پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم، برای این کار معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۰,۴)$ و $(۲,۰)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۰,۴)$ و $(-۴,۰)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$(۰,۴),(۲,۰) \Rightarrow \frac{y-۴}{x} = \frac{۴}{-۲} = -۲ \rightarrow y = -۲x + ۴$$

$$(۰,۴),(-۴,۰) \Rightarrow \frac{y-۴}{x} = \frac{۴}{۴} = ۱ \rightarrow y = x + ۴$$

$$f(x) = \begin{cases} x+۴ & x < ۰ \\ -۲x+۴ & x \geq ۰ \end{cases} \quad , \quad g(x) = \sqrt{۲ - |f(x)|} \Rightarrow ۲ - |f(x)| \geq ۰ \Rightarrow |f(x)| \leq ۲$$

$$\Rightarrow -۲ \leq f(x) \leq ۲$$

$$x < ۰ \Rightarrow -۲ \leq x+۴ \leq ۲ \Rightarrow -۲-۴ \leq x \leq ۲-۴ \Rightarrow -۶ \leq x \leq -۲ \xrightarrow{x<۰} -۶ \leq x \leq -۲ \quad (۱)$$

$$x \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq -۲x+۴ \leq ۲ \Rightarrow -۶ \leq -۲x \leq -۲ \xrightarrow{\div(-۲)} ۳ \geq x \geq ۱ \xrightarrow{x\geq ۰} ۱ \leq x \leq ۳ \quad (۲)$$

جواب نهایی : $(۱) \cup (۲) \Rightarrow [-۶,-۲] \cup [۱,۳]$

۲ ـ گزینه ۴

> زمانی رابطه‌ای به شکل زوج مرتب تابع است که تمام زوج‌های مرتب آن مؤلفه‌های اول متفاوت داشته باشند
>
> یا اگر مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب یکسان بود مؤلفه‌های دومشان نیز باهم برابر باشند

$$\begin{cases} (۳, m^۳ - m) \\ (۳,۰) \end{cases} \Rightarrow m^۳ - m = ۰ \Rightarrow m(m^۲-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \quad I \\ m^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \quad II \\ m = -۱ \quad III \end{cases} \end{cases}$$

با فرض I:

$$m = ۰ \Rightarrow \begin{cases} (-۳m, m) = (۰,۰) \\ (۲m, ۲) = (۰,۲) \\ (m,۳) = (۰,۳) \end{cases} \Rightarrow m \neq ۰$$

فرض II:

$$m = ۱ \Rightarrow \begin{cases} (۱,-۲) = (۱,-۲) \\ (m,۳) = (۱,۳) \end{cases} \Rightarrow m \neq ۱$$

فرض III:

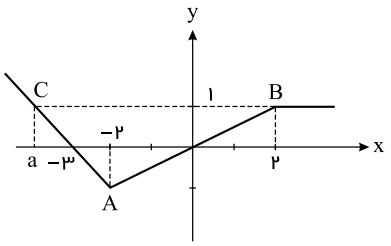
$$m = -۱ \Rightarrow \begin{cases} (-۳m, m) = (۳,-۱) \\ (۳,۰) \end{cases} \Rightarrow m \neq -۱$$

پس گزینه‌ی ۴ درست است و هیچ مقداری برای m نیست تا f تابع شود.

۳ ـ گزینه ۳

دامنهٔ تابع g مجموعهٔ اعدادی هستند که در نامعادلهٔ $۱ - f(x) > ۰$ صدق می‌کنند.

بنابراین $f(x) < ۱$.



مطابق شکل بالا مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ بالا بازهٔ $(a,۲)$ است. برای پیدا کردن a توجه کنید که معادلهٔ خط شامل پاره‌خط AB به‌صورت $y = \frac{۱}{۲}x$ است، پس $y_A = \frac{۱}{۲}(-۲) = -۱$ خواهد بود. پس خط شامل پاره‌خط AC از نقطه‌های $(-۱,-۲)$ و $(-۳,۰)$ عبور می‌کند و معادلهٔ آن به‌صورت $y = -x - ۳$ است. پس:

$$\begin{cases} y_C = ۱ \\ x_C = a \end{cases} \Rightarrow ۱ = -a - ۳ \Rightarrow a = -۴$$

بنابراین دامنهٔ g بازهٔ $(-۴,۲)$ است که پنج عدد صحیح ۱ و ۰ و ۱− و ۲− و ۳− در آن قرارادارند.

۴ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & x\notin\mathbb{Z}\\ ۰ & x\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow g(f(x)):\begin{cases}x\notin\mathbb{Z}: & g(-۱)=۱-۱-۲=-۲\\ x\in\mathbb{Z}: & g(۰)=-۲\end{cases}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

۵ ـ گزینه ۲ ابتدا زوج مرتب $۲f$ و $f+g$ و fog را می‌یابیم.

برای محاسبه‌ی $۲f$ باید مؤلفه‌ی دوم f را در ۲ ضرب کنیم.

$$۲f=\{(۲,۲),(۱,۱۲),(۴,۱۲)\}$$

برای محاسبه‌ی $f+g$ باید زوج مرتب‌های $۲f$ ، g که مؤلفه‌ی اول برابر دارند، مؤلفه‌ی دوم آن‌ها را باهم جمع کنیم.

$$۲f+g=\{(۲,۶),(۱,۱۴)\}$$

برای محاسبه‌ی زوج مرتب fog، از تعریف تابع fog استفاده می‌کنیم.

$$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$$
$$D_g\to g(x)\to f(x)$$
$$\left.\begin{array}{l}۱\to ۲\to ۱\\ ۲\to ۴\to ۶\\ ۶\to ۱\to ۶\end{array}\right\}\Rightarrow fog=\{(۱,۱),(۲,۶),(۶,۶)\}$$
$$\Rightarrow\frac{۲f+g}{fog}=\left\{(۱,\frac{۱۴}{۱}),(۲,\frac{۶}{۶})\right\}=\{(۱,۱۴),(۲,۱)\}$$

۶ ـ گزینه ۱

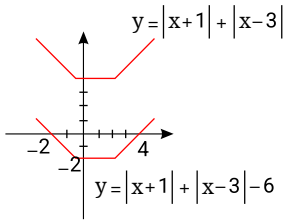
ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلق را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\\ x-۳=۰\Rightarrow x=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}I)\ x<-۱\Rightarrow y=\sqrt{-(x+۱)-(x-۳)-۶}\Rightarrow y=\sqrt{-۲x-۴}\Rightarrow -۲x-۴\geq ۰\Rightarrow x\leq -۲\\ II)\ -۱<x<۳\Rightarrow y=\sqrt{(x+۱)-(x-۳)-۶}\Rightarrow y=\sqrt{-۲}\text{ غ ق ق}\\ III)\ x>۳\Rightarrow y=\sqrt{x+۱+x-۳-۶}\Rightarrow y=\sqrt{۲x-۸}\Rightarrow ۲x-۸\geq ۰\Rightarrow x\geq ۴\\ IV)\ x=-۱\Rightarrow y=\sqrt{-۲}\text{ غ ق ق}\\ V)\ x=۳\Rightarrow y=\sqrt{-۲}\text{ غ ق ق}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ از ۵ مورد بالا اشتراک می‌گیریم $\Rightarrow D=\mathbb{R}-(-۲,۴)$

روش دوم: هندسی: تابع $y=|x+۱|+|x-۳|$ یک نمودار گلدانی به‌صورت زیر است:



$$D=(-\infty,-۲]\cup[۴,+\infty)=\mathbb{R}-(-۲,۴)$$

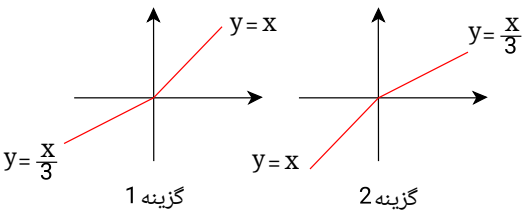
۷ ـ گزینه ۴ توجه کنید که $f(-۱)=۰$، $f(۲)=۲$ و $f(۰)=۲$. پس:

$$(fof)(۲)+(fof)(-۱)=f(f(۲))+f(f(-۱))=f(۲)+f(۰)=۲+۲=۴$$

۸ ـ گزینه ۳ برای بیان تابع نبودن یک رابطه، ارائه یک مثال نقض کافیست اما برای اثبات تابع بودن یک رابطه باید با استفاده از تعریف (از تساوی $x_۱=x_۲$ بتوان تساوی $y_۱=y_۲$ را نتیجه گرفت) و با رسم نمودار آن را اثبات کرد. تابع بودن رابطهٔ $\sqrt{x}=\sqrt{y}-y$ را می توان با مثال نقض زیر رد کرد:

$$x=۰\Rightarrow y-\sqrt{y}=۰\Rightarrow y=\sqrt{y}\Rightarrow\begin{cases}y=۰\\ y=۱\end{cases}$$

روابط گزینه‌های (۱) و (۲) را می‌توان رسم کرد و تابع بودن آن‌ها را اثبات کرد.



در گزینهٔ (۴) نیز داریم:

$$y+\sqrt{y}+\frac{۱}{۴}=\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}\Rightarrow(\sqrt{y}+\frac{۱}{۲})^{۲}=\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}$$

تابع است:

$$\Rightarrow\sqrt{y}+\frac{۱}{۲}=\sqrt{\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}}\Rightarrow y=(\sqrt{\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}$$

۹ ـ گزینه ۳ می‌دانیم:

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$$

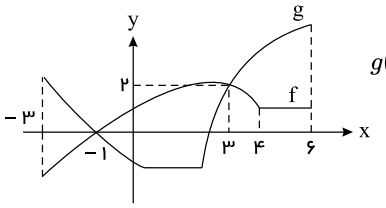
$$D_{fog}=\{x|-۴\le x\le ۴\ ,\ ۲\le|x-۱|\le ۴\}$$

$$۲\le|x-۱|\le ۴\Rightarrow\begin{cases}۲\le x-۱\le ۴\Rightarrow ۳\le x\le ۵\\ \text{یا}\\ -۴\le x-۱\le -۲\Rightarrow -۳\le x\le -۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=[-۴,۴]\cap([-۳,-۱]\cup[۳,۵])$$
$$=([-۴,۴]\cap[-۳,-۱])\cup([-۴,۴]\cap[۳,۵])$$
$$=[-۳,-۱]\cup[۳,۴]=[-۳,۴]-(-۱,۳)$$

۱۰ ـ گزینه ۴

نمودار توابع f و g در یک دستگاه مختصات به‌صورت زیر است:



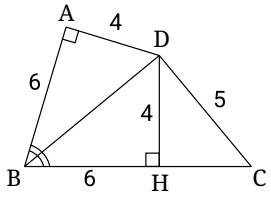
$$g(x)-f(x)>۰\Rightarrow g(x)>f(x)$$

جواب نامعادلهٔ فوق، محدوده‌ای است که نمودار g بالاتر از نمودار f قرار دارد. طبق شکل فوق داریم:

$$-۳\le x<-۱\ \text{یا}\ ۳<x\le ۶\Rightarrow D_h=[-۳\ ,\ -۱)\cup(۳\ ,\ ۶]$$

۱۱ ـ گزینه ۳ از D بر BC عمود می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویه ABC قرار دارد. پس:

$$\begin{cases}DH=AD=۴\\ BH=AB=۶\end{cases}$$



در مثلث قائم‌الزاویه DHC بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$HC=\sqrt{۵^{۲}-۴^{۲}}=۳\Rightarrow BC=BH+HC=۶+۳=۹$$

۱۲ ـ گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: اولین عدد را x می‌نامیم:

$$\frac{x+(x+۱)+(x+۲)+(x+۳)+(x+۴)}{۵}=\frac{۵x+۱۰}{۵}=x+۲\rightarrow\ \text{عدد وسطی}\ \checkmark$$

گزینه «۲»: مثال نقض می‌زنیم، اگر $p=۱$ باشد، آن‌گاه $۵=۲+۱\times ۳$ اول است، اما p اول نیست.

گزینه «۳»:

$$\text{همه اعداد صحیح}\begin{cases}۳k\rightarrow\ \text{اول نیست.}\\ \left.\begin{matrix}۳k+۱\\ ۳k+۲\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{بزرگ‌تر از ۳}]{\text{همه اعداد اول}}\begin{cases}p=۳k+۱\rightarrow p^{۲}=۹k^{۲}+۶k+۱=۳(۳k^{۲}+۲k)+۱=۳k'+۱\\ p=۳k+۲\rightarrow p^{۲}=۹k^{۲}+۱۲k+۴=۳(۳k^{۲}+۴k+۱)+۱=۳k'+۱\end{cases}\end{cases}$$

یعنی باقیمانده تقسیم مربع همه اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ بر ۳، برابر یک است.

گزینه «۴»: حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیر صفر در عدد گنگ برابر با عددی گنگ است. پس اگر x گنگ باشد و $\frac{۱}{x}$ بخواهد گویا باشد حاصل‌ضرب x در $\frac{۱}{x}$ عددی گنگ می‌شود. در حالی که می‌دانیم حاصل‌ضرب عددی گویا است (یک عددی گویا است) پس $\frac{۱}{x}$ باید گنگ باشد.

۱۳ - گزینه ۳ گزینه‌ها را یک به یک بررسی می‌کنیم. گزینهٔ اول: اولین عدد را a در نظر می‌گیریم:

$$\text{میانگین پنج عدد متوالی} = \frac{a+(a+۱)+(a+۲)+(a+۳)+(a+۴)}{۵}$$

$$= \frac{۵a+۱۰}{۵} = a+۲ \rightarrow \text{این همان عدد وسطی است}$$

این گزاره به ازای هر a برقرار است در نتیجه این گزاره کلاً درست است.

گزینهٔ دوم: اولین عدد را a می‌نامیم:

$$a(a+۱)=k \Rightarrow ۴k+۱ = ۴a(a+۱)+۱ = ۴a^۲+۴a+۱ \xrightarrow{\text{از اتحاد مربع استفاده می‌کنیم}} ۴k+۱=(۲a+۱)^۲$$

مربع کامل شد، پس این گزینه هم کلاً درست است.

گزینهٔ سوم: این گزاره مثال نقض دارد. مثلاً ۲ را نمی‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت. می‌توان ۲ + ۰ نوشت که در این صورت متوالی نیست و ۰ هم طبیعی نیست یا اینکه می‌توان ۱ + ۱ نوشت که در این صورت هم متوالی نیست.

گزینهٔ چهارم: اگر n زوج باشد $n^۲$ و $۵n$ زوج هستند. می‌دانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد زوج، زوج است پس $n^۲-۵n$ هم زوج است و حاصل جمع و تفریق عدد زوج و فرد، فرد است پس $n^۲-۵n+۷$ فرد است. اگر n فرد باشد می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد فرد، فرد است پس $n^۲$ هم فرد و $۵n$ هم فرد است. می‌دانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد فرد، زوج است پس $n^۲-۵n$ زوج است و حاصل جمع یک عدد زوج با عدد فرد ۷ هم در نهایت فرد می‌شود. پس این گزاره کلاً درست است.

۱۴ - گزینه ۱ اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ فرد باشد، پس هر سه عامل $(a_۱-b_۱)$ و $(a_۲-b_۲)$ و $(a_۳-b_۳)$ هم باید فرد باشند و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳)$ باید عددی فرد باشد، اما مجموع این ۳ عبارت صفر است! زیرا $a_۱+a_۲+a_۳=b_۱+b_۲+b_۳$ است، پس عبارت همواره زوج است.

۱۵ - گزینه ۱ ماتریس $A^۲$ را می‌سازیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} \tan x & ۱ \\ -\frac{۱}{\cos^۲ x} & -\tan x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tan x & ۱ \\ -\frac{۱}{\cos^۲ x} & -\tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^۲ x - \frac{۱}{\cos^۲ x} & \tan x - \tan x \\ -\frac{\tan x}{\cos^۲ x}+\frac{\tan x}{\cos^۲ x} & -\frac{۱}{\cos^۲ x}+\tan^۲ x \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x}$$

$$A^۲ = \begin{bmatrix} \tan^۲ x-(۱+\tan^۲ x) & ۰ \\ ۰ & -(۱+\tan^۲ x)+\tan^۲ x \end{bmatrix} \rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

$$A^۵ - A^۶ + A^۷ = (A^۲)^۲ \times A - (A^۲)^۳ + (A^۲)^۳ \times A = A + I - A = I$$

۱۶ - گزینه ۴ ضرب ماتریسی را از سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$[x \quad ۱ \quad ۰]_{۱\times ۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} = [x-۱ \quad x+۱ \quad -۱]$$

$$[x-۱ \quad x+۱ \quad -۱]\begin{bmatrix} -x \\ ۱ \\ x \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow -x^۲+x+x+۱-x=۰ \Rightarrow -x^۲+x+۱=۰ \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌ها}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۱ \\ \alpha^۲=\alpha+۱, \beta^۲=\beta+۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)+۲=۳$$

۱۷ - گزینه ۲

باتوجه به فرض داریم:

$$B^۲=B \xrightarrow{\text{ماتریس } B \text{ خود توان است.}} B^n=B \ (n\in\mathbb{N}, n\geq ۲)$$

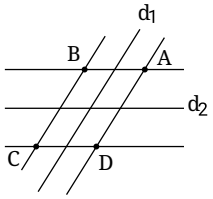
عبارت موردنظر برابر می‌شود با:

$$B^۳+A^۳-(B^۴-I) = B+(۳B-I)^۳-(B-I) = B+(۲۷B^۳-۲۷B^۲I+۹BI^۲-I)-(B-I)$$

$$= B+(\cancel{۲۷B}-\cancel{۲۷B}+۹B-I)-(B-I) = \cancel{B}+۹B-\cancel{I}-\cancel{B}+\cancel{I} = ۹B$$

۱۸ ـ گزینه ۴

نقاطی از صفحه که از یک خط به فاصلهٔ مشخصی هستند. دو خط به موازات آن و در دو طرف خط مفروض می‌باشند. دو خط متقاطع d_1 و d_2 را در نظر می‌گیریم و دو خط به موازات هر یک، به فاصلهٔ $2cm$ از آن‌ها رسم می‌کنیم. نقاط برخورد آن‌ها (نقاط A, B, C و D) جواب‌های مسأله می‌باشند.



۱۹ ـ گزینه ۲

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}\geq\frac{b+a}{ab}\xrightarrow{\times a^2b^2}$$

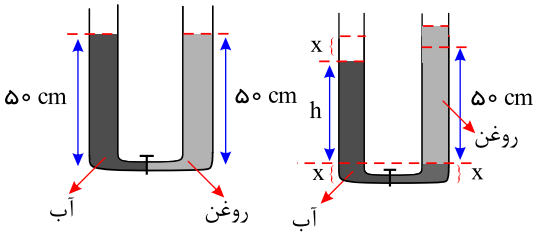
$$a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow(a+b)(a^2-ab+b^2)\geq ab(a+b)\overset{\div(a+b)}{\Leftrightarrow}$$

$$a^2-ab+b^2\geq ab\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$$ همیشه درست

۲۰ ـ گزینه ۲

$$x^2+y^2+z^2\geq -xy+xz-yz\overset{\times 2}{\Leftrightarrow}2x^2+2y^2+2z^2\geq -2xy+2xz-2yz\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+2xy-2xz+2yz\geq 0$$
$$\Leftrightarrow(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2+2yz+z^2)\geq 0\Leftrightarrow(x+y)^2+(x-z)^2+(y+z)^2\geq 0$$ همواره درست است

۲۱ ـ گزینه ۲ با باز شدن شیر ارتباط به دلیل اینکه چگالی آب بیشتر از چگالی نفت است، سطح آب در لولهٔ سمت چپ پایین‌تر از سطح نفت در لولهٔ سمت راست قرار می‌گیرد. لذا با انتخاب سطح ترازی مناسب و با استفاده از اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، ارتفاع h را محاسبه می‌کنیم:



$$P_{آب}=P_{روغن}$$
$$\rho_{آب}gh_{آب}=\rho_{روغن}gh_{روغن}\rightarrow\rho_{آب}h_{آب}=\rho_{روغن}h_{روغن}$$
$$\rightarrow 1000\times h_{آب}=800\times 50\rightarrow h_{آب}=40cm$$
$$h_{آب}+2x=50\rightarrow 40+2x=50\rightarrow x=5cm$$

بنابراین سطح آب در لولهٔ سمت چپ $5cm$ پایین می‌آید.

۲۲ ـ گزینه ۳

معادلهٔ مستقل از شتاب : $\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 0-12=\frac{0+v_0}{2}\times 4\Rightarrow v_0=-6m/s$

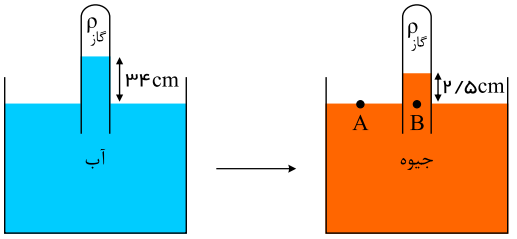
با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t=4$ است، سرعت در $t=8s$، هم‌اندازهٔ سرعت در لحظهٔ صفر است، پس: $v=+6m/s$

۲۳ ـ گزینه ۲ در ابتدا ارتفاع ستون جیوه‌ای که فشاری معادل ستون ۳۴ سانتی‌متری آب ایجاد می‌کند را می‌یابیم.

$$h_{cmHg}=\frac{\rho h}{13/6}$$

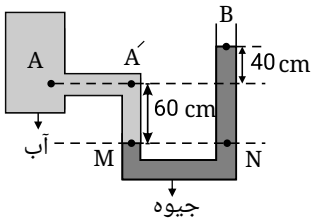
$$h_{cmHg}=\frac{34}{13/6}=2/5cmHg$$

حال با توجه به نقاط هم‌تراز A و B داریم:



$$P_A = P_B \to P_\circ = h_{CmHg} + P_{\text{گاز}} \to P_\circ = ۲/۵ + ۷۲ \to P_\circ = ۷۴/۵ CmHg$$
$$P_{\text{گاز}} = P_{\circ\,\text{هوا}} + h_{CmHg}$$

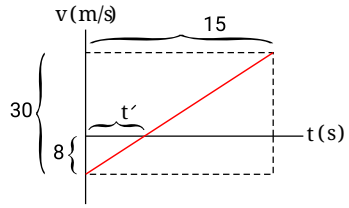
۲۴ ـ گزینه ۳ با انتخاب نقاط هم‌تراز M و N و مساوی قرار دادن فشار این نقاط داریم:



$$P_M = P_N \Rightarrow P_{A'} + \rho_{\text{آب}} \cdot g \cdot (h_{A'M}) = P_\circ + \rho_{\text{جیوه}} \cdot g \cdot (h_{BN})$$
$$\xrightarrow{P_{A'}=P_A} P_A + \underbrace{(۱۰۰۰ \times ۱۰ \times \frac{۶}{۱۰})}_{۶۰۰۰Pa} = P_\circ + \underbrace{(۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۱)}_{۱۳۶۰۰۰Pa}$$
$$\Rightarrow P_A - P_\circ = ۱۳۶۰۰۰ - ۶۰۰۰ = ۱۳۰۰۰۰Pa = ۱۳۰kPa$$

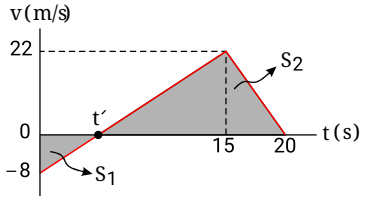
۲۵ ـ گزینه ۴ در ابتدا لحظه تلاقی نمودار با محور زمان (t') که همان لحظهٔ تغییر جهت نیز هست را می‌یابیم.

توجه: برای یافتن t' چندین روش وجود دارد. مثلاً می‌توان از قضیهٔ تالس هم کمک گرفت (یا از شیب خط استفاده کرد.)



$$\frac{t'}{۱۵} = \frac{۸}{۳۰} \to \boxed{t' = ۴s}$$

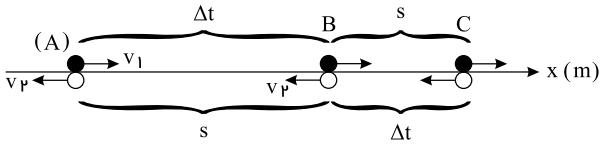
قدرمطلق سطح زیر نمودار $v-t$، برابر مسافت پیموده شده است.

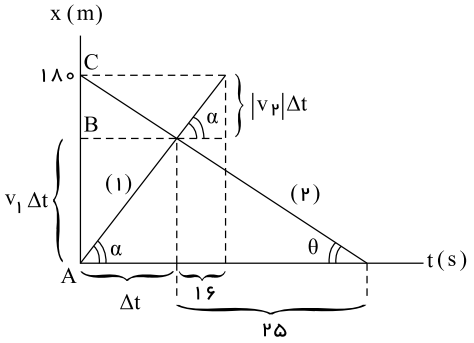


$$\frac{t'}{۸} = \frac{۱۵ - t'}{۲۲} \Rightarrow t' = ۴s$$
$$\left.\begin{aligned} |S_۱| &= \frac{۸\times۴}{۲} = ۱۶ \\ S_۲ &= \frac{۲۲\times(۲۰-۴)}{۲} = ۱۷۶ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{مسافت کل}} ۱۶ + ۱۷۶ = ۱۹۲m$$

۲۶ ـ گزینه ۲ این تست سالیان بسیار قبل در کنکور (البته با محاسبات ساده‌تر) مطرح شده بود و تست بسیار جالبی است. می‌خواهیم یک روش خلّاقانه ارائه کنیم!

کافی است امتداد مسیر را منطبق بر محور x گرفته و نمودار $x-t$ دو متحرک را در یک دستگاه رسم کنیم. شیب خط مماس بر نمودار ($x-t$) برابر سرعت (لحظه‌ای) در آن لحظه است.





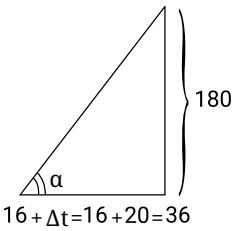
$$\begin{cases}\Delta x_۲ = v_۲\Delta t & v_۱ > ۰ \text{ و } v_۲ < ۰ \quad \text{دقت داریم که} \quad (۱)\\ \Delta x_۱ = v_۱\Delta t & \text{جابه‌جایی در مدت زمان } \Delta t \text{ برابر دو متحرک} \quad (۲)\end{cases}$$

$$(۱)\ \text{سرعت متحرک}\ v_۱ = ۱\ \text{شیب خط}\ = \frac{|v_۲|\,\Delta t}{۱۶} \quad (*)$$

$$(۲)\ \text{سرعت متحرک}\ v_۲ = ۲\ \text{شیب خط}\ = \frac{v_۱\Delta t}{۲۵} \quad (**)$$

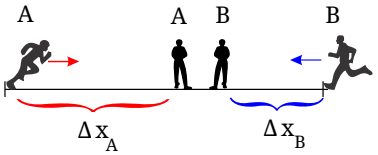
$$(*)\ \text{و}\ (**) \Rightarrow \frac{(\frac{v_۱\Delta t}{۲۵})(\Delta t)}{۱۶} = v_۱ \Rightarrow \frac{\Delta t^۲}{۲۵\times ۱۶} = ۱ \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{\Delta t}{۵\times ۴} = ۱$$

$$\Delta t = ۲۰s \Rightarrow v_۱ = ۱\ \text{شیب خط}\ = \frac{۱۸۰}{\Delta t} = \frac{۱۸۰}{۳۶} = ۵\frac{m}{s} \Rightarrow v_۱ = ۵\frac{m}{s}$$



۲۷ - گزینه ۲ طبق معادلهٔ پیوستگی، در قسمت B با کاهش سطح مقطع تندی سیال افزایش می‌یابد. در قسمت C با ثابت بودن سطح مقطع، تندی سیال ثابت می‌ماند و در قسمت D با افزایش سطح مقطع تندی سیال کاهش می‌یابد.

۲۸ - گزینه ۲ سرعت A را $۳v$ و سرعت B را v می‌گیریم، سپس جابه‌جایی را برحسب سرعت محاسبه می‌کنیم.



$$x = vt$$
$$\Delta x_A = ۳v \times ۴ = ۱۲v$$
$$\Delta x_B = v \times ۴ = ۴v$$

مسافت کل بین مکان اولیهٔ A و B برابر مجموع Δx_A و Δx_B است:

$$\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B = ۴v + ۱۲v = ۱۶v$$

حال می‌خواهیم ببینیم چقدر طول می‌کشد تا دوندهٔ B به مکان اولیهٔ دوندهٔ A برسد، یعنی جابه‌جایی $\Delta x = ۱۶v$ را طی کند:

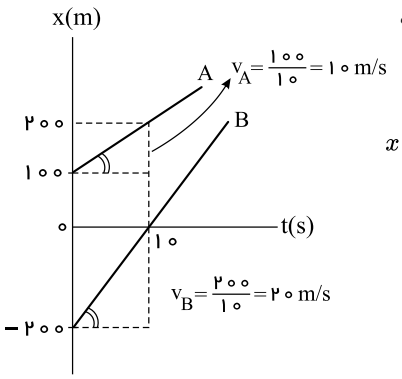
$$\Delta x = v\times t \Rightarrow t = \frac{\Delta x}{v} \rightarrow t = \frac{۱۶v}{v} = ۱۶h$$

۲۹ - گزینه ۴ در بازهٔ زمانی $۱۰s < t < ۱۵s$ نمودار سرعت - زمان خط راست است و شیب ثابتی دارد. پس در تمام لحظه‌های این بازهٔ زمانی شتاب ثابت و برابر شیب این خط است که نقاط ابتدا و انتهای آن به ترتیب $(۱۰s\ ,\ ۳۰m/s)$ و $(۱۵s\ ,\ ۰\ m/s)$ هستند. بنابراین:

$$a(۱۳s) = \frac{۰\ m/s - ۳۰\ m/s}{۱۵s - ۱۰s} = \frac{-۳۰\ m/s}{۵s} = -۶\ m/s^۲$$

۳۰ - گزینه ۳

در ابتدا سرعت هر یک از متحرک‌ها و به دنبال آن مسیر حرکت آنها را رسم می‌کنیم و معادلهٔ حرکت آنها را می‌نویسیم. می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان با سرعت متحرک برابر است. در اینجا که سرعت متحرک‌ها ثابت است، داریم:



$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۱۰t + ۱۰۰ \\ x_B = ۲۰t - ۲۰۰ \end{cases}$$

با توجه به اینکه تندی متحرک B بیشتر از متحرک A است، مرتباً به متحرک A نزدیک شده و بعد از رسیدن به متحرک A، از آن جلو می‌افتد، پس دوبار فاصلهٔ آنها از هم ۲۰ متر می‌شود.

$$|x_A - x_B| = ۲۰m \rightarrow \begin{cases} x_A - x_B = ۲۰m \\ x_B - x_A = ۲۰m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰t_۱ + ۱۰۰ - (۲۰t_۱ - ۲۰۰) = ۲۰ \rightarrow t_۱ = ۲۸s \\ ۲۰t_۲ - ۲۰۰ - (۱۰t_۲ + ۱۰۰) = ۲۰ \rightarrow t_۲ = ۳۲s \end{cases} \rightarrow \Delta t = t_۲ - t_۱ = ۴s$$

۳۱ - گزینه ۱ صابون‌های مایع نمک‌های آمونیوم و پتاسیم اسیدهای چرب‌اند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۲) سر ناقطبی مولکول‌های صابون در چربی نفوذ می‌کند.

گزینهٔ ۳) گروه سولفونات، SO_3^- است.

گزینهٔ ۴) زنجیر آلکیل بخش ناقطبی پاک‌کننده را تشکیل می‌دهد.

۳۲ ـ گزینه ۴ در بخش ناقطبی، زنجیرهٔ کربنی این ترکیب بسیار کوچک است؛ در نتیجه نمی‌تواند با چربی‌ها جاذبهٔ وان‌دروالس برقرار کند و نسبت به سایر شوینده‌ها جاذبهٔ کمتری با لکه‌های چربی ایجاد می‌کند.

۳۳ ـ گزینه ۴ مورد اول و چهارم درست بیان شده‌اند.

مورد دوم: نادرست. در این نوع آب‌ها مقادیر چشم‌گیری از یون‌های $Ca^{2+}(aq)$ و $Mg^{2+}(aq)$ وجود دارد.

مورد سوم: نادرست. کلوئید را می‌توان همانند پلی بین محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها در نظر گرفت.

مورد پنجم: نادرست. چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلندزنجیر (با جرم مولی زیاد) هستند.

۳۴ ـ گزینه ۴ نمونه‌ای از پاک‌کنندهٔ غیر صابونی با زنجیر سیرشدهٔ آلکیل به‌صورت زیر است:

$$C_{12}H_{25}\ C_6H_4\ SO_3Na$$

حال اگر به جای $-C_{12}H_{25}$ گروه آلکیل $-C_{14}H_{29}$ قرار گیرد، فرمول آن به‌صورت $C_{14}H_{29}\underbrace{C_6H_4}_{\text{حلقهٔ بنزنی}}SO_3Na$ است، و به‌طور کامل و مرتب شده خواهیم داشت:

$$C_{20}H_{33}SO_3Na$$

۳۵ ـ گزینه ۲ کلوئیدها نور را پخش می‌کنند.

کلوئیدها ته‌نشین نمی‌شوند و پایدارند.

رنگ نوعی کلوئید است.

۳۶ ـ گزینه ۲ محلول کات‌کبود در آب نور را عبور می‌دهد.

ارتفاع کف ایجادشده در مخلوط آب مقطر و صابون بیشتر است زیرا قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب سخت کاهش می‌یابد.

رنگ پوششی، ژله و سس مایونز کلوئید می‌باشند.

۳۷ ـ گزینه ۴ بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: ارتفاع کف در آب چشمه، به دلیل املاح کمتر، بیشتر از آب دریا است.

گزینهٔ «۲»: میزان چسبندگی لکهٔ چربی بر روی پارچه پلی‌استر بیشتر از پارچهٔ نخی بوده و پاک کردن آن از روی پارچهٔ پلی‌استر دشوارتر است.

گزینهٔ «۳»: این لکه‌ها نشانه‌هایی از وجود رسوب‌های $(RCOO)_2Mg$ و $(RCOO)_2Ca$ هستند.

۳۸ ـ گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: نادرست. چربی شامل مخلوطی از اسیدهای چرب (شکل ۱) و استرهای سنگین (شکل ۲) است.

گزینهٔ «۲»: درست. هر دو ماده با سدیم هیدروکسید واکنش داده و نمک سدیم اسید چرب تشکیل می‌دهند.

گزینهٔ «۳»: نادرست. شکل ۲ یک استر بلندزنجیر (با جرم مولی زیاد) را نشان می‌دهد.

گزینهٔ «۴»: نادرست. در چربی‌ها نیروی بین مولکولی غالب از نوع واندروالسی است.

۳۹ ـ گزینه ۳

$$C_nH_{2n}O_2 + \frac{3n-2}{2}O_2 \rightarrow nCO_2 + nH_2O$$

$$C_nH_{2n}O_2 \text{ جرم مولی} = 12n + 2n + 32 = 14n + 32$$

$$12/8g \text{ اسید چرب} \times \frac{1mol \text{ اسید چرب}}{(14n+32) \text{ اسید چرب}} \times \frac{\frac{3n}{2}molO_2}{1mol \text{ اسید چرب}} \times \frac{22/4LO_2}{1molO_2} = 25/76LO_2 \Rightarrow n = 16$$

تعداد کربن گروه آلکیل ۱۵ عدد است که با احتساب کربن گروه کربوکسیل، اسید چرب در مجموع دارای ۱۶ اتم کربن خواهد بود.

۴۰ ـ گزینه ۱ فرمول کلی لکه‌های سفیدرنگی که بر اثر شست‌وشوی لباس‌ها با صابون در آب‌های سخت می‌شود به‌صورت $(RCOO)_2Mg$ و $(RCOO)_2Ca$ می‌باشد.

بررسی گزینهٔ «۴»: پاک‌کننده‌های صابونی براساس برهم کنش میان ذره‌ای عمل می‌کنند اما پاک‌کننده‌های خورنده علاوه برهم کنش میان ذره‌ای، با آلاینده‌ها واکنش نیز می‌دهند.