کد اجرا: نامشخص

تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۹/۲۲

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۷۵ دقیقه

نام آزمون: شرق دخترانه حسابی ۲۲ آذر

دبیرستان دخترانه علوی واحد شرق

۱ جواب کلّی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan ۳x = ۱$، کدام است؟

۱) $x = \frac{k\pi}{۴}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۸}$ ۴) $x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

۲ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲ \frac{۵\pi}{۴}$، به کدام صورت است؟

۱) $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

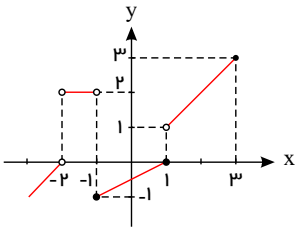
۳ حاصل $\lim\limits_{x \to -۱} \frac{۲x^۲ + ۵x + ۳}{۲ - \sqrt{۲ + \sqrt{۳ - x}}}$ ، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۴ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۲\cos^۲ x + ۲ \sin x \cos x = ۱$، به کدام صورت است؟

۱) $x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{۸}$

۵ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. حاصل $\lim\limits_{x \to ۳^-} f(-\frac{x}{۳}) + \lim\limits_{x \to (-۱)^-} [f(۲x)]$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) -۲ ۴) -۱

۶ حد عبارت $\frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۱۲ + ۶\sqrt[۳]{x}}$، وقتی $x \to -۸$، کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) -۱۸ ۳) -۱۲ ۴) -۶

۷ اگر A ماتریسی ۳×۳ و $|۲A| A = \frac{۱}{۲} I$ باشد، مقدار مثبت $|A|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۸

۸ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(۱, ۰)$ و $(۳, ۰)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به‌صورت $x - y = ۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۹ اگر $۲A = \begin{bmatrix} |A| & -۲ \\ ۲ & |A| \end{bmatrix}$ حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰ حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & x-۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{vmatrix} = ۰$ کدام است؟ $\begin{vmatrix} x-۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & x-۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{vmatrix}$

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۱۱) معادلهٔ $۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۳$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲) دو دایره از نقطه $(۱, ۲)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند، شعاع این دایره‌ها کدام است؟

۱) ۱,۴ ۲) ۱,۵ ۳) ۲,۴ ۴) ۲,۵

۱۳) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = ۴ \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب برابر $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $y = ۲$ به‌دست آمده است. مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۴) حدود a برای آنکه نقطه M $(a$ و $۲)$ داخل دایره $x^۲ + y^۲ + x + ۵y - ۱۲ = ۰$ باشد کدام است؟

۱) $-۶ < a < ۱$ ۲) $-۱ < a < ۶$ ۳) $-۵ < a < ۲$ ۴) $-۲ < a < ۵$

۱۵) اگر $۲A + ۳I = \begin{bmatrix} ۹ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$، دترمینان $A^۲ - ۳A$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۱۶) دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin x \cos x(\sin^۲ x - \cos^۲ x)$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۷) دسته خطوط به معادلات $(m+۱)x + (۲-m)y - ۶m = ۰$ قطرهای یک دایره هستند. اگر این دایره از نقطه $A(۱۲, -۸)$ بگذرد، شعاع آن کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

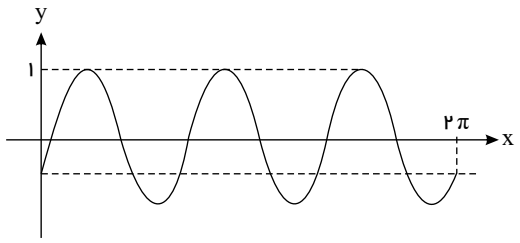
۱۸) اگر $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۹) حد راست تابع $y = x[\frac{۳}{-x}]$ در نقطهٔ $x = ۳$ از حد چپ در همین نقطه چقدر بیش‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰) اگر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(bx + \frac{\pi}{۶})$ به‌صورت زیر باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟



۱) -۲
۲) ۲
۳) -۴
۴) -۱

۲۱) غلظت گوگرد در یک نمونه گازوییل برابر $۶۴۰۰\ ppm$ است. با فرض سوختن کامل گوگرد در موتور و تبدیل گاز حاصل به سولفوریک اسید در آب، اسید حاصل از سوختن یک کیلوگرم از این سوخت می‌تواند pH آب خالص یک مخزن ۱۰۰۰ لیتری را به تقریب چند واحد کاهش دهد؟ (در شرایط آزمایش، هر دو مرحله‌ی یونش اسید را کامل فرض کنید. $(S = ۳۲, O = ۱۶, H = ۱ : g \cdot mol^{-۱})$

۱) ۳٫۶ ۲) ۴٫۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲ نسبت شمار کاتیون‌ها به شمار آنیون‌ها در ترکیب ردیف ..... از ستون I با نسبت شمار آنیون‌ها به شمار کاتیون‌ها در ترکیب ردیف ..... از ستون II جدول رو به رو، برابر است (عدد ها را در گزینه‌ها از راست به چپ بخوانید.)

ردیف/ستون	I	II
۱	باریم نیترات	آمونیم سولفات
۲	آلومینیم کربنات	آهن (III) فسفات
۳	منیزیم نیترات	روبیدیم نیترات
۴	سدیم سولفات	روی فسفات

۱) ۳ ، ۱
۲) ۱ ، ۴
۳) ۴ ، ۲
۴) ۲ ، ۳

۲۳ چگالی محلول اسید HA که غلظت یون هیدرونیوم در آن $38ppm$ و pH محلول برابر با ۲٫۵ است، چندگرم بر میلی‌لیتر است؟ ($\log ۳ = ۰٫۵$ ، $H = ۱ g \cdot mol^{-۱}$)

۱) ۱٫۵ ۲) ۱٫۷۵ ۳) ۲ ۴) ۲٫۲۵

۲۴ با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟ (معادلهٔ واکنش‌ها، موازنه شوند.)

آ) $TiCl_۴(l) + LiH(s) \rightarrow Ti(s) + LiCl(s) + H_۲(g)$

ب) $PCl_۵(s) + H_۲O(l) \rightarrow HCl(g) + H_۳PO_۴(aq)$

۱) با انجام واکنش (ب) در آب مقطر، pH آب بالاتر می‌رود.
۲) هر دو واکنش با تغییر عدد اکسایش برخی از اتم‌ها، همراه‌اند.
۳) شمار مول‌های گاز تولیدشده در هر دو واکنش پس از موازنه، برابر است.
۴) مجموع ضریب‌های استوکیومتری معادلهٔ (آ) از مجموع ضریب‌های استوکیومتری معادلهٔ (ب) بیشتر است.

۲۵ اگر بخواهیم نمک حاصل از واکنش مقدار کافی پتاسیم هیدروکسید و ۵ لیتر از محلول هیدروکلریک اسید با $pH = ۲٫۷$ را توسط واکنش $Cl_۲ + ۲KBr \rightarrow ۲KCl + Br_۲$ تهیه کنیم، به‌تقریب به چند گرم KBr با درصد خلوص ٪۶۵ نیاز داریم؟ $(Br = ۸۰, K = ۳۹, Cl = ۳۵٫۵ : g \cdot mol^{-۱})$

۱) ۰٫۶۹۳ ۲) ۱٫۷۷۶ ۳) ۶٫۹۳ ۴) ۱٫۸۳۰

۲۶ pH محلولی از سدیم هیدروکسید که ۲۰۰ میلی لیتر آن می‌تواند ۱۵۰ میلی لیتر محلول نیتریک اسید با $pH = ۱٫۵$ را خنثی کند، کدام است؟ $(\log ۳ \cong ۰٫۵)$

۱) ۲٫۶ ۲) ۱۱٫۴ ۳) ۱٫۶ ۴) ۱۲٫۴

۲۷ کدام موارد از عبارت‌های زیر درست‌اند؟

آ) در آهن (III) فسفات، نسبت شمار کاتیون به آنیون، ۲ برابر نسبت شمار آنیون به کاتیون در آمونیوم کربنات است.

ب) در بین ترکیب‌های آمونیوم فسفات، آلومینیم هیدروکسید، سدیم نیترات و آهن (III) سولفات، نسبت تعداد اتم‌ها به تعداد عنصرها در آمونیوم فسفات، بیش‌تر از بقیه است.

پ) میانگین پیوند یونی در کلسیم‌فسفات و پیوندهای هیدروژنی در آب، بیش‌تر از نیروی جاذبهٔ یون - دو قطبی در محلول است.

ت) در سه مورد از ترکیب‌های زیر با وارد کردن یک مول از مادهٔ موردنظر در یک لیتر آب، ماهیت ساختاری ماده تغییر نمی‌کند.

اتانول - شکر - ید - سدیم هیدروکسید - باریم سولفات - آلومینیم نیترات

۱) آ و پ ۲) ب و پ ۳) آ و ت ۴) ب و ت

۲۸ با توجه به واکنش‌های داده‌شده، کدام عبارت درست بیان شده است؟

۱) $Ca + XCl_2 \rightarrow X + CaCl_2$

۲) $X + ZnCl_2 \rightarrow$ انجام نمی‌شود

۳) $X + CuCl_2 \rightarrow Cu + XCl_2$

۱) فقط فلز Ca از فلز X کاهنده‌تر است.

۲) قدرت کاهندگی X از Zn بیشتر و از Cu کمتر است.

۳) فقط مقدار پتانسیل کاهشی استاندارد Cu از فلز X بیشتر است.

۴) در جدول E°، بیشترین مقدار E° نسبت به دیگر فلزات داده‌شده مربوط به فلز X است.

۲۹ در کدام گزینه جاهای خالی به‌درستی تکمیل شده‌اند؟

I) از ترکیب عناصر دورهٔ دوم در گروه‌های چهاردهم و شانزدهم، ماده‌ای با فرمول ..... ایجاد می‌شود که گشتاور دوقطبی آن ..... از ..... است.

II) ..... ترکیب از ترکیبات متان، آب، اتانول، هیدروژن کلرید، آمونیاک، قطبی هستند و توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارند.

۱) XY - بیشتر - آب - ۳ ۲) XY_2 - بیشتر - آب - ۴ ۳) XY_2 - کمتر - هیدروژن‌سولفید - ۳ ۴) XY_3 - کمتر - هیدروژن‌سولفید - ۴

۳۰ کدام گزینه نادرست است؟

۱) استون مولکولی قطبی و هگزان مولکولی ناقطبی است اما مولکول اول در آب و رنگ‌ها محلول بوده ولی مولکول دوم در آب نامحلول است.

۲) میانگین قدرت پیوند یونی در $MgSO_4$ و پیوند هیدروژنی در آب کمتر از نیروی جاذبهٔ یون - دوقطبی در محلول آن است.

۳) مطابق قانون هنری، مولکول‌های گازی قطبی مانند NO در آب، انحلال‌پذیری بیشتری نسبت به مولکول‌های گازی ناقطبی مانند O_2 دارند.

۴) عبور از صافی کربن و استفاده از روش اسمز معکوس برای تصفیهٔ آب، نمی‌تواند سبب حذف میکروب‌ها بشود.

۳۱ مقداری $N_2O_5(s)$ را در ۱۰۰ میلی‌لیتر آب مقطر وارد کرده و حجم محلول اسیدی را به ۰٫۵ لیتر می‌رسانیم. اگر pH محلول حاصل، برابر ۳٫۱۵ باشد، مقدار $N_2O_5(s)$ چند میلی‌گرم بوده است؟ (N=۱۴ , O=۱۶ : g \cdot mol^{-1})

۱) ۱٫۸۹ ۲) ۳٫۷۸ ۳) ۱۸٫۹ ۴) ۳۷٫۸

۳۲ جمع جبری کوچک‌ترین عدد اکسایش و بزرگ‌ترین عدد اکسایش اتم مشخص شده در یون‌های داده شده کدام است؟

آ) $\underline{Mn}O_4^{2-}$ ب) $\underline{Al}Cl_4^-$ پ) $\underline{S}_2O_3^{2-}$ ت) $\underline{Cr}_2O_7^{2-}$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۳۳ با توجه به پتانسیل کاهشی استانداردهای داده‌شده، کدام گزینه درست است؟

$$E(Cu^{2+}/Cu) = +0{,}34V, E(Zn^{2+}/Zn) = -0{,}76V, E(Al^{3+}/Al) = -1{,}66V$$

۱) نگهداری محلول هیدروکلریک اسید در ظرف آلومینیمی امکان‌پذیر است.

۲) واکنش $Zn^{2+}(aq) + Al(s) \rightarrow Al^{3+}(aq) + Zn(s)$ به‌طور طبیعی انجام می‌شود.

۳) بین این سه فلز، خاصیت اکسندگی فلز مس بیشترین و فلز آلومینیم، کمترین است.

۴) ولتاژ سلول روی - مس برابر ۱٫۱ ولت و بیش از ولتاژ سلول آلومینیم - مس است.

۳۴ با توجه به ثابت یونش‌های داده شده، کدام عبارت‌ها درست هستند؟ (محلول‌ها ۱ مولار و دما $25^\circ C$ در نظر گرفته شود.)

$HA \rightleftharpoons H^+ + A^- \quad K_a = 4 \times 10^{-4}\, mol \cdot L^{-1}$

$HB \rightleftharpoons H^+ + B^- \quad K_a = 2 \times 10^{-5}\, mol \cdot L^{-1}$

آ) قدرت اسیدی HA کمتر از HB است.

ب) pH محلول HA از HB بیشتر است.

پ) درجهٔ یونش HA بیشتر از HB است.

ت) غلظت تعادلی HA از غلظت تعادلی HB کمتر است.

۱) آ، ب ۲) آ، پ ۳) ب، ت ۴) پ، ت

۳۵ اگر درصد یونش اسید HA و باز BOH به ترتیب برابر ۰٫۲ و ۰٫۵ و درصد جرمی محلول آن‌ها به ترتیب برابر ۰٫۲ و ۱ باشد، تفاوت pH دو محلول در کدام گزینه آمده است؟ (چگالی محلول‌ها را $1g \cdot mL^{-1}$ و دما را $25^\circ C$ در نظر بگیرید؛ $HA = 20, BOH = 50 : g \cdot mol^{-1}$)

۱) ۰٫۷ ۲) ۷٫۳ ۳) ۲٫۳ ۴) ۶٫۷

۳۶ با توجه به جدول زیر که داده‌هایی را از قرار دادن برخی تیغه‌های فلزی درون محلول نمکی یکی از این فلزها در دمای ۲۵ درجه سلیسوس نشان می‌دهد، کدام گزینه درست است؟

نماد فرضی فلز	A	B	C	D
دمای مخلوط واکنش $(^\circ C)$	۲۵	۲۵	۳۲	۲۹

۱) محلول اولیه در این آزمایش، محلول نمکی از فلز C است.
۲) خاصیت کاهندگی فلز B بیشتر از C است.
۳) در شرایط حاکم بر این آزمایش، واکنش فلز B با کاتیون D انجام‌پذیر نیست.
۴) پتانسیل کاهشی استاندارد فلز D کمتر از فلز C است.

۳۷ کدام گزینه درمورد باتری روی - نقره (که یکی از انواع باتری‌های دگمه‌ای می‌باشند) نادرست است؟

۱) معادلهٔ واکنش انجام گرفته در آن به‌صورت $Zn(s) + Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s) + 2Ag(s)$ است.
۲) نیروی الکتروموتوری آن از نیروی الکتروموتوری باتری لیتیم - نقره بیشتر است.
۳) Ag_2O نقره اکسنده است و نقش کاتد را ایفا می‌کند.
۴) اگر به‌جای فلز روی، یک فلز نجیب مانند پلاتین قرار گیرد، عملکرد باتری خراب می‌شود.

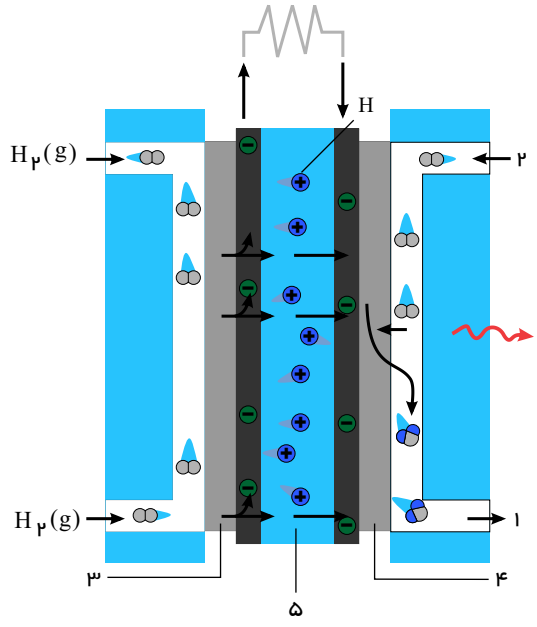
۳۸ کدام گزینه درست است؟

۱) کلسیم فسفات همانند نقره کلرید، رسوبی سفیدرنگ است و در هر دو ترکیب علاوه بر پیوند یونی، پیوند کووالانسی یافت می‌شود.
۲) برای شناسایی یون پایدار پنجمین عنصر گروه دوم جدول دوره‌ای عنصرها در محلول‌های آبی، می‌توان از سدیم سولفات استفاده کرد.
۳) اگر در محلولی یون‌های آهن، نقره و روی در مجاورت یکدیگر باشند، با افزودن نمک خوراکی به این محلول می‌توان یون‌های روی را از سایر یون‌ها جدا کرد.
۴) جمع جبری بار الکتریکی یون‌های «آمونیوم، هیدروکسید، سولفات، آهن (II) و نیترات» برابر با -2 است.

۳۹ از حل کردن ۷٫۱ گرم سدیم سولفات در ۵۲٫۹ گرم آب، محلولی با چگالی $1/2g \cdot mL^{-1}$ تهیه شده است. غلظت مولی این محلول چقدر خواهد بود؟
$(O = 16, Na = 23, S = 32g \cdot mol^{-1})$

۱) ۱ ۲) ۱٫۱۴ ۳) ۱٫۱۹ ۴) ۱٫۳۶

۴۰ با توجه به شکل زیر، چند مورد درست است؟آ) موارد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به‌ترتیب از راست به چپ عبارتند از: $O_2(g) - H_2O(g)$ - آند - کاتد و غشای مبادله‌کننده گاز هیدروژن.



ب) این شکل مربوط به سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن است که نوعی سلول گالوانی محسوب می‌شود.
پ) واکنش کلی این سلول به‌صورت $2H_2O(g) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$ است.
ت) در این سلول بخش قابل توجهی از انرژی شیمیایی ناشی از انجام واکنش اکسایش - کاهش به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۱ دو جسم A و B با سرعت‌های ثابت در حرکت‌اند و تکانهٔ آن‌ها با یکدیگر برابر است. اگر انرژی جنبشی جسم B، ۵ برابر انرژی جنبشی جسم A باشد، نسبت جرم A به جرم B کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۵

۴۲ ماهواره‌ای به جرم m درارتفاع h ازسطح زمین به دورآن می چرخد. اگر نیروی مرکزگرای ماهواره $\frac{۱}{۱۶}$ وزن ماهواره درسطح زمین باشد، ارتفاع h چند برابر شعاع زمین است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۶

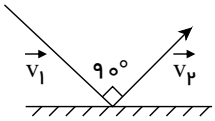
۴۳ در نقطه‌ای که فاصله‌اش تا سطح زمین n برابر شعاع زمین است، شتاب گرانش $\frac{۱}{۴}$ شتاب گرانش در سطح زمین است. n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۴ جسمی به جرم $۲۰۰\ g$ روی سطح افقی ساکن است. به آن ضربهٔ $۲\ N\cdot s$ می‌زنیم. این جسم پس از وارد شدن ضربه، با پیمودن مسافت $۱۰\ m$ می‌ایستد. ضریب اصطکاک جسم و سطح چقدر است؟

۱) $\mu_k = ۰/۱$ ۲) $\mu_k = ۰/۵$ ۳) $\mu_k = ۰/۲$ ۴) $\mu_k = ۰/۴$

۴۵ گلوله‌ای به جرم $۱kg$ مطابق شکل زیر با سرعت $v_۱ = ۴\frac{m}{s}$ به زمین برخورد کرده و با سرعت $v_۲ = ۳\frac{m}{s}$ از زمین جدا می‌شود تغییر تکانه گلوله برحسب کیلوگرم متر بر ثانیه کدام است؟

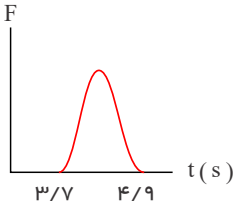


۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۴۶ جرم و حجم سیاره‌ای به ترتیب ۴ و ۸ برابر جرم و حجم کره‌ی زمین است. اگر شتاب گرانش در سطح زمین $۹/۸\ m/s^۲$ باشد. شتاب گرانش در سطح سیاره را حساب کنید.

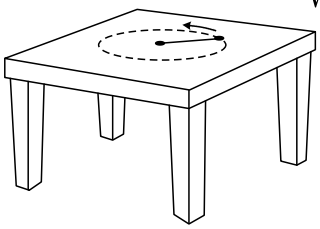
۱) ۱۹/۶ ۲) ۴/۹ ۳) ۹/۸ ۴) ۲۹/۴

۴۷ نمودار اندازهٔ نیرویی خالص وارد بر توپ در بازی چوگان برحسب زمان، مطابق شکل زیر است. اگر مساحت سطح زیر نمودار برابر با ۱۴/۴ واحد SI باشد، اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر توپ طی این مدت برابر با چند نیوتون است؟



۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۸ در شکل نشان داده شده مهره‌ای به جرم ۲۰۰ گرم را به یک سر نخ بسته و انتهای دیگر نخ به حلقه‌ای بسته شده است. اگر مهره روی میز بدون اصطکاک در یک مسیر دایره‌ای به شعاع $۲۵cm$ در هر ثانیه یک دور بزند، نیروی کشش نخ چند نیوتون است؟ ($\pi \simeq \sqrt{۱۰}$)



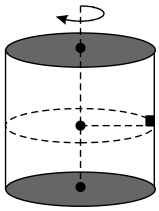
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۹ خودرویی به جرم ۳ تن در سطح افقی، مسیر دایره‌ای را به صورت یکنواخت طی می‌کند. اگر بزرگی نیرویی که از طرف سطح زمین بر خودرو وارد می‌شود، $۱۰^۴ \times \sqrt{۱۰}N$ باشد، نیروی مرکزگرای وارد بر خودرو چند نیوتون است؟

$(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) $۱۰^۳$ ۲) $۱۰^۴$ ۳) ۳×۱۰^۳ ۴) ۳×۱۰^۴

۵۰ مطابق شکل زیر، استوانهٔ دواری به شعاع $۲m$ حول محور قائم حرکت دورانی یکنواختی با دورهٔ $۲٫۴s$ انجام می‌دهد. جسمی به جرم m به دیوارهٔ استوانه تکیه داده و در آستانهٔ لغزش قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و استوانه چقدر است؟($g = ۱۰m/s^۲$ و $\pi \simeq ۳$)



۱) ۰٫۴
۲) ۰٫۳
۳) ۰٫۲۵
۴) ۰٫۸

۵۱ اتومبیلی به جرم ۱۲۰۰ کیلوگرم در یک سطح افقی در مسیر دایره‌ای به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند و ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s = ۰٫۵$ است. اگر اتومبیل با حداکثر سرعت مجاز (سرعتی که نلغزد) حرکت کند، نیروی مرکزگرای وارد بر آن چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰m/s^۲)$

۱) ۱۲۰۰۰
۲) ۶۰۰۰
۳) ۵۰۰۰
۴) ۴۵۰۰

۵۲ ذره‌ای در هر دقیقه ۶ بارمسیر دایره‌ای به محیط ۱۲ متر را به طور یکنواخت طی می‌کند. اندازه‌ی شتاب مرکز گرای ذره چندمتر برمربع ثانیه است؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) $\frac{۶}{۵}$
۲) $\frac{۱۸}{۵}$
۳) $\frac{۱۸}{۲۵}$
۴) $\frac{۲۵}{۶}$

۵۳ متحرکی با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ و بسامد $\frac{۱}{۴}Hz$ روی دایره می‌گردد. اندازهٔ شتاب متوسط در مدتی که ربع دایره را طی می‌کند چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$
۲) ۱۰
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) ۰

۵۴ طول عقربه ساعت‌شمار یک ساعت دیواری $\frac{۲}{۳}$ دقیقه‌شمار آن است. سرعت خطی نوک عقربه ساعت‌شمار چند برابر سرعت حرکت نوک عقربه دقیقه‌شمار است؟

۱) $\frac{۱}{۱۸}$
۲) $\frac{۱}{۹۰}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

از رابطهٔ $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\tan ۳x\cdot\tan x=۱\to\tan ۳x=\frac{۱}{\tan x}\to\tan ۳x=\cot x\to\tan ۳x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$$
$$\xrightarrow{\tan x=\tan\alpha\to x=k\pi+\alpha}۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\to ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\to x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}$$

۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم $\boxed{\cos ۲a=\cos^۲a-\sin^۲a}$

$$\sin^۴x-\cos^۴x=\sin^۲\frac{۵\pi}{۴}\Rightarrow(\sin^۲x-\cos^۲x)\underbrace{(\sin^۲x+\cos^۲x)}_{۱}=(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^۲\Rightarrow-\cos ۲x=\frac{۱}{۲}$$
$$\cos ۲x=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}\to ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

توجه کنید که $\sin\frac{۵\pi}{۴}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۳ ۱ ۲ **۳** ۴

روش اول: مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{(۴-۲-\sqrt{۳-x})}$$
$$=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(۱)(۴)(۲+\sqrt{۳-x})}{(۲-\sqrt{۳-x})(۲+\sqrt{۳-x})}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(۱)(۴)(۴)}{(۴-۳+x)}=۱۶$$

روش دوم: با استفاده از هوپیتال:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{۴x+۵}{-\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۶$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

می‌دانیم: $\boxed{۲\sin a\cos a=\sin ۲a\ ,\ \cos ۲a=۲\cos^۲a-۱}$

$$۲\cos^۲x+۲\sin x\cos x=۱\to ۲\sin x\cos x=۱-۲\cos^۲x$$
$$\to ۲\sin x\cos x=-(۲\cos^۲x-۱)\to\sin ۲x=-\cos ۲x$$

طرفین را بر $\cos ۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\to\tan ۲x=-۱=\tan(-\frac{\pi}{۴})\to ۲x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\to x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$$

۵ ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به نمودار تابع در همسایگی نقاط ۳^- و -۱^- و تشکیل $\frac{-x}{۳}$ و $-۲x$ و یافتن نقاط حدی جدید خواهیم داشت:

$$x\to۳^-:x<۳\to\frac{x}{۳}<۱\to-\frac{x}{۳}>-۱$$

پس: $\lim_{x\to۳^-}f(-\frac{x}{۳})=\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=-۱$

ازطرفی: $\lim\limits_{x\to(-1)^-}[f(2x)]=[f((-2)^-)]=[0^-]=-1$

توجه کنید وقتی x از سمت مقادیر کوچک‌تر از -2 به -2 نزدیک می‌شود y از سمت مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود.

بنابراین: $\lim\limits_{x\to3^-}f(-\frac{x}{3})+\lim\limits_{x\to(-1)^-}[f(2x)]=-1+(-1)=-2$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $\left((a+b)(a^2+b^2-ab)=a^3+b^3\right)$

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}\times\frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{(x+8)(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6}=\frac{-6(12)}{6}=-12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-8}\frac{2x+10}{6(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})}=\frac{-6}{6(\frac{1}{12})}=-12$$

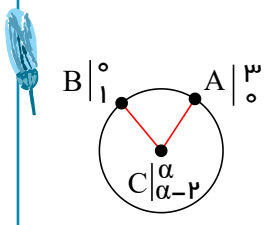
۷ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر $A_{n\times n}$ باشد آنگاه $|kA|=k^n|A|$، پس با توجه به فرض داریم:

$$|2A|\,A=\frac{1}{2}I\xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان می‌گیریم}}||2A|\,A|=\left|\frac{1}{2}I\right|\to|2A|^3\,|A|=\frac{1}{8}|I|$$

$$\to8^3|A|^3\,|A|=\frac{1}{8}\to|A|^4=(\frac{1}{8})^4\to|A|=\pm\frac{1}{8}$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴



قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس مختصات مرکز به‌صورت $C\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha-2\end{vmatrix}$ می‌باشد. (زیرا معادله قطر دایره به‌صورت $y=x-2$ می‌باشد.)

$$R=AC=\sqrt{(3-\alpha)^2+(-\alpha+2)^2}\ ,\ R=BC=\sqrt{\alpha^2+(\alpha-3)^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(3-\alpha)^2+(-\alpha+2)^2}=\sqrt{\alpha^2+(-\alpha+3)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان۲}}9-6\alpha+\alpha^2+\alpha^2-4\alpha+4=\alpha^2+\alpha^2-6\alpha+9\Rightarrow-4\alpha=-4\Rightarrow\alpha=1$$

بنابراین: $R=AC\overset{\alpha=1}{=\!=}\sqrt{(3-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

دترمینان ماتریس $2A$ را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|2A|=\begin{vmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{vmatrix}$$

$$2^2\,|A|=|A|^2+4\to|A|^2-4\,|A|+4=0\to(|A|-2)^2=0\Rightarrow|A|=2$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر دو سطر (یا دو ستون) مضربی از هم (یا مانند هم) باشند حاصل دترمینان صفر است. بنابراین اگر $x-1=1$ (یا $x-2=2$) باشند ستون اول (یا ستون دوم) با ستون سوم مانند یکدیگر می‌شوند. پس:

$$\begin{matrix}x-1=1\to x=2\\ x-2=2\to x=4\end{matrix}\to\text{حاصل‌ضرب جواب‌ها}=8$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$2\sin^2x+3\cos x=3\Rightarrow2\sin^2x+3\cos x-3=0\Rightarrow2(1-\cos^2x)+3\cos x-3=0$$

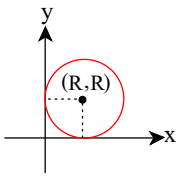
$$\Rightarrow2-2\cos^2x+3\cos x-3=0\Rightarrow2\cos^2x-3\cos x+1=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}\cos x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi\\ \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\to x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ عبارت‌اند از: $-\frac{\pi}{3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{3}$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

نقطهٔ $(2,1)$ در ناحیهٔ اول مختصات واقع است، پس این دایره در ناحیهٔ اول بر محورهای مختصات مماس است. اگر شعاع دایره را R بگیریم، مختصات دایره به‌صورت (R,R) بوده و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$(x-R)^۲+\left(y-R^۲\right)=R^۲$



از نقطه $(۲,۱)$ گذشته : $(۲-R)^۲+(۱-R)^۲=R^۲ \Rightarrow R=۱,۵$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ مطابق فرض داریم:

$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=۴ \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} ۳m-۴=x \\ ۲m=۲ \rightarrow m=۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow ۳(۱)-۴=x \rightarrow x=-۱$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ داخل دایرهٔ به معادلهٔ $C(x,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ قرار دارد، اگر و فقط اگر $C(x_۰,y_۰)<۰$ باشد، پس:

$$x^۲+y^۲+x+۵y-۱۲=۰ \xrightarrow{M(۲,a)} ۲^۲+a^۲+۲+۵a-۱۲<۰$$

$$\rightarrow a^۲+۵a-۶<۰ \rightarrow (a+۶)(a-۱)<۰ \rightarrow -۶<a<۱$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ از رابطه داده شده، ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$۲A+\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۶ & ۴ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$A^۲-۳A=\begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۳ & -۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۹ & ۶ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A^۲-۳A|=۴$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a$ و $\cos^۲ a-\sin^۲ a=\cos ۲a$ است و دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin bx+c$ به‌صورت $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$f(x)=\sin x\cos x(\sin^۲ x-\cos^۲ x)=-\sin x\cos x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=-\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x$$

$$f(x)=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin ۲(۲x)=-\frac{۱}{۴}\sin ۴x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ به معادله عمومی قطرها دو مقدار دلخواه m را اختصاص می‌دهیم. سپس با استفاده از معادله‌های حاصل برای دو قطر، مختصات مرکز دایره را به‌دست می‌آوریم.

مناسب‌ترین مقادیر که می‌توان به m اختصاص داد -۱ و ۲ است زیرا ضرایب x و y را صفر می‌کنند.

$$m=۲ \rightarrow (۲+۱)x+(۲-۲)y-۶\times ۲=۰ \rightarrow ۳x-۱۲=۰ \rightarrow x=۴$$

$$m=-۱ \rightarrow (-۱+۱)x+(۲-(-۱))y-۶\times(-۱)=۰ \rightarrow ۳y+۶=۰ \rightarrow y=-۲$$

بنابراین مختصات مرکز دایره $O(۴,-۲)$ است و اندازهٔ شعاع برابر فاصله OA می‌باشد.

$$R=\sqrt{(۱۲-۴)^۲+(-۸-(-۲))^۲}=\sqrt{۶۴+۳۶}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ طبق فرض داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}}_{B}A\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}}_{C}=\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}}_{D} \rightarrow BAC=D$$

طرفین تساوی را از سمت چپ در $B^{-۱}$ و از سمت راست در $C^{-۱}$ ضرب می‌کنیم. بنابراین:

$$\underbrace{B^{-۱}B}_{I}A\underbrace{CC^{-۱}}_{I}=B^{-۱}DC^{-۱} \rightarrow A=B^{-۱}DC^{-۱}$$

$$B^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix},\ C^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A=B^{-۱}DC^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A|=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$x \to ۳^+ : x > ۳ \to \frac{۱}{x} < \frac{۱}{۳} \to \frac{۳}{x} < ۱ \to -\frac{۳}{x} > -۱$

پس: $\lim\limits_{x \to ۳^+} x[\frac{۳}{-x}] = ۳[(-۱)^+] = ۳(-۱) = -۳$

$x \to ۳^- : x < ۳ \to \frac{۱}{x} > \frac{۱}{۳} \to \frac{۳}{x} > ۱ \to \frac{-۳}{x} < -۱$

پس: $\lim\limits_{x \to ۳^-} x[\frac{۳}{-x}] = ۳[(-۱)^-] = ۳(-۲) = -۶$

بنابراین حد راست ۳ واحد بیش‌تر از حد چپ است.

۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴ نکته، در تابع $y = a\sin(bx + x_۰) + c$، دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم برابر $|a| + c$ است. ابتدا مقدار و علامت a را تعیین می‌کنیم:

$y_{max} = |a| = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$

$f(۰) = a\sin(\frac{\pi}{۶}) = \frac{a}{۲} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \xrightarrow{a=\pm ۱} a = -۱$

از طرفی نمودار تابع در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، ۳ بار تکرار شده است. بنابراین داریم:

$۳T = ۲\pi \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} = ۳ \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$

با توجه به شکل نمودار، تابع در همسایگی $x = ۰$ صعودی است، بنابراین a و b باید هم‌علامت باشند:

$\Rightarrow b = -۳ \xrightarrow{a=-۱} a + b = -۴$

دقت کنید که مقدار انتقال افقی در بازهٔ $(۰, \frac{\pi}{۲})$ است، بنابراین بررسی کردن یکنوایی آن در همسایگی $x = ۰$ برای تعیین علامت‌های a و b کافی است.

۲۱ **۱** ۲ ۳ ۴ جرم گوگرد را در $۱kg$ سوخت پیدا می‌کنیم.

$ppm = \frac{\text{جرم } S}{\text{جرم سوخت}} \times ۱۰^۶$

$۶۴۰۰ = \frac{\text{جرم } S}{۱۰۰۰g} \times ۱۰^۶ \Rightarrow \text{جرم } S = ۶/۴g$

$S \xrightarrow{O_۲} SO_۳ \xrightarrow{H_۲O} H_۲SO_۴$

$\frac{۶/۴g}{۳۲} = \frac{x\,mol}{۱} \quad x = ۰/۲\,mol \Rightarrow C_m = \frac{۰/۲}{۱۰۰۰} = ۲ \times ۱۰^{-۴}\frac{mol}{L}$

$[H^+] = ۲ \times ۱۰^{-۴} \times ۲ \times ۱ = ۴ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow pH = -\log^{۴\times ۱۰^{-۴}} = ۴ - ۲\log ۲ = ۳/۴$

پس pH آب از ۷ به ۳٫۴ می‌رسد یعنی ۳٫۶ واحد کم می‌شود.

۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴ نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در آلومینیم کربنات $(Al_۲(CO_۳)_۳)$ و نسبت شمار آنیون‌ها به کاتیون‌ها در روی فسفات $(Zn_۳(PO_۴)_۲)$ با هم یکسان و برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۳ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا غلظت مولی یون هیدرونیوم را محاسبه می‌کنیم:

$[H_۳O^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲/۵} = ۱۰^{-۳+۰/۵} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۰/۵} = ۳ \times ۱۰^{-۳} mol \cdot L^{-۱}$

حجم محلول را یک لیتر فرض می‌کنیم:

$[H_۳O^+] = \frac{\text{مول } H_۳O^+}{\text{حجم محلول } (L)} \Rightarrow ۰/۰۰۳ = \frac{\text{مول } H_۳O^+}{۱(L)} \Rightarrow \text{مول } H_۳O^+ = ۰/۰۰۳mol$

$?gH_۳O^+ = ۰/۰۰۳molH_۳O^+ \times \frac{۱۹gH_۳O^+}{۱molH_۳O^+} = ۰/۰۵۷gH_۳O^+$

جرم محلول برابر است با:

$ppm = \frac{\text{جرم } H_۳O^+}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ \Rightarrow ۳۸ = \frac{۰/۰۵۷(g)}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ \Rightarrow \text{جرم محلول} = ۱۵۰۰g$

در نهایت چگالی محلول برابر است با:

$\text{چگالی محلول} = \frac{\text{جرم محلول}}{\text{حجم محلول}} \Rightarrow \text{چگالی محلول} = \frac{۱۵۰۰(g)}{۱۰۰۰(mL)} = ۱/۵g \cdot mL^{-۱}$

۲۴ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا دو واکنش داده‌شده را موازنه می‌کنیم.

آ) $TiCl_۴(l) + ۴LiH(s) \to Ti(s) + ۴LiCl(s) + ۲H_۲(g)$

ب) $PCl_۵(s) + ۴H_۲O(l) \to ۵HCl(g) + H_۳PO_۴(aq)$

مجموع ضرایب واکنش (آ)، ۱۲ و مجموع ضرایب واکنش (ب)، ۱۱ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در واکنش (ب) اسید (HCl و $H_۳PO_۴$) تولید شده؛ بنابراین pH کاهش می‌یابد.

۲) در واکنش (ب) عدد اکسایش همهٔ عنصرها ثابت می‌ماند (واکنش اکسایش - کاهش نیست).

۳) در واکنش (آ)، ۲ مول گاز و در واکنش (ب)، ۵ مول گاز تولید شده است.

۲۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$HCl + KOH \rightarrow KCl + H_۲O$$

$$pH = ۲/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۲/۷} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۰/۳} = ۲ \times ۱۰^{-۳} mol/L$$

چون HCl یک اسید قوی است، پس غلظت آن با غلظت $[H^+]$ برابر است.

$$?gKCl = ۵LHCl \times \frac{۲ \times ۱۰^{-۳} molHCl}{۱LHCl} \times \frac{۱molKCl}{۱molHCl} = ۱۰^{-۲} molKCl$$

$$Cl_۲ + ۲KBr \rightarrow ۲KCl + Br_۲$$

$$gKBr = ۱۰^{-۲} molKCl \times \frac{۲molKBr}{۲molKCl} \times \frac{۱۱۹gKBr}{۱molKBr} = ۱/۱۹gKBr$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم مادهٔ خالص}}{\text{جرم نمونهٔ ناخالص}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۶۵ = \frac{۱/۱۹}{x} \times ۱۰۰ \Rightarrow gKBr \text{ ناخالص} \simeq ۱/۸۳۰g$$

روش دوم:

$$(HCl + KOH \rightarrow KCl + H_۲O) \times ۲$$

$$Cl_۲ + ۲KBr \rightarrow ۲KCl + Br_۲$$

$$۲HCl \simeq ۲KBr$$

$$\frac{۵L \times ۲ \times ۱۰^{-۳} M}{۲} = \frac{xg \times ۶۵}{۲ \times ۱۱۹ \times ۱۰۰} \rightarrow x = ۱/۸۳۰g$$

۲۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

روش اول:

$$pH = ۱/۵ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱/۵} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۵} = ۳ \times ۱۰^{-۲}$$

نیتریک اسید یک اسید قوی است $\Leftarrow \alpha = ۱$

$$[H^+] = [HNO_۳] = ۰/۰۳mol \cdot L^{-۱}$$

$$[HNO_۳] = \frac{\text{مول } HNO_۳}{\text{حجم محلول } (L)} \Rightarrow ۰/۰۳(mol \cdot L^{-۱}) = \frac{\text{مول } HNO_۳}{۰/۱۵(L)} \Rightarrow \text{مول } HNO_۳ = ۴۵ \times ۱۰^{-۴}$$

$$HNO_۳(aq) + NaOH(aq) \rightarrow NaNO_۳(aq) + H_۲O(l)$$

$$?molNaOH = ۴۵ \times ۱۰^{-۴} molHNO_۳ \times \frac{۱molNaOH}{۱molHNO_۳} = ۴۵ \times ۱۰^{-۴} molNaOH$$

$$NaOH : [NaOH] = \frac{\text{مول } NaOH}{\text{حجم محلول } (L)} = \frac{۴۵ \times ۱۰^{-۴}(mol)}{۰/۲(L)} = ۲۲۵ \times ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱}$$

سدیم هیدروکسید یک باز قوی است $\Leftarrow \alpha = ۱$

$$[OH^-] = [NaOH] = ۲۲۵ \times ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱}$$

$$pOH = -\log[OH^-] = -\log ۲۲۵ \times ۱۰^{-۴} = -[۲\log ۳ + ۲\log ۵ + \log ۱۰^{-۴}] = ۱/۶$$

$$pH + pOH = ۱۴ \Rightarrow pH = ۱۲/۴$$

روش دوم:

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b \Rightarrow ۱ \times \underbrace{۱۰^{-۱/۵}}_{۰/۰۳} \times ۱۵۰ = ۱ \times M_b \times ۲۰۰ \Rightarrow M_b = ۲۲۵ \times ۱۵۴ mol \cdot L^{-۱}$$

$$[OH^-] = [NaOH] = ۲۲۵ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow [H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۲۲۵ \times ۱۰^{-۱۴}} = \frac{۱۰^{-۱۰}}{۲۲۵}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(\frac{10^{-10}}{225}) = \log \underbrace{225}_{9\times25} + 10 = 2\log 3 + 2\log 5 + 10$$

$$= (2 \times 0/5) + (2 \times 0/7) + 10 + 12/4$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴ عبارت‌های (آ) و (پ) درست‌اند.

آ)

$$FePO_4 : \text{آهن } (III) \text{ فسفات} \begin{cases} Fe^{3+} \\ PO_4^{3-} \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = 1$$

$$(NH_4)_2CO_3 : \text{آمونیوم کربنات} \begin{cases} 2NH_4^+ \\ CO_3^{2-} \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{1}{2}$$

و در پایان داریم:

$$\Rightarrow \frac{\text{نسبت شمار کاتیون به آنیون در } FePO_4}{\text{نسبت شمار آنیون به کاتیون در } (NH_4)_2CO_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

ب) نسبت تعداد اتم به تعداد عنصر در ترکیب‌های مورد نظر به صورت زیر است:

$$Al(OH)_3 : \text{آلومینیم هیدروکسید} \begin{cases} 7 \text{ اتم} \\ 3 \text{ عنصر} \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{3}$$

$$(NH_4)_3PO_4 : \text{آمونیوم فسفات} \begin{cases} 20 \text{ اتم} \\ 4 \text{ عنصر} \end{cases} \Rightarrow \frac{20}{4}$$

$$Fe_2(SO_4)_3 : \text{آهن } (III) \text{ سولفات} \begin{cases} 17 \text{ اتم} \\ 3 \text{ عنصر} \end{cases} \Rightarrow \frac{17}{3}$$

$$NaNO_3 : \text{سدیم نیترات} \begin{cases} 5 \text{ اتم} \\ 3 \text{ عنصر} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{3}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، نسبت تعداد اتم به تعداد عنصر در $Fe_2(SO_4)_3$ از بقیه بیش‌تر است.

پ) کلسیم فسفات $Ca_3(PO_4)_2$ جزء مواد نامحلول در آب به شمار می‌آید و این مطلب می‌رساند که:

میانگین پیوند یونی در $Ca_3(PO_4)_2$ و پیوندهای هیدروژنی در آب $>$ نیروی جاذبهٔ یون $-$ دوقطبی در محلول

ت) اتانول و شکر به صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و ماهیت ساختاری آن‌ها تغییر نمی‌کند. هم‌چنین ید (I_2) و باریم سولفات ($BaSO_4$) در آب نامحلول‌اند و با ریختن آن‌ها در آب، تغییری در ماهیت ساختاری آن‌ها به وجود نمی‌آید.

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به واکنش‌ها می‌توان قدرت کاهندگی گونه‌های داده‌شده را به‌صورت زیر نوشت:

$$\text{قدرت کاهندگی} : Ca > Zn > X > Cu$$

زیرا انجام واکنش (۱) نشانهٔ کاهنده‌تر بودن Ca نسبت به X و عدم انجام واکنش (۲) نشانهٔ کاهنده‌تر بودن Zn نسبت به X است. از واکنش (۳) هم به کاهنده‌تر بودن X نسبت به Cu پی می‌بریم. هرچه قدرت کاهندگی فلزی بیشتر باشد، E° آن کمتر است و در سری الکتروشیمیایی در جایگاه پایین‌تری قرار دارد.

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴ بررسی موارد:

مورد I) عناصر دورهٔ دوم در گروه‌های ۱۴ و ۱۶ به‌ترتیب C و O هستند که می‌توانند با یکدیگر مولکول CO یا CO_2 را تشکیل دهند که CO قطبی و CO_2 ناقطبی است: گشتاور دوقطبی CO کمتر از آب و گشتاور دو قطبی CO_2 کمتر از مولکول‌های قطبی چون هیدروژن سولفید است.

مورد II) آب، اتانول، هیدروژن‌کلرید و آمونیاک، قطبی‌اند که در میان آنها، آب، اتانول و آمونیاک، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارند.

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴ قانون هنری رابطهٔ انحلال‌پذیری گازها را با فشار گاز بیان می‌کند و مقایسهٔ انحلال‌پذیری مولکول‌های قطبی و ناقطبی، جزو قانون هنری نیست.

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ معادلهٔ انحلال N_2O_5 در آب به صورت زیر است:

$$N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2HNO_3 \xrightarrow{\text{یونش}} 2H^+ + 2NO_3^-$$

ابتدا با استفاده از pH، غلظت $[H^+]$ را به دست می‌آوریم:

$$[H^+] = 10^{-pH} \rightarrow [H^+] = 10^{-3/15} = 10^{-4} \times 10^{0/85} = 7 \times 10^{-4} mol \cdot L^{-1}$$

غلظت H^+ در نیم لیتر از محلول مورد نظر برابر $7 \times 10^{-4} M$ مولار است. پس در ادامه می‌توان نوشت:

$$1N_2O_5 \sim 2H^+ \rightarrow \frac{x mg N_2O_5 \times \frac{1g}{1000mg}}{1 \times 108} = \frac{7 \times 10^{-4} mol \cdot L^{-1} \times 0/5L}{2} \rightarrow x = 18/9 mg N_2O_5$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴ در تمام این گونه‌ها اکسیژن عدد اکسایش -2 و کلر عدد اکسایش -1 دارد:

$$\underline{Mn}O_4^{2-} : x + (-8) = -2 \Rightarrow x = +6$$

$$\underline{Al}Cl_4^- : x + (-4) = -1 \Rightarrow x = +3$$

$$\underline{S}_2O_3^{2-} : 2x + 3(-2) = -2 \Rightarrow 2x = +4 \Rightarrow x = +2$$

$Cr_۲O_۷^{۲-}$: $۲x + ۷(-۲) = -۲ \Rightarrow ۲x = ۱۲ \Rightarrow x = +۶$

۸ = ۲ + ۶ : جمع جبری کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد اکسایش

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴ قدرت کاهندگی Al از Zn بیشتر است؛ بنابراین می‌تواند با کاتیون‌های $Zn^{۲+}$ به‌طور طبیعی واکنش دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فلزهای با E° منفی با محلول هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و برای نگهداری این محلول مناسب نیستند.

۳) برای فلزها که تمایلی به جذب الکترون ندارند، خاصیت اکسندگی، یعنی کاهش یافتن (جذب الکترون) معنا ندارد.

۴) فاصلهٔ Al و Cu در سری الکتروشیمیایی بیشتر از فاصلهٔ Zn و Cu است؛ بنابراین سلول آلومینیم - مس ولتاژ بیشتری دارد.

Cu
Zn
Al

۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴ آ) ثابت یونش HA بزرگ‌تر از HB است. $\Leftarrow$ HA اسید قوی‌تری است.

ب) در شرایط یکسان، هرچه قدرت اسیدی بیشتر، pH کمتر است. HA اسید قوی‌تری است پس pH محلول آن کمتر است.

پ) در شرایط یکسان، هرچه اسید قوی‌تر باشد، درجه یونش بیشتر است.

ت) HA اسید قوی‌تری است پس بیشتر یونیده می‌شود. در نتیجه مولکول‌های HA باقی‌مانده، کمتر خواهد بود.

۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴ محاسبهٔ غلظت مولی محلول‌ها:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times ۱۰}{\text{جرم مولی}}$$

$$M_{(HA)} = \frac{۱۰ \times ۰/۲ \times ۱}{۲۰} = ۰/۱ mol \cdot L^{-۱}$$

$$M_{(BOH)} = \frac{۱۰ \times ۱ \times ۱}{۵۰} = ۰/۲ mol \cdot L^{-۱}$$

محاسبهٔ pH محلول اسید HA:

$$[H^+] = M\alpha = ۰/۱ \times (۰/۲ \times ۱۰^{-۲}) = ۲ \times ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱} \Rightarrow pH_{(HA)} = -\log(۲ \times ۱۰^{-۴}) = ۴ - \log ۲ = ۴ - ۰/۳ = ۳/۷$$

محاسبهٔ pH محلول باز BOH:

$$[OH^-] = M\alpha = ۰/۲ \times (۰/۵ \times ۱۰^{-۲}) = ۱۰^{-۳} mol \cdot L^{-۱} \Rightarrow [H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۳}} = ۱۰^{-۱۱} \Rightarrow pH = ۱۱$$

تفاوت pH دو محلول برابر ۷/۳ = (۳/۷ − ۱۱) است.

۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴ هرچه تغییر دمای محلول بیشتر باشد، فعالیت شیمیایی عنصر آزاد فلزی بیشتر از فلز موجود در محلول است؛ پس در این آزمایش فلز B که تغییر دمایی نداشته، نسبت به فلز D خاصیت کاهندگی کمتری دارد؛ بنابراین نمی‌تواند با کاتیون فلز C یا D واکنش دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فلزهای C و D با محلول واکنش داده‌اند؛ بنابراین محلول اولیه نمی‌تواند محلول نمکی از فلز C یا D باشد.

۲) فلز B برخلاف C با محلول واکنش نداده است؛ پس خاصیت کاهندگی این فلز از فلز C کمتر است.

نکته: با توجه به اینکه تغییر دمای محلول در واکنش با فلز C بیش از فلزهای دیگر این جدول است، پس تمایل به اکسایش یا به عبارتی، خاصیت کاهندگی C بیشترین است.

۴) طبق توضیحات بالا، خاصیت کاهندگی فلز D کمتر از فلز C است، پس پتانسیل کاهشی D بیشتر از C است.

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴ فاصلهٔ لیتیم و نقره در سری الکتروشیمیایی بیشتر از فاصلهٔ روی و نقره است (لیتیم کمترین E° را دارد) پس emf باتری لیتیم - نقره از روی - نقره بیشتر است.

گزینهٔ «۴» درست است؛ زیرا فلز پلاتین، تمایلی برای از دست دادن الکترون و اکسایش ندارد.

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ پنجمین عنصر گروه دوم، همان باریم (Ba) می‌باشد. برای شناسایی $Ba^{۲+}$ می‌توان از یون سولفات استفاده کرد، زیرا باریم سولفات در آب نامحلول است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: کلسیم فسفات همانند نقره کلرید رسوب سفیدرنگ است، اما در نقره کلرید پیوندهای کووالانسی دیده نمی‌شود، زیرا یون‌های سازندهٔ آن تک‌اتمی هستند.

گزینهٔ «۳»: با افزودن $NaCl$ به این محلول، یون‌های Ag^+ را می‌توان از سایر یون‌ها جدا کرد.

گزینهٔ «۴»: جمع جبری بار یون‌های «$NH_۴^+$، OH^-، $SO_۴^{۲-}$، $Fe^{۲+}$ و $NO_۳^-$» برابر با -۱ است.

۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴ برای محاسبهٔ غلظت مولی لازم است مقدار مول حل‌شونده و حجم محلول را به دست آوریم:

$$?mol Na_۲SO_۴ = ۷/۱ g Na_۲SO_۴ \times \frac{۱ mol Na_۲SO_۴}{۱۴۲ g Na_۲SO_۴} = ۰/۰۵ mol Na_۲SO_۴$$

$$\text{حجم محلول} = (۵۲/۹ + ۷/۱ g) \times \frac{\text{محلول } ۱ mL}{\text{محلول } ۱/۲ g} \times \frac{\text{محلول } ۱ L}{\text{محلول } ۱۰۰۰ mL} = \text{محلول } ۰/۰۵ L$$

بنابراین غلظت مولی این محلول برابر است با:

$$M_{(Na_2SO_4)}=\frac{0/05 mol Na_2SO_4}{\text{محلول } 0/05 L}=1\frac{mol}{L}$$

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴ موارد «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) غشای مبادله‌کننده مربوط به یون هیدرونیوم است نه گاز هیدروژن.

پ) باید واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها جابه‌جا شوند.

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$K=\frac{p^2}{2m}\rightarrow\frac{K_B}{K_A}=(\frac{p_B}{p_A})^2(\frac{m_A}{m_B})\rightarrow 5=(1)(\frac{m_A}{m_B})\rightarrow\frac{m_A}{m_B}=5$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که نسبت نیروی مرکز گرای ماهواره به نیروی وزن آن در سطح زمین، همانند نسبت شتاب گرانش در محل حضور ماهواره به شتاب گرانش سطح زمین است. یعنی:

وزن ماهواره درسطح زمین $=\frac{1}{16}$ نیروی مرکزگرای ماهواره $=$ نیروی جاذبه‌ی گرانش نیوتون بین $Me\ ,m$

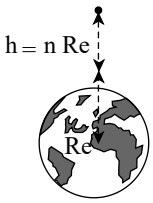
$$W'=\frac{1}{16}W\Rightarrow\frac{GmMe}{(\mathrm{Re}+h)^2}=\frac{1}{16}\frac{GmM_e}{\mathrm{Re}^2}\Rightarrow\frac{1}{(\mathrm{Re}+h)^2}=\frac{1}{16}\times\frac{1}{(\mathrm{Re})^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mathrm{Re}+h}=\frac{1}{4\,\mathrm{Re}}\Rightarrow h=3\,\mathrm{Re}$$

۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴ شتاب گرانشی با مجذور فاصله از مرکز زمین رابطهٔ معکوس دارد $(g'\propto\frac{1}{r^2})$. در صورتی که شعاع کرهٔ زمین را برابر R_e فرض کنیم، فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر از مرکز زمین برابر است با:

$$r=R_e+h=R_e+nR_e=(n+1)R_e$$

اگر شتاب گرانش در سطح زمین برابر g باشد. و برای محاسبه‌ی محلی که شتاب گرانش $\frac{1}{4}$ سطح زمین است داریم:



$$\frac{g'}{g}=\frac{\frac{GMe}{r^2}}{\frac{GMe}{R_e^2}}=(\frac{R_e}{r})^2=(\frac{R_e}{(n+1)R_e})^2=\frac{1}{4}$$

جذر گرفتن از طرفین رابطه $\Rightarrow\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow n=1$

تذکر: به طور ذهنی نیز می‌توان گفت اگر فاصله از مرکز زمین از R_e به $2R_e$ برسد، شتاب گرانش $\frac{1}{4}$ برابر می شود.

شتاب g، $r\Rightarrow$ دو برابر می شود $\Rightarrow$ برابر می شود $\frac{1}{4}$

$$g=\frac{GM_e}{r^2}\Rightarrow\begin{cases}r=2R_e\\r=h+R_e\end{cases}\Rightarrow h=R_e$$

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ضربه سبب می‌شود که جسم از حال سکون با سرعت اولیه‌ای پرتاب شود. سرعت پس از ضربه برای حرکت کندشونده روی سطح افقی سرعت اولیه خواهد بود.

$$F\cdot\Delta t=mv-mv_0\Rightarrow 2=0/2v-0\Rightarrow v=10\xrightarrow{\text{پس از ضربه}}v_0=10\ m/s$$

اکنون با بررسی بخش سینماتیکی برای محاسبهٔ شتاب داریم:

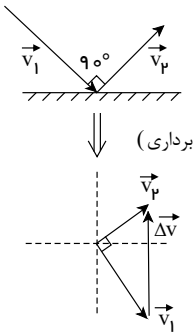
$$v^2-v_0^2=2ax\Rightarrow 0-100=2a\times 10\Rightarrow a=-5$$

با داشتن شتاب و بر اساس قانون دوم نیوتون :

$$0-f=ma\Rightarrow-\mu\cancel{m}g=\cancel{m}a\Rightarrow-\mu=-\frac{5}{10}\Rightarrow\mu=0/5$$

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: در بررسی تغییرات تکانه باید توجه داشته باشید که تکانه کمیتی برداری است، بنابراین در محاسبه آن باید $\Delta\vec{v}$ را بصورت اندازه تغییرات سرعت (مفهوم برداری) در نظر بگیرید نه تغییرات اندازه حرکت (مفهوم عددی تغییر سرعت).



باتوجه به شکل برداری روبرو و عمود بودن $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ می توان گفت:

$$|\Delta\vec{v}|=\sqrt{|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2}\Rightarrow|\Delta\vec{v}|=5\frac{m}{s}\Rightarrow|\Delta\vec{p}|=m_0\,|\Delta\vec{v}|\Rightarrow|\Delta\vec{p}|=1\times 5=5kg\frac{m}{s}$$

* دقت کنید که برای محاسبه برداری $\Delta\vec{v}$ باید، ۲ بردار را از یک مبدأ مختصات و در یک دستگاه رسم کرده و سپس اقدام به محاسبه بردار $\Delta\vec{v}$ از نظر جهت و اندازه نمائید.

۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر حجم سیاره ۸ برابرحجم کرهٔ زمین باشد، شعاع سیاره ۲ برابر شعاع کرهٔ زمین است.

طبق رابطه $g=\frac{GM_e}{r^2}$ داریم:

$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$ ⇐ حجم کره

$V = ۸Ve \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = ۸ \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳ e \Rightarrow R = ۲Re$

$g = \frac{GM}{R^۲} = G \times \frac{۴Me}{(۲\,\mathrm{Re})^۲} = G\frac{۴Me}{۴\mathrm{Re}^۲} \Rightarrow g = g_e = ۹٫۸\, m/s^۲$

۴۷ ۱ ۲ ۳ **۴** طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص متوسط وارد بر جسم برابر است با:

$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$

از طرف دیگر مساحت سطح زیر نمودار نیرو – زمان برابر با تغییرات تکانه است. بنابراین داریم:

$F_{av} = \frac{۱۴٫۴}{(۴٫۹ - ۳٫۷)} \Rightarrow F_{av} = ۱۲N$

۴۸ ۱ **۲** ۳ ۴ نیروی کشش نخ نقش نیروی مرکزگرا را ایفا می‌کند، بنابراین داریم:

$T = \frac{t}{n} \Rightarrow T = \frac{۱}{۱} = ۱(s) \Rightarrow T = \frac{۲\pi r}{v} = ۱ = \frac{۲\pi \times ۰٫۲۵}{v} = v = ۰٫۵ m/s$

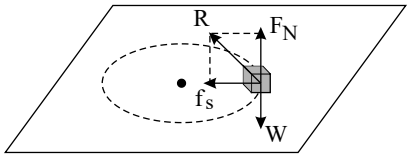
$F_{net} = \frac{mv^۲}{r} \Rightarrow T_{\text{نخ}} = m\frac{v^۲}{r} = ۰٫۲ \times \frac{(۰٫۵)^۲}{۰٫۲۵} = ۲N$

۴۹ ۱ **۲** ۳ ۴ سطح زمین نیروی $R = \sqrt{f_s^۲ + F_N^۲}$ را وارد می‌کند. نیروی مرکزگرا هم، همان نیروی f_s می‌باشد:

$W = mg$

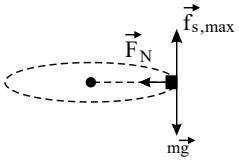
$\begin{cases} R = ۱۰^۴\sqrt{۱۰}N = \sqrt{f_s^۲ + W^۲} \\ W = mg = (۳ \times ۱۰^۳)(۱۰) = ۳ \times ۱۰^۴ N \end{cases} \Rightarrow f_s^۲ + ۹ \times ۱۰^۸ = ۱۰ \times ۱۰^۸ \Rightarrow f_s^۲ = ۱۰^۸$

$\Rightarrow f_s = ۱۰^۴ N$



۵۰ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به شکل، چون جسم در آستانهٔ لغزش قرار دارد $f_{s,max} = mg$ است. از طرف دیگر، $f_{s,max} = \mu_s F_N$ است. با توجه به این که در این جا F_N برابر با نیروی مرکزگرا است. ابتدا تندی را حساب می‌کنیم.

$v = \frac{۲\pi r}{T} \xrightarrow[T=۲٫۴s]{r=۲m,\pi=۳} v = \frac{۲ \times ۳ \times ۲}{۲٫۴} = ۵m/s$



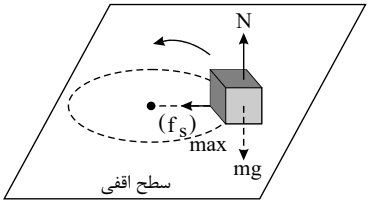
برای محاسبه ضریب اصطکاک ایستایی می‌توان گفت:

$f_{s,max} = mg \xrightarrow[F_N = m\frac{v^۲}{r}]{f_{s,max} = \mu_s F_N} \mu_s \times m\frac{v^۲}{r} = mg \Rightarrow \mu_s \times \frac{۲۵}{۲} = ۱۰ \Rightarrow \mu_s = ۰٫۸$

۵۱ ۱ **۲** ۳ ۴ در اینجا، نیروی اصطکاک ایستایی، نقش نیروی مرکز گرا را بازی می‌کند. بنابراین داریم:

$F_r = (f_s)_{max} = m\frac{r_m^۲}{R} \rightarrow F_r = \mu_s F_N = \mu_s mg = ۰٫۵ \times ۱۲۰۰۰$

$\rightarrow F_r = ۶۰۰۰N$



۵۲ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا با توجه به تعریف دورهٔ تناوب، تندی حرکت ذره را به دست می‌آوریم:

$T = \frac{۱\ \mathrm{min}}{۶} \times \frac{۶۰s}{۱\ \mathrm{min}} = ۱۰s$

محیط دایره : $۲\pi r = ۱۲ \Rightarrow ۲ \times ۳ \times r = ۱۲ \Rightarrow r = ۲m$

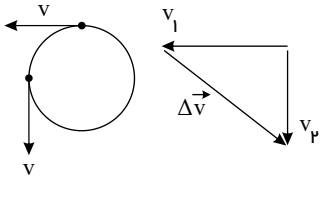
$T = \frac{۲\pi r}{v} = ۱۰ = \frac{۲ \times ۳ \times ۲}{v} \Rightarrow v = \frac{۱۲}{۱۰} = \frac{۶}{۵} m/s$

اکنون با استفاده از رابطهٔ شتاب مرکزگرا داریم:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(\frac{6}{5})^2}{2} = \frac{36}{50} = \frac{18}{25} m/s^2$$

۵۳ ۱ ۲ ۳ ۴

در مدتی که ربع دایره را طی می‌کند، بردارهای سرعتش برهم عمود هستند. یعنی:



$$\Delta v = v_1\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

$$T = \frac{1}{f} = 4s \Rightarrow \Delta t = 1s \text{ (ربع دور)} \Rightarrow \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10\sqrt{2}}{1} = 10\sqrt{2}\frac{m}{s^2}$$

۵۴ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم که دورهٔ گردش عقربهٔ ساعت شمار معادل ۱۲ساعت و دورهٔ گردش عقربهٔ دقیقه شمار معادل ۱ساعت است. بنابراین داریم:

$$v = r \times \frac{2\pi}{T} \qquad \frac{v_h}{v_m} = \frac{\frac{r_n}{T_h}}{\frac{r_m}{T_m}} = \frac{r_h}{r_m} \times \frac{T_m}{T_h} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴	۱۵	۴	۲۹	۳	۴۳	۱
۲	۴	۱۶	۳	۳۰	۳	۴۴	۲
۳	۳	۱۷	۴	۳۱	۳	۴۵	۳
۴	۱	۱۸	۲	۳۲	۱	۴۶	۳
۵	۳	۱۹	۳	۳۳	۲	۴۷	۴
۶	۳	۲۰	۳	۳۴	۴	۴۸	۲
۷	۳	۲۱	۱	۳۵	۲	۴۹	۲
۸	۳	۲۲	۳	۳۶	۳	۵۰	۴
۹	۲	۲۳	۱	۳۷	۲	۵۱	۲
۱۰	۴	۲۴	۴	۳۸	۲	۵۲	۳
۱۱	۳	۲۵	۴	۳۹	۱	۵۳	۱
۱۲	۲	۲۶	۴	۴۰	۲	۵۴	۱
۱۳	۲	۲۷	۱	۴۱	۴		
۱۴	۱	۲۸	۳	۴۲	۱		