قطبی است که در ساختار خود شمار زیادی گروه هیدروکسیل دارند.
مورد ب) $CH_3(CH_2)_2COO^-K^+$ را نمی‌توان به صابون مایع نسبت داد. (به دلیل کم بودن شمار اتم‌های کربن زنجیرهٔ هیدروکربنی).
مورد پ) شیر، ژله و سس مایونز مخلوط‌هایی ناهمگن هستند (کلویید) که نور را پخش می‌کنند.
مورد ث) برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی مواد شوینده به آن‌ها نمک‌های فسفات می‌افزایند.
۴۰ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) هر دو مولکول حاوی H متصل به عناصر N یا O هستند.
گزینهٔ ۲) اتیلن گلیکول (ضد یخ) یک الکل دو عاملی $HO-CH_2-CH_2-OH$ است.
گزینهٔ ۳) در اسیدهای چرب ($RCOOH$)، زنجیرهٔ R طولانی بوده و بخش ناقطبی غالب است که باعث می‌شود ماده در آب نامحلول باشد.
گزینهٔ ۴) فرمول روغن زتون به صورت $C_{57}H_{114}O_6$ می‌باشد.
۴۱ - گزینه ۱ تمام عبارت‌ها درست‌اند.

مورد الف) اوره و غسل برخلاف بنزین ترکیب‌هایی قطبی هستند؛ پس در آب حل می‌شوند.

مورد ب) فرمول عمومی صابون‌های جامد $RCOONa$ و فرمول عمومی صابون‌های مایع $RCOOK$ و $RCOONH_4$ می‌باشد. در صورت برابر بودن تعداد اتم‌های کربن زنجیر آلکیل، اختلاف جرم مولی صابون‌ها مربوط به جرم مولی کاتیون موجود در آنها می‌شود. اگر کاتیون موجود در صابون مایع، K باشد، جرم مولی صابون مایع از صابون جامد بیشتر می‌شود.
مورد پ) اگر مقداری صابون به مخلوط آب و روغن اضافه کنید، مخلوطی از نوع کلویید ایجاد می‌شود. کلوییدها را می‌توان همانند پلی میان محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها در نظر گرفت.
مورد ت) ژله و شیر هر دو کلویید هستند. ذره‌های موجود در کلوییدهای درشت‌تر از محلول‌اند و به همین دلیل نور را پخش می‌کنند.