آزمون جامع: شماره یک

بنام آفریدگار زیبایی:

درس: هندسه و گسسته

ویژه : کنکور ۱۴۰۳

پدرام کرد

۱) اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}۲i-j & ,i<j\\ i+j & ,i=j\\ i+۲j & ,i>j\end{cases}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۲) اگر $A^۲=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & -۳\end{bmatrix}$ و $A^۲=۳A+۴I_۲$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۳) اگر $AB=B$ و $BA=A$ حاصل $(A+B)(A-B)$ کدام است؟

۱) $۲A-۲B$ ۲) $A-B$ ۳) $۲A+۲B$ ۴) $A+B$

۴) ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ و $C=[c_{ij}]_{۲\times۲}$ مفروض‌اند، کدام عبارت قابل تعریف نیست؟

۱) $AB+C$ ۲) BCA ۳) ABC ۴) $BC+A$

۵) اگر $A^۲=۵A$ حاصل $(A-۳I)^۴$ کدام است؟

۱) $۱۳I-۸۱A$ ۲) $۱۳A-۸۱I$ ۳) $۸۱I+۱۳A$ ۴) $۸۱I-۱۳A$

۶ اگر $A^{۲}=\begin{bmatrix} ۸ & ۲ \\ ۱۸ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B^{۲}=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱۵ & ۱۲ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۱۲ & -۱ \\ ۱۵ & ۰ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲۱ & -۶ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} -۶ & ۱ \\ ۲۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۷ اگر $\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+e$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

۸ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x \\ ۰ & -x & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) ۲
۴) -۲

۹ دو کیسه داریم که در اولی ۳ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ قرمز و در دومی ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز موجود است. از هر کیسه ۲ مهره به‌تصادف خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این ۴ مهره هم‌رنگ هستند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۷}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۰ علی و امیرحسین به‌همراه ۵ نفر دیگر در یک صف پشت‌سرهم ایستاده‌اند. با کدام احتمال بین علی و امیرحسین فقط یک نفر قرار دارد؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$
۲) $\frac{۵}{۴۲}$
۳) $\frac{۵}{۲۱}$
۴) $\frac{۹}{۲۵}$

۱۱ اگر $P(A\cup B')=۰/۶$ و $P(A'\cup B)=۰/۷$ و $P(A'\cup B')=۰/۸$ باشد، حاصل $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۹
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۷

۱۲) عددی به‌تصادف از مجموعهٔ اعداد $\{۲۵, ۲۶, \dots, ۱۲۵\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد بر ۴ بخش‌پذیر نباشد یا ۶ بخش‌پذیر نباشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۶۷}{۱۰۱}$ ۲) $\frac{۶۸}{۱۰۱}$ ۳) $\frac{۹۳}{۱۰۱}$ ۴) $\frac{۸}{۱۰۱}$

۱۳) اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$، $B = \{b, c\}$ و $C = \{b, d, e\}$ سه پیشامد از این فضای نمونه‌ای باشند به‌طوری که $P(A) = \frac{۱}{۲}$، $P(B) = \frac{۱}{۴}$ و $P(C) = \frac{۱}{۳}$، حاصل $P(\{a, b, c\})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲۴}$

۱۴) اگر $P(A) = \frac{۱}{۲}$, $P(B) = \frac{۱}{۳}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۴}$، در این صورت $P(B'|A') + P(A'|B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۱۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳۵}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۴}$

۱۵) ظرف A شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ قرمز و ظرف B شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ قرمز است. ۲ مهره از ظرف A و ۳ مهره از ظرف B برداشته و در ظرف C می‌گذاریم. سپس یک مهره از ظرف C برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد که این مهره سفید باشد؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۹}{۲۰}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ **۳** ۴ داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۲-۲ & ۲-۳ \\ ۲+۲ & ۲+۲ & ۴-۳ \\ ۳+۲ & ۳+۴ & ۳+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۴ & ۱ \\ ۵ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $=۲۸$

۲ ۱ **۲** ۳ ۴ ماتریس A را برحسب $A^۲$ و I به دست می‌آوریم:

$$A^۲=۳A+۴I_۲ \to ۳A=A^۲-۴I_۲ \to A=\frac{۱}{۳}(A^۲-۴I_۲) \to A=\frac{۱}{۳}(\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}) \to A=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} -۳ & ۳ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\to A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A = -۱+۱-۱=-۱$

۳ **۱** ۲ ۳ ۴ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$AB=B \xrightarrow{A=BA} B\underbrace{AB}_{B}=B \to B^۲=B$$

$$BA=A \xrightarrow{B=AB} A\underbrace{BA}_{A}=A \to A^۲=A$$

$$(A+B)(A-B)=\underbrace{A^۲}_{A}-\underbrace{AB}_{B}+\underbrace{BA}_{A}-\underbrace{B^۲}_{B}=۲A-۲B$$

۴ ۱ ۲ ۳ **۴** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $\underbrace{[A]_{۲\times۳}\times[B]_{۳\times۲}}_{۲\times۲}+[C]_{۲\times۲}=[AB+C]_{۲\times۲}$

گزینهٔ ۲ : $\underbrace{[B]_{۳\times۲}\times[C]_{۲\times۲}}_{۳\times۲}\times[A]_{۲\times۳}=[BCA]_{۳\times۳}$

گزینهٔ ۳ : $\underbrace{[A]_{۲\times۳}\times[B]_{۳\times۲}}_{۲\times۲}\times[C]_{۲\times۲}=[ABC]_{۲\times۲}$

در گزینهٔ «۴»، BC یک ماتریس ۲×۳ و A یک ماتریس ۳×۲ است، پس جمع آن‌ها امکان‌پذیر نیست.

۵ ۱ ۲ ۳ **۴** برای ماتریس موردنظر داریم:

$$(A-۳I)^۴=((A-۳I)^۲)^۲=(\underbrace{A^۲}_{۵A}-۶A+۹I)^۲=(۹I-A)^۲$$

$$=۸۱I+\underbrace{A^۲}_{۵A}-۱۸A=۸۱I-۱۳A$$

۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$(A-B)^۲=A^۲+B^۲-(AB+BA)$$

$$\to \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۸ \\ ۴ & ۱۸ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}-(AB+BA)$$

$$\to \begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۲ \\ ۰ & ۲۱ \end{bmatrix}-(AB+BA) \to AB+BA=\begin{bmatrix} -۱ & ۱۲ \\ ۰ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

۷ **۱** ۲ ۳ ۴ برای اینکه این ضرب قابل انجام باشد A باید یک ماتریس سطری ۳×۱ باشد:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲x & ۲y & ۲z \\ x & y & z \\ ۳x & ۳y & ۳z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix} \to \begin{cases} x=۳ \\ y=۱ \\ z=-۱ \end{cases}$$

$$\to a+b+e=۲x+۲y+۳y=۶+۲+۳=۱۱$$

۸ ۱ **۲** ۳ ۴ از سمت چپ، ضرب ماتریس‌ها را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲ & ۱\\ ۱ & -x & ۰\\ -۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰ \to \begin{bmatrix}-x+۱ & -۲x-۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰ \to -x^{۲}+x-۴x-۲=۰$$

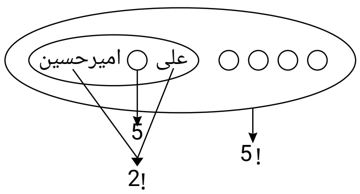
$$\to -x^{۲}-۳x-۲=۰ \to x^{۲}+۳x+۲=۰ \to \text{مجموع ریشه‌ها}: \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۳$$

۹ ۱ **۲** ۳ ۴ چون تعداد مهره‌های قرمز در ظرف اول کمتر از ۲ می‌باشد، پس تنها حالت ممکن آن است که از هر ظرف، ۲ مهرهٔ آبی خارج شده باشد.

$$P(\underbrace{\text{۴ مهرهٔ هم‌رنگ}}_{A})=P(\text{۲ مهره از اولی آبی})\times P(\text{۲ مهره از دومی آبی}) \Rightarrow P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۴}{۲}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۳}{۶}\times\frac{۶}{۲۱}=\frac{۱}{۷}$$

۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴

علی و امیرحسین و نفر وسط را یک نفر در نظر می‌گیریم که با چهار نفر دیگر تشکیل یک مجموعهٔ ۵ عضوی را می‌دهند و به !۵ حالت جابه‌جا می‌شوند.



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲!\times ۵\times ۵!}{۷!}=\frac{۵\times ۲}{۷\times ۶}=\frac{۵}{۲۱}$$

۱۱ **۱** ۲ ۳ ۴ با کمک قانون دمورگان و قانون متمم خواهیم داشت:

$$P(A'\cup B')=۱-P(A\cap B)=۰٫۸ \to P(A\cap B)=۰٫۲$$

$$P(A'\cup B)=۱-P(A\cap B')=۰٫۷ \to P(A\cap B')=۰٫۳ \to P(A-B)$$

$$=P(A)-\cancel{P(A\cap B)}^{۰٫۲}=۰٫۳ \Rightarrow P(A)=۰٫۵$$

$$P(A\cup B')=۱-P(A'\cap B)=۰٫۶ \to P(B\cap A')=۰٫۴ \to P(B-A)$$

$$=P(B)-\cancel{P(A\cap B)}^{۰٫۲}=۰٫۴ \Rightarrow P(B)=۰٫۶$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰٫۵+۰٫۶-۰٫۲=۰٫۹$$

۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$A_{۴}$: اعداد مضارب ۴ , $A_{۶}$: اعداد مضارب ۶

$$P(A'_{۴}\cup A'_{۶})=P(A_{۴}\cap A_{۶})'=۱-P(A_{۴}\cap A_{۶})=۱-P(A_{۱۲})=۱-\frac{\left(\left[\frac{۱۲۵}{۱۲}\right]-\left[\frac{۲۴}{۱۲}\right]\right)}{۱۲۵-۲۵+۱}=۱-\frac{۸}{۱۰۱}=\frac{۹۳}{۱۰۱}$$

تذکر ۱: قوانین دمورگان

$$\begin{cases}(A\cap B)'=A'\cup B'\\ (A\cup B)'=A'\cap B'\end{cases}$$

تذکر ۲: عددی که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۱۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$S=\{a,b,c,d,e\}\xrightarrow{P(S)=۱}P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)=۱$$

$$A=\{a,b\} \quad\Rightarrow\quad P(A)=P(a)+P(b)=\frac{۱}{۲}$$

$$B=\{b,c\} \quad\Rightarrow\quad P(B)=P(b)+P(c)=\frac{۱}{۴}$$

$$C=\{b,d,e\} \quad\Rightarrow\quad P(C)=P(b)+P(d)+P(e)=\frac{۱}{۳}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow}\quad (P(a)+P(b))+(P(b)+P(c))+(P(b)+P(d)+P(e))=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۳}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)}_{P(S)=۱}+۲P(b)=\frac{۱۳}{۱۲}\Rightarrow ۲P(b)=\frac{۱۳}{۱۲}-۱=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(b)=\frac{۱}{۲۴}$$

$$P(\{a,b,c\})=P(A)+P(B)-P(b)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

۱۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴) طبق رابطهٔ احتمال شرطی داریم:

$$P(B'|A')+P(A'|B')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}+\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}$$

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\quad ,\ P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

از طرفی داریم:

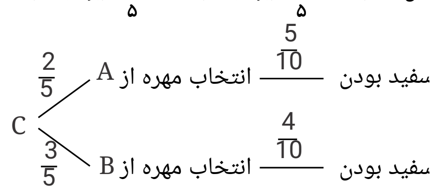
$$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(B'|A')+P(A'|B')=\frac{۵}{۱۲}(۲+\frac{۳}{۲})=\frac{۳۵}{۲۴}$$

۱۵ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

ظرف C شامل ۲ مهره از ظرف A و ۳ مهره از ظرف B است. پس مهرهٔ انتخابی از ظرف C، $\frac{۲}{۵}$ مربوط به ظرف A و $\frac{۳}{۵}$ مربوط به ظرف B است.

در این‌جور مسائل از آخر حل می‌کنیم:



$$P(\text{سفید})=P(A)\times P(\text{سفید}\ |A)+P(B)\times P(\text{سفید}\ |B)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۱}{۲۵}$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	۲	**۳**	۴
۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	**۱**	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	**۴**
۵	۱	۲	۳	**۴**
۶	۱	**۲**	۳	۴
۷	**۱**	۲	۳	۴
۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	۱	**۲**	۳	۴
۱۰	۱	۲	**۳**	۴
۱۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	**۱**	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۵	**۱**	۲	۳	۴