پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴ هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}>۱ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۱>۰ \Rightarrow \frac{x-۴}{x+۱}>۰ \rightarrow$$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
	+	ن ت	−	۰	+		

$$\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۴$$

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۳<۰ \Rightarrow \frac{-x-۶}{x+۱}<۰ \rightarrow$$

x	$-\infty$		-۶		-۱		$+\infty$
	−	۰	+	ن ت	−		

$$\Rightarrow x<-۶ \text{ یا } x>-۱ \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x>۴$ یا $x<-۶$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ است.

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ برای این منظور باید نامعادلهٔ $-x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x+|x|$ را حل کنیم.

$$x\geq ۰ \rightarrow -x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x+x \rightarrow x^۲+\frac{۷}{۲}x-\frac{۹}{۲}<۰$$

x	$-\infty$		$-\frac{۹}{۲}$		۱		$+\infty$
عبارت <۰		+	۰	−	۰	+	

$$\rightarrow \frac{-۹}{۲}<x<۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۰\leq x<۱ \qquad (I)$$

$$x<۰ \rightarrow -x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۹}{۲}>۲x-x \rightarrow x^۲+\frac{۳}{۲}x-\frac{۹}{۲}<۰$$

x	$-\infty$		-۳		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
عبارت <۰		+	۰	−	۰	+	

$$\rightarrow -۳<x<\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۳<x<۰ \qquad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $-۳<x<۱$ می‌رسیم که طول نقطهٔ وسط بازهٔ $\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$ است.

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها $x=-۲$ و $x=\frac{۱}{۲}$ هستند.

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۲x-۱$		−		−	۰	+	
$x+۲$		−	۰	+		+	

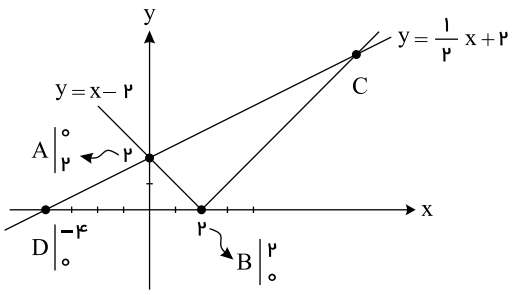
$$x<-۲ \Rightarrow -۲x+۱-x-۲=۳ \Rightarrow -۳x=۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \text{ غ ق ق}$$

$$-۲\leq x\leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲x+۱+x+۲=۳ \Rightarrow -x=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ ق ق}$$

$$x>\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x-۱+x+۲=۳ \Rightarrow ۳x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳} \text{ ق ق}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = ۰+\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴ دو تابع $y=|x-۲|=\sqrt{(x-۲)^۲}=\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ را رسم می‌کنیم.



نقطهٔ C محل برخورد شاخهٔ $y = x - ۲$ با خط $y = \frac{۱}{۲}x + ۲$ است:

$$\frac{۱}{۲}x + ۲ = x - ۲ \Rightarrow x = ۸ \ , \ y = ۶ \Rightarrow C \left| \begin{matrix} ۸ \\ ۶ \end{matrix} \right.$$

پس مساحت مثلث ABC (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BDC}} - S_{\overset{\Delta}{ABD}}$$
$$= (\frac{۱}{۲}BD \times y_c) - (\frac{۱}{۲}BD \times y_A) = \frac{۱}{۲}BD(y_C - y_A)$$
$$= \frac{۱}{۲}(۲ - ۴)(۶ - ۲) = ۱۲$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{x^۴ - ۲x^۳ + x^۲}{x^۲ - ۵x + ۶} \le ۰ \Rightarrow \frac{x^۲(x^۲ - ۲x + ۱)}{(x - ۳)(x - ۲)} \le ۰ \Rightarrow \frac{x^۲(x - ۱)^۲}{(x - ۳)(x - ۲)} \le ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ (x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ (x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ (x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \end{cases} \Rightarrow$$

	۰		۱		۲		۳	
$x^۲$	+	○	+		+		+	
$(x-۱)^۲$	+		+	○	+		+	
$(x-۳)$	−		−		−		−	○	+
$(x-۲)$	−		−		−	○	+	
$\frac{x^۲(x-۱)^۲}{(x-۳)(x-۲)}$	+	○	+	○	+	ن‌ت	−	ن‌ت	+

$x \in \{۰, ۱\} \cup (۲, ۳)$: ۱ عدد طبیعی

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ برای حل نامعادلهٔ $|A| < B$ باید نامعادلهٔ $-B < A < B$ را حل کنیم.

$$|x^۲ - ۴x| < ۲x + ۱ \rightarrow -۲x - ۱ < x^۲ - ۴x < ۲x + ۱$$

$$I: \ -۲x - ۱ < x^۲ - ۴x \rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ > ۰ \rightarrow (x - ۱)^۲ > ۰ \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{۱\} \quad (I)$$

$$II: \ x^۲ - ۴x < ۲x + ۱ \rightarrow x^۲ - ۶x - ۱ < ۰ \rightarrow (x - ۳)^۲ - ۹ - ۱ < ۰ \rightarrow (x - ۳)^۲ < ۱۰$$

$$\rightarrow -\sqrt{۱۰} < x - ۳ < \sqrt{۱۰} \rightarrow ۳ - \sqrt{۱۰} < x < ۳ + \sqrt{۱۰} \quad (II)$$

$$I \cap II \rightarrow x \in \left(۳ - \sqrt{۱۰}, ۳ + \sqrt{۱۰}\right) - \{۱\} \rightarrow \begin{cases} a = ۳ - \sqrt{۱۰} \\ b = ۳ + \sqrt{۱۰} \\ c = ۱ \end{cases}$$

پس: $b - a + c = ۳ + \sqrt{۱۰} - ۳ + \sqrt{۱۰} + ۱ = ۲\sqrt{۱۰} + ۱$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$||x - ۱| - ۳| < ۴ \Rightarrow -۴ < |x - ۱| - ۳ < ۴$$

$\underbrace{-۱ < |x-۱|}_{\text{همواره برقرار}} < ۷ \Rightarrow |x-۱| < ۷ \Rightarrow -۷ < x-۱ < ۷$

$-۶ < x < ۸$

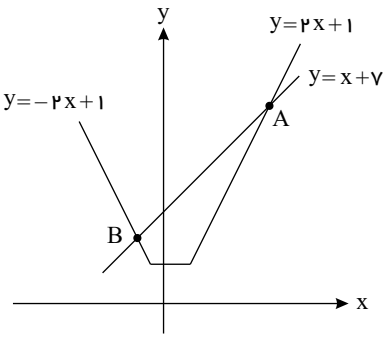
بنابراین اعداد صحیح $\pm۵, \pm۴, \pm۳, \pm۲, \pm۱, ۰, ۶$ و ۷ در نامعادله صدق می‌کنند که مجموع آنها ۱۳ است.

۸ ۱ ۲ ۳ **۴** تابع $y = |x-۲| + |x+۱|$ یک تابع گلدانی است که به‌ازای $x < -۱$ اکیداً نزولی و به‌ازای $x > ۲$ اکیداً صعودی و در فاصلهٔ $-۱ \le x \le ۲$ ثابت است.

$x < -۱ : y = -x + ۲ - x - ۱ \to y = -۲x + ۱$

$-۱ \le x \le ۲ : y = -x + ۲ + x + ۱ \to y = ۳$

$x > ۲ : y = x - ۲ + x + ۱ \to y = ۲x - ۱$

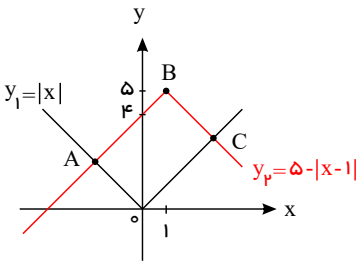


$\begin{cases} y = ۲x - ۱ \\ y = x + ۷ \end{cases} \to x = ۸ , y = ۱۵ \to A \begin{vmatrix} ۸ \\ ۱۵ \end{vmatrix} , \begin{cases} y = -۲x + ۱ \\ y = x + ۷ \end{cases} \to x = -۲ , y = ۵ \to B \begin{vmatrix} -۲ \\ ۵ \end{vmatrix}$

پس: $AB = \sqrt{(۸+۲)^۲ + (۱۵-۵)^۲} = \sqrt{۱۰۰ + ۱۰۰} = \sqrt{۲۰۰} = ۱۰\sqrt{۲}$

۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تا شکل ناحیهٔ محدود مشخص شود.



با توجه به شکل، ناحیهٔ محدود به دو تابع یک مستطیل است که برای محاسبهٔ مساحت آن باید ابتدا نقاط برخورد آنها را بیابیم:

$y_۱ = y_۲ \Rightarrow |x| = ۵ - |x-۱|$

$\Rightarrow \begin{cases} C \text{ نقطهٔ } \xrightarrow{x>۱} x = ۵ - (x-۱) \to x = ۳ \Rightarrow C(۳,۳) \\ A \text{ نقطهٔ } \xrightarrow{x<۰} -x = ۵ + (x-۱) \to x = -۲ \Rightarrow A(-۲,-۲) \end{cases}$

$OC = \sqrt{(۳)^۲ + (۳)^۲} = \sqrt{۱۸}, OA = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۸}$

$S = \text{عرض} \times \text{طول} = \sqrt{۱۸} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$

۱۰ ۱ **۲** ۳ ۴ بر اساس ریشهٔ داخل قدر مطلق که $x = ۲$ است بازه‌بندی انجام می‌دهیم:

$(I) \quad x > ۲ \Rightarrow x - ۲ > ۰ \Rightarrow |x-۲| = x - ۲$

$x^۲ - ۲x < |x-۲| \Rightarrow x^۲ - ۲x < x - ۲ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ < ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲) < ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$

x		۱		۲	
(x-۱)(x-۲)	+	۰	-	۰	+

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x \ge ۲ \\ ۱ < x < ۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} \varnothing$

$(II) \quad x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \Rightarrow |x-۲| = -(x-۲)$

$x^۲ - ۲x < |x-۲| \to x^۲ - ۲x < -(x-۲) \Rightarrow x^۲ - ۲x < -x + ۲ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ < ۰$

$\Rightarrow (x+۱)(x-۲) < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$

x		-۱		۲	
$(x+۱)(x-۲)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$\Rightarrow \begin{cases} x < ۲ \\ -۱ < x < ۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۱ < x < ۲$

$I \cup II : (-۱, ۲) \cup \varnothing = (-۱, ۲)$

(۱۱) ماتریس $A^۲$ را یافته و در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

روش اول:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha+\beta & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \beta = ۱۳ \end{cases}$$

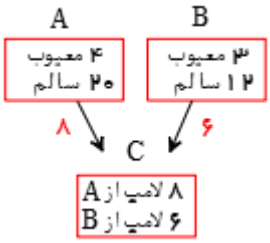
روش دوم: (نکته) هر ماتریس ۲×۲ مانند A در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ - (a+d)A + |A| I = \overline{O}$$

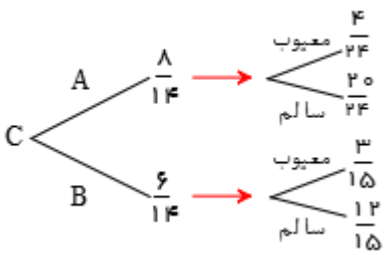
$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ - ۲A - ۱۳I = \overline{O} \Rightarrow A^۲ = ۲A + ۱۳I \Rightarrow \alpha = ۲, \beta = ۱۳$$

(۱۲)

احتمال آنکه لامپی از C برداشته شود و متعلق به A باشد برابر $\frac{۸}{۱۴}$ و متعلق به B باشد $\frac{۶}{۱۴}$ است.



دقت: احتمال معیوب بودن را باید از ظروف A و B محاسبه کنیم.



$$P(\text{معیوب}) = \frac{۸}{۱۴} \times \frac{۴}{۲۴} + \frac{۶}{۱۴} \times \frac{۳}{۱۵}$$

$$P(\text{معیوب}) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱۹}{۱۰۵}$$

(۱۳)

B: پیشامد آنکه عدد انتخابی مضارب ۷ باشد A: پیشامد آنکه عدد انتخابی مضارب ۶ باشد

$$\text{جواب} = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$$

$$= \frac{\left(\left[\frac{۳۰۰}{۶}\right] - \left[\frac{۵۰}{۶}\right]\right) + \left(\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right] - \left[\frac{۵۰}{۷}\right]\right) - ۲\left(\left[\frac{۳۰۰}{۴۲}\right] - \left[\frac{۵۰}{۴۲}\right]\right)}{۲۵۰}$$

$$= \frac{۵۰ - ۸ + ۴۲ - ۷ - ۱۴ + ۲}{۲۵۰} = \frac{۲۶}{۱۰۰}$$

(۱۴) ابتدا ماتریس $A^۲$ را یافته و از روی آن ماتریس‌های $A^۶$ و $A^۷$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{cases} A^۷ = (A^۲)^۳ \cdot A = (I)^۳ \cdot A = I \cdot A = A \\ A^۶ = (A^۲)^۳ = (I)^۳ = I \end{cases}$$

$$A^۷ - A^۶ = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

(۱۵) می‌دانیم مجموع احتمال‌ها برابر با ۱ است:

می‌دانیم: $P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$$x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(\text{رقم تاس بزرگ‌تر از ۳})=P(۴)+P(۵)+P(۶)=۳x+x+۳x=۷x=\frac{۷}{۱۲}$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند احتمال وقوع پیشامد B به‌شرط آنکه A اتفاق افتاده باشد از دستور $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ حاصل می‌شود.

B: پیشامد شرکت کردن بهروز در مسابقهٔ علمی ، A: پیشامد شرکت کردن امیر در مسابقهٔ علمی

طبق فرض $P(A)=۰/۶$، $P(B)=۰/۳$ و $P(A|B)=۰/۵$ است پس:

$$P(A|B)=۰/۵ \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰/۵ \Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\times ۰/۵=۰/۳\times ۰/۵=۰/۱۵$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{۱-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}=\frac{۰/۶-۰/۱۵}{۱-۰/۳}=\frac{۰/۴۵}{۰/۷}=\frac{۴۵}{۷۰}=\frac{۹}{۱۴}$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B) \Rightarrow ۰/۲=۰/۶-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴$$
$$P(A'\cap B)=P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=۰/۷-۰/۴ \Rightarrow P(A'\cap B)=۰/۳$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ دترمینان موردنظر را توسط دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۴ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۵ & ۳ & ۰ \\ -۲ & ۶ & ۱ & -۲ & ۶ \end{vmatrix}=(۰+۱۰+۷۲)-(-۳+۶۰+۰)=۲۵$$

دو ستون اول

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ حاصل دترمینان را با بسط دادن نسبت به سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۰ & x-۳ & x-۲ \\ x+۳ & ۰ & -۴ \\ x+۲ & ۶ & ۰ \end{vmatrix}=-(x-۳)(۴x+۸)+(x-۲)(۶x+۱۸)=۰$$

$$\Rightarrow -۴x^۲-۸x+\cancel{۱۲x}+۲۴+۶x^۲+۱۸x-\cancel{۱۲x}-۳۶=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۱۰x-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲+۵x-۶=۰ \Rightarrow x=۱, x=-۶$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ برای به دست آوردن سطراول $A^۲$ کافی است سطراول A را در ستون‌های ماتریس A ضرب کنیم:

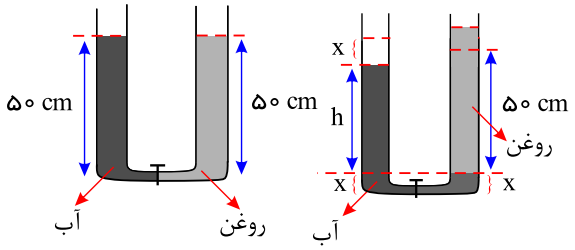
$$A^۲ \text{ سطراول}=[۲\ \ ۱\ \ ۵]\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=[۶\ \ ۲\ \ ۲۴]$$

برای به دست آوردن سطر اول $A^۳$ کافی است سطراول $A^۲$ را در ستون‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$A^۳ \text{ سطراول}=[۶\ \ ۲\ \ ۲۴]\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=[۳۰\ \ ۶\ \ ۸۶]$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ با باز شدن شیر ارتباط به دلیل اینکه چگالی آب بیشتر از چگالی نفت است، سطح آب در لولهٔ سمت چپ پایین‌تر از سطح نفت در لولهٔ سمت راست قرار می‌گیرد.

لذا با انتخاب سطح ترازی مناسب و با استفاده از اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، ارتفاع h را محاسبه می‌کنیم:



$$P_{\text{آب}}=P_{\text{روغن}}$$
$$\rho_{\text{آب}}gh_{\text{آب}}=\rho_{\text{روغن}}gh_{\text{روغن}} \rightarrow \rho_{\text{آب}}h_{\text{آب}}=\rho_{\text{روغن}}h_{\text{روغن}}$$
$$\rightarrow ۱۰۰۰\times h_{\text{آب}}=۸۰۰\times ۵۰ \rightarrow h_{\text{آب}}=۴۰cm$$
$$h_{\text{آب}}+۲x=۵۰ \rightarrow ۴۰+۲x=۵۰ \rightarrow x=۵cm$$

بنابراین سطح آب در لولهٔ سمت چپ $۵cm$ پایین می‌آید.

۲۲ ۱ ۲ ۳ **۴** فشار وارد از طرف مایعات به کف ظرف، برابر مجموع فشار ناشی از ستون هریک از مایعات می‌باشد. پس در ابتدا فشار ناشی از مایعات را می‌یابیم:

$$P_T = P_{\text{آب}} + P_{\text{روغن}} \Rightarrow P_T = (\rho gh)_{\text{آب}} + (\rho gh)_{\text{روغن}}$$
$$\Rightarrow P_T = (۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۱) + (۸۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۰۵) \Rightarrow P_T = ۱۰۰۰ + ۴۰۰ \Rightarrow P_T = ۱۴۰۰Pa$$

نیروی وارد بر هر سطحی از رابطهٔ $F = P \cdot A$ قابل محاسبه است، بنابراین داریم:

$$F_T = P_T \times A \Rightarrow F_T = ۱۴۰۰ \times ۵۰ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow F_T = ۷(N)$$

دقت کنید که سطح مقطع استوانهٔ روغن تأثیری در حل مسئله ندارد، زیرا فشار را روی سطح مقطع $۵۰cm^۲$ می‌خواهیم.

۲۳ ۱ ۲ ۳ **۴** در ابتدا، با معلوم بودن حداکثر نیروی وارد بر کف از طرف مایع، حداکثر ارتفاع ستون جیوه را محاسبه می‌کنیم. سپس میزان ستونی که مجاز به افزودن است را می‌یابیم:

$$F_{max_{\text{مایع}}} = P_{max_{\text{مایع}}} \times A \Rightarrow F_{max_{\text{مایع}}} = \rho g h_{max} \times A \Rightarrow ۱۳۵ = ۱۳۵۰۰ \times ۱۰ \times h_{max} \times (۲۰ \times ۱۰^{-۴})$$
$$\Rightarrow h_{max} = ۰/۵m = ۵۰cm \Rightarrow \Delta h = ۵۰ - ۴۰ = ۱۰cm$$

۲۴ ۱ ۲ **۳** ۴ قدم اول: ابتدا جرم مکعب را می‌یابیم. اگر مکعب توپر باشد:

$$\begin{cases} V = (۱۰cm)^۳ = ۱۰۰۰cm^۳ \\ \rho = ۸\dfrac{g}{cm^۳} \end{cases} \Rightarrow m = \rho V = ۸\frac{g}{cm^۳} \times ۱۰۰۰cm^۳ \Rightarrow m = ۸۰۰۰g = ۸kg \rightarrow m = ۸kg \quad (۱)$$

قدم دوم: جرمی که مکعب در حال حاضر دارد، m' است؛ بنابراین:

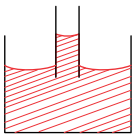
$$\begin{cases} P = \dfrac{m'g}{A} = \dfrac{m' \times ۱۰}{۱۰^{-۲}} = ۷۸۰۰Pa \\ A = ۱۰cm \times ۱۰cm = ۱۰۰cm^۲ = ۱۰^{-۲}m^۲ \end{cases} \rightarrow m' = ۷/۸kg \quad (۲)$$

قدم سوم: از مقایسهٔ m و m' درمی‌یابیم که این مکعب حتماً دارای حفره بوده، چون $m' < m$ است.

قدم چهارم: حجم حفره همان حجم جرم ناپدید شده است:

$$\Delta m = m - m' = ۸ - ۷/۸ = ۰/۲kg \rightarrow \Delta V = \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{۰/۲kg}{۸۰۰۰\frac{kg}{m^۳}} = ۲/۵ \times ۱۰^{-۵}m^۳$$

۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴ اگر نیروی دگرچسبی بیشتر از نیروی هم‌چسبی باشد، (مایع‌تر) مانند آب، سطح مایع درون لوله از سطح آزاد مایع بالاتر می‌رود (خاصیت موئینگی) و همچنین سطح آن فرورفتگی دارد.



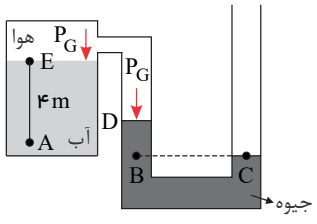
۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا حجم کرهٔ توپر به شعاع $۵cm$ را به‌دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rightarrow V = \frac{۴}{۳} \times \pi \times (۵)^۳ = \frac{۵۰۰}{۳}\pi cm^۳$$

حال با استفاده از رابطهٔ چگالی می‌توانیم جرم کره را به‌دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow ۶(\frac{g}{cm^۳}) = \frac{m}{\frac{۵۰۰}{۳}\pi(cm^۳)} \rightarrow m = ۱۰۰۰\pi(g) = \pi(kg) \rightarrow m = ۳/۱۴kg$$

۲۷ ۱ **۲** ۳ ۴ اگر فشار هوای محبوس در بالای مخزن را P_G بنامیم، باتوجه به برابر بودن فشار در نقاط هم‌سطح از یک مایع، خواهیم داشت: (سعی می‌کنیم که P_G را در معادلات حذف کنیم.)



$$P_B = P_C P_G + DB \text{ فشار ستون} = P_\circ$$
$$\rightarrow P_G = P_\circ - \rho_{Hg} g h_{DB}$$
$$P_A = P_G + \rho_{H_۲O} \cdot g \cdot h_{EA} \xrightarrow{(۱)} P_A = P_\circ - \rho_{Hg} g h_{DB} + \rho_{H_۲O} g h_{EA} \rightarrow$$
$$P_A = ۱۰^۵ - ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۱۵ + ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۴$$
$$P_A = ۱۱۹۶۰۰Pa = ۱۱۹/۶kPa$$

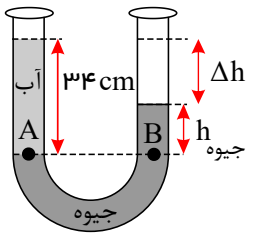
۲۸ ۱ ۲ **۳** ۴ دو نقطهٔ هم‌تراز M و N در یک مایع (جیوه) را مشخص می‌کنیم و می‌دانیم، $P_M = P_N$، بنابراین داریم:

$$P_M = P_N \Rightarrow P_A + (\rho gh)_{\text{آب}} = (\rho gh)_{\text{جیوه}} + P_\circ \Rightarrow P_A + ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۰/۲ = ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۵ + ۱۰^۵$$
$$\Rightarrow P_A + ۲ \times ۱۰^۳ = ۶۸ \times ۱۰^۳ + ۱۰^۵ \Rightarrow P_A + ۲ \times ۱۰^۳ = ۱۶۸ \times ۱۰^۳$$
$$\Rightarrow P_A = ۱۶۶ \times ۱۰^۳ \Rightarrow P_A = ۱۶۶kPa$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ **۴** فشار در نقاط A و B برابر است و می‌توان نوشت:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\circ} + (\rho gh)_{\text{آب}} = P_{\circ} + (\rho gh)_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{(\rho h)_{\text{آب}}}{\rho_{\text{جیوه}}} = \frac{۳۴ \times ۱}{۱۳/۶} = ۲/۵cm$$



بنابراین اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه از لوله برابر است با:

$$\Delta h = h_{\text{آب}} - h_{\text{جیوه}} = ۳۴ - ۲/۵ = ۳۱/۵cm$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴ گام اول: جرم جسم $۱۱/۵g$ است.

$$m = ۱۱/۵g = ۱۱/۵ \times ۱۰^{-۳}kg$$

گام دوم: حجم جسم برابر مقدار افزایش حجم مایع بالاآمدهٔ درون اُستوانه می‌باشد:

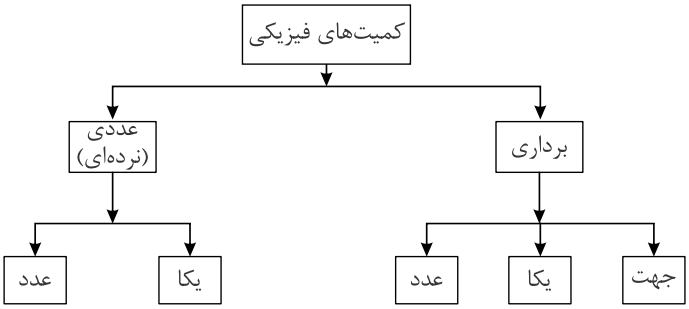
$$V = ۲۳/۱mL - ۱۸/۵mL = ۴/۶mL = ۴/۶ \times ۱۰^{-۳}L = ۴/۶ \times ۱۰^{-۶}m^۳$$

گام سوم:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{۱۱/۵ \times ۱۰^{-۳}kg}{۴/۶ \times ۱۰^{-۶}m^۳} = ۲۵۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به اثر مویینگی در این مایع می‌توان نتیجه گرفت مایع تمایل به چسبیدن به دیواره‌های شیشه‌ای دارد، زیرا نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و مولکول‌های شیشه بیشتر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع است.

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴ کمیت‌های عددی (نرده‌ای) را با عدد و یکای مناسب بیان می‌کنند و کمیت‌های برداری را با عدد، یکای مناسب و جهت بیان می‌نمایند.



۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر حجم کل مخلوط را V فرض کنیم، $V_۱ = \frac{۱}{۳}V$ و $V_۲ = \frac{۲}{۳}V$ است، بنابراین با استفاده از رابطهٔ چگالی مخلوط (آلیاژ) داریم:

$$\text{چگالی مخلوط } \rho = \frac{m_۱ + m_۲}{V_۱ + V_۲} = \frac{\rho_۱V_۱ + \rho_۲V_۲}{V} = \frac{\rho_۱ \times \frac{۱}{۳}V + \rho_۲ \times \frac{۲}{۳}V}{V}$$

$$\Rightarrow \text{مخلوط } \rho = \frac{\rho_۱ + ۲\rho_۲}{۳} \Rightarrow ۴ = \frac{\rho_۱ + ۲ \times ۲}{۳}$$

$$\rightarrow ۱۲ = \rho_۱ + ۴ \rightarrow \rho_۱ = ۸\frac{g}{cm^۳}$$

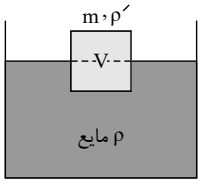
۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴ با استفاده از معادلهٔ پیوستگی داریم: (D قطر مقطع لوله است)

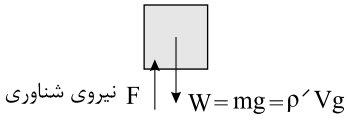
$$v_AA_A = v_BA_B \xrightarrow{A=\frac{\pi D^۲}{۴}}$$

$$v_AD_A^۲ = v_BD_B^۲ \xrightarrow{D_A=۲D_B} ۴v_A\cancel{D_B^۲} = v_B\cancel{D_B^۲} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{۱}{۴}$$

۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴ یک جسم شناور بر سطح مایع را در نظر بگیریم؛ به فرض: جرم جسم m، چگالی جسم ρ'، حجم کل جسم V و حجمی از جسم که داخل مایع قرار می‌گیرد V_x است.

چون جسم در حال تعادل است:





$$\rightarrow F = \underbrace{\rho'Vg}_{\text{جسم}} \Rightarrow \rho V_x g \Rightarrow \rho V_x = \rho' V \Rightarrow \frac{V_x}{V} = \frac{\overset{\text{جسم}}{\overset{\uparrow}{\rho'}}}{\underset{\text{مایع (که ثابت است)}}{\underset{\downarrow}{\rho}}}$$

هرچه جسم بیشتر در مایع فرو رفته باشد، نسبت $\frac{V_x}{V}$ ($\frac{\text{حجم فرورفته در مایع}}{\text{کل حجم جسم}}$) آن بیشتر شده؛ درنتیجه $\frac{\rho'}{\rho}$ نیز بیشتر خواهد شد. (چون ρ ثابت است؛ با افزایش کسر $\frac{\rho'}{\rho}$، صورت کسر یعنی چگالی جسم (ρ') بیشتر خواهد بود.) طبق شکل داده شده، از نظر مقدار فرو رفتگی در مایع: $a_2 > a_3 > a_1$ پس: $\rho_2 > \rho_3 > \rho_1$ (مقدار فرو رفتگی هر جسم نسبت به کل حجم همان جسم در نظر گرفته می‌شود.)

۳۶ ۱ ۲ **۳** ۴

$$Mg^{2+}, N^{3-}: \quad Mg_3N_2$$
$$K^+, O^{2-}: \quad K_2O$$
$$Ba^{2+}, S^{2-}: \quad BaS$$

۳۷ ۱ **۲** ۳ ۴ عبارت‌های اول، سوم و پنجم درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول:

$$\frac{(n+l)_{4d}}{(n+l)_{3s}} = \frac{4+2}{3+0} = 2$$

عبارت دوم:

$${}^{140}_{58}Z^{3+} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 140 - 58 = 82 \\ e^- = p - 3 = 58 - 3 = 55 \\ p = z = 58 \end{array} \right\} \rightarrow n - e^{-=82-55=27}$$

عبارت سوم:

$${}_{26}D: 1s^2 2s^2 \underline{2p^6} 3s^2 \underline{3p^6} \underline{3d^6} 4s^2$$

عبارت چهارم:

$${}_{33}A: [{}_{18}Ar] 3d^{10} \underbrace{4s^2 4p^3}_{\text{۵ الکترون ظرفیت}}$$

$${}_{24}A: [{}_{18}Ar] \underbrace{3d^5 4s^1}_{\text{۶ الکترون ظرفیت}}$$

عبارت پنجم: مجموع $(n+l)$ زیرلایهٔ 4s کمتر از مجموع $(n+l)$ زیرلایهٔ 3d است؛ در نتیجه زودتر الکترون اشغال می‌شود.

۳۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$?molFe = 11{,}2gFe \times \frac{1molFe}{56g\,Fe} = 0{,}2mol\ Fe$$
$$?molCu = 0{,}64gCu \times \frac{1molCu}{64gCu} = 0{,}01mol\ Cu$$
$$\Rightarrow \frac{molFe}{mol\,Cu} = \frac{0{,}2}{0{,}01} = 20$$

۳۹ ۱ **۲** ۳ ۴ عبارت‌های (آ)، (ب) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ت) حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را هلیم تشکیل می‌دهد.

ث) هلیم نیز مانند آرگون در جوشکاری کاربرد دارد.

۴۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

۱ mol H_2 = ۲g = ۶٫۰۲ × 10^{23} ذره

$$3g\,H_2 \times \frac{6{,}02 \times 10^{23} H_2 \text{ مولکول}}{2g\,H_2} = 9{,}03 \times 10^{23} H_2 \text{ مولکول} \Rightarrow x = 9{,}03$$

۴۱ ۱ ۲ ۳ **۴** آ)

$$2{,}7g\ Al \times \frac{1molAl}{27g\ Al} = 0{,}1molAl \qquad 2gAr \times \frac{1mol\ Ar}{40g\ Ar} = 0{,}05mol\ Ar$$

بنابراین تعداد مول‌های Al دو برابر Ar است.

ب) هر چقدر جرم مولی یک عنصر کمتر باشد، در a گرم از آن تعداد اتم بیشتری وجود دارد؛ بنابراین برای این‌که a گرم سدیم تعداد اتم بیشتری داشته باشد، پس عنصر دیگر باید جرم مولی بیشتری داشته باشد که پتاسیم است.

پ)

$$4molC \times \frac{12gC}{1molC} = 48gC$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ **۴** معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش داده شده به‌صورت زیر است:

$$P_4 + 10H_2SO_4 \rightarrow 4H_3PO_4 + 10SO_2 + 4H_2O \qquad 18 - 11 = 7$$

۴۳ ۱ ۲ ۳ **۴** عبارت‌های «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

«آ»: جرم پروتون و نوترون تقریباً برابر هم و در حدود $1amu$ می‌باشد اما جرم نوترون اندکی بیشتر است.

«پ»: هیچ ترازویی امکان اندازه‌گیری دقیق جرم اتم‌ها و مولکول‌ها را ندارد.

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴ تنها مورد «ب» نادرست است.

عنصر $B(_{14}Si)$ دومین عنصر گروه ۱۴ جدول تناوبی است. در مورد عبارت اول دقت کنید که به رنگ شعلهٔ فلز A (سدیم) زرد است. از طرفی در انتقال $n=5 \rightarrow n=2$ در اتم هیدروژن، نوری به رنگ نیلی منتشر می‌شود. طول‌موج رنگ زرد بلندتر از رنگ نیلی است.

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴ فقط نام‌های CO_2 (کربن دی‌اکسید) و SO_3 (گوگرد تری‌اکسید) صحیح هستند.

نام صحیح موارد دیگر عبارت‌اند از:

N_2O_3 : دی‌نیتروژن تری‌اکسید

PCl_3 : فسفر تری‌کلرید

P_2O_5 : دی‌فسفر پنتااکسید

در نام‌گذاری ترکیبات مولکولی علاوه بر نام عناصر، تعداد آن‌ها را نیز با استفاده از پیشوند قبل از نامشان بیان می‌کنیم، و فقط از آوردن لفظ «مونو» در ابتدای یک نام خودداری می‌کنیم.