پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l}۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲}\\ \sin u=۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}\end{array}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۱}{۲}\to\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})=-\cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{-۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}}=\frac{-۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲$$

۲ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ می‌دانیم: $\boxed{۱+\cos ۲a=۲\cos^۲ a}$

$$\cos ۲x+۲\cos^۲x=۰\to\cos ۲x+۱+\cos ۲x=۰\to ۲\cos ۲x=-۱\to\cos ۲x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\to\cos ۲x=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{۲\pi}{۳}\to ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\to x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

۳ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

$$۲\sin(\pi-x)\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)+۳\cot x\sin(\pi+x)=۰\ \Rightarrow ۲\sin x\cdot\sin x+۳\frac{\cos x}{\sin x}(-\sin x)=۰$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲x-۳\cos x=۰\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲x)-۳\cos x=۰\Rightarrow ۲\cos^۲x+۳\cos x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{\cos x=A} ۲A^۲+۳A-۲=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=۹+۱۶=۲۵\to\begin{cases}A=\dfrac{-۳+۵}{۴}=\dfrac{۱}{۲}\\ A=\dfrac{-۳-۵}{۴}=-۲\end{cases}$$

$$A=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

$A=-۲\Rightarrow\cos x=-۲$ امکان ندارد $(-۱\leq\cos x\leq ۱)$

۴ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

$A^{-۱}$ را از سمت چپ در رابطهٔ ماتریسی ضرب می‌کنیم:

$$AX=A-۲I\xrightarrow{A^{-۱}\times}\underbrace{A^{-۱}A}_{I}X=A^{-۱}(A-۲I)\Rightarrow X=A^{-۱}A-۲A^{-۱}I$$

$$\Rightarrow X=I-۲A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-۲\times\frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۴&۲\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۴&۲\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-۲&۱\\۴&-۱\end{bmatrix}$$

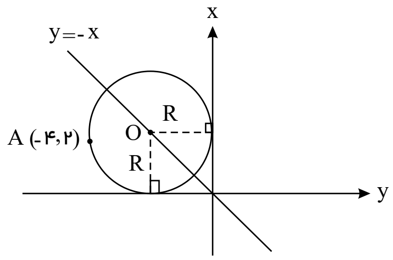
۵ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

$$(\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ)\cos ۱۰^\circ=\left(\frac{\sin ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ}-\frac{\sin ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}\right)\cos ۱۰^\circ=\left(\frac{\sin ۵۰^\circ\cos ۴۰^\circ-\cos ۵۰^\circ\sin ۴۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ\cos ۴۰^\circ}\right)\cos ۱۰^\circ$$

$$=\frac{\sin(۵۰^\circ-۴۰^\circ)}{\cos(۹۰^\circ-۴۰^\circ)\cos ۴۰^\circ}\times\cos ۱۰^\circ=\frac{\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ\cos ۴۰^\circ}=\frac{\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۸۰^\circ}=\frac{۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{\sin(۹۰^\circ-۱۰^\circ)}$$

$$=\frac{۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=۲\sin ۱۰^\circ$$

۶ ۴ **۳** ۲ ۱



با توجه به شکل، مرکز دایره‌ای که بر هر دو محور مختصات مماس است و از نقطه $A(-۴,۲)$ می‌گذرد بر روی نیمساز ربع دوم و چهارم به معادله $y=-x$ قرار دارد. بنابراین مختصات مرکز دایره $O(-R,R)$ می‌باشد و معادله دایره به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$$

نقطه $A(-۴,۲)$ روی دایره قرار دارد و مختصات آن در معادله دایره صدق می‌کند، یعنی:

$$(-۴+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲ \to ۱۶-۸R+R^۲+۴-۴R+R^۲=R^۲$$

$$\to R^۲-۱۲R+۲۰=۰ \to (R-۱۰)(R-۲)=۰ \to \begin{cases} R=۱۰ \\ R=۲ \end{cases}$$

۷ **۴** ۳ ۲ ۱ معادله ضمنی دایره به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$x^۲+y^۲-۲\sqrt{۲}x+۲\sqrt{۲}y-۱=۰$$

با استفاده از معادله ضمنی، شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲\sqrt{۲})^۲+(۲\sqrt{۲})^۲-۴(-۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸+۸+۴}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰}=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۵})=\sqrt{۵}$$

مساحت دایره برابر است با:

$$S=\pi R^۲=\pi(\sqrt{۵})^۲=۵\pi$$

۸ **۴** ۳ ۲ ۱

$$۳x+۱|x+۲ \xrightarrow{\times ۳} \left\{\begin{array}{l} ۳x+۱|۳x+۶ \\ ۳x+۱|۳x+۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳x+۱|۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x+۱=۵ \Rightarrow x=\frac{۴}{۳} \\ ۳x+۱=-۵ \Rightarrow x=-۲ \\ ۳x+۱=۱ \Rightarrow x=۰ \\ ۳x+۱=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

بنابراین هیچ مقدار طبیعی برای x وجود ندارد.

۹ **۴** ۳ ۲ ۱

می‌دانیم: $\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta$ ، $۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$ ، $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$

$$\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{(۱-\sin^۲\theta)-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta}\times\frac{۱}{\sin^۲\theta}}{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\sin^۲\theta\cos^۲\theta}}{\cos^۲\theta\underbrace{(۱-\cos^۲\theta)}_{\sin^۲\theta}}=\frac{۱}{\sin^۴\theta\cos^۴\theta}$$

$$=\frac{۱}{(\sin\theta\cos\theta)^۴}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)^۴}=\frac{۱۶}{\sin^۴ ۲\theta}=۱۶\sin^{-۴}۲\theta$$

۱۰ ۴ ۳ **۲** ۱ سعی کنیم $a^۲$ را حذف کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} d|۳a-۱ \xrightarrow{\times a} d|۳a^۲-a \\ d|a^۲+a \xrightarrow{\times ۳} d|۳a^۲+۳a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|۴a$$

حال سعی می‌کنیم a را حذف کنیم:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d|۴a \xrightarrow{\times ۳} d|۱۲a \\ d|۳a-۱ \xrightarrow{\times ۴} d|۱۲a-۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|۴$$

پس $d\in\{۱,۲,۴\}$ و مجموع مقادیر مختلف می‌شود: $۱+۲+۴=۷$.

۱۱ ۴ ۳ ۲ **۱**

ابتدا از توان‌های کوچک‌تر عدد ۵ شروع می‌کنیم.

شرق دخترانه حسابی ۸ آذر

$$۵^۳ = ۱۲۵ \overset{۴۱}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۵^۲} ۵^۵ \overset{۴۱}{\equiv} ۵۰ \overset{۴۱}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵^{۱۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۸۱ \overset{۴۱}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵^{۲۰} \overset{۴۱}{\equiv} (-۱)^۲ = ۱$$

۱۲ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ می‌دانیم که $۱ - \cos ۲a = ۲\sin^۲ a$ و $۱ + \cos ۲a = ۲\cos^۲ a$ است.

$$\sqrt{\frac{۱ - \cos ۲x}{۱ + \cos ۲x}} = \sqrt{\frac{۲\sin^۲ x}{۲\cos^۲ x}} = \sqrt{\tan^۲ x} = |\tan x| = -\tan x$$

چون حاصل قدر مطلق، قرینه بیرون آمده نتیجه می‌گیریم:

$\tan x < ۰ \Rightarrow$ x در ناحیهٔ دوم یا چهارم واقع است.

۱۳ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

می‌دانیم: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$\frac{\cos ۲۰^\circ \sin ۱۰^\circ - \sin ۲۰^\circ \cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} = \frac{\sin(۱۰^\circ - ۲۰^\circ)}{\cos ۱۰^\circ} = \frac{-\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} = -\tan ۱۰^\circ$$

۱۴ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ می‌دانیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

چون $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$ هستند، پس داریم:

$$S = \tan\alpha + \tan\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۳}{۲}$$

$$P = \tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{۱ - (-\frac{۱}{۲})} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = -۱$$

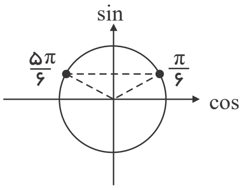
۱۵ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ می‌دانیم: $\boxed{\sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴}) = \sin x - \cos x}$

$$\sin ۲x = ۲\sin^۲(x - \frac{\pi}{۴}) = (\sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴}))^۲ = (\sin x - \cos x)^۲ = ۱ - \sin ۲x$$

$$\Rightarrow \sin ۲x = ۱ - \sin ۲x \Rightarrow ۲\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} ۲x = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۱۲} \\ ۲x = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{۱۲} + \frac{۵\pi}{۱۲} = \frac{۶\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۲}$$

توجه کنید معادله‌ی $\sin\alpha = \frac{۱}{۲}$ در یک دور از دایره‌ی مثلثاتی دو جواب $\alpha = \frac{\pi}{۶}$ و $\alpha = \frac{۵\pi}{۶}$ را دارد.



۱۶ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

$$\frac{۳}{۲}\cos x - \sin^۲ x = ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\cos x - (۱ - \cos^۲ x) = ۰$$

$$\frac{۳}{۲}\cos x - ۱ + \cos^۲ x = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x + \frac{۳}{۲}\cos x - ۱ = ۰$$

$$\Delta = \frac{۹}{۴} + ۴ = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow \cos x = \frac{-\frac{۳}{۲} \pm \frac{۵}{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -۲ \\ \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{\cos x = \cos\alpha \rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha} x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۷ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

نکته: اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ باشد و $k \in \mathbb{R}$ آنگاه:

$۱)|kA| = k^n|A|$
$۲)|A^n| = |A|^n$

$$|A| \xrightarrow{\text{ساروس}} (۳ + ۰ + ۶) - (-۱ + ۱۲ + ۰) = ۹ - ۱۱ = -۲$$

$$\left|\frac{۱}{۲}A^۳\right| = (\frac{۱}{۲})^۳|A^۳| = \frac{۱}{۸}|A|^۳ = \frac{۱}{۸} \times (-۲)^۳ = -۱$$

۱۸ ❹ ③ ② ① $۷!$ بر ۵۶ بخش‌پذیر است زیرا:

$$۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷ \times ۴ \times ۲ \times q$$

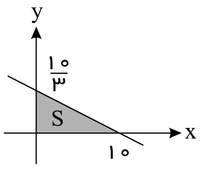
بنابراین $۷!$، $۸!$ و $\cdots$ همگی بر ۵۶ بخش‌پذیرند و باقی‌مانده‌شان بر ۵۶، صفر است. پس باید باقی‌ماندهٔ $۱! + ۳! + ۵!$ را بر ۵۶ بیابید.

$$۱! + ۳! + ۵! = ۱ + ۶ + ۱۲۰ = ۱۲۷$$

باقی‌ماندهٔ ۱۲۷ بر ۵۶ عدد ۱۵ است.

۱۹ ④ ③ ❷ ① نمودار به معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & y & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ یک خط است. محل تلاقی آن را با محورهای مختصات به شرح زیر به‌دست می‌آوریم:

$$y = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} x & ۰ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow -\mathrm{x} + ۲\,(۳ + ۲) = ۰ \Rightarrow \mathrm{x} = ۱۰$$



$$x = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۰ & y & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow -y\,(۳ - ۰) + ۲\,(۲ + ۳) = ۰ \Rightarrow y = \frac{۱۰}{۳}$$

$$S = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۰}{۳} \times ۱۰ = \frac{۵۰}{۳}$$

۲۰ ④ ③ ❷ ① روش ۱) فرض کنید هفتم تیر و اول اسفند به ترتیب aامین و bامین روز سال باشند. در این صورت:

$$a = ۳ \times ۳۱ + ۷ \overset{۷}{\equiv} ۳ \times ۳ + ۰ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

$$b = ۶ \times ۳۱ + ۵ \times ۳۰ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۶ \times ۳ + ۵ \times ۲ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۴ + ۳ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

پس aامین روز سال مانند دومین روز سال است و bامین روز سال با اولین روز سال یکسان است چون aامین روز سال جمعه است پس دومین روز سال نیز جمعه می‌باشد بنابراین اولین روز سال پنج‌شنبه است پس اول اسفند نیز پنج‌شنبه است. بنابراین اولین سه‌شنبهٔ این ماه ۵ روز بعد یعنی شش اسفند ماه است.

روش ۲) ابتدا تعیین می‌کنیم ۱ اسفند چه روزی از هفتهٔ است. می‌باشد برای این کار بایستی ببینیم بین هفتم تیر تا ۱ اسفند چند روز فاصله است.

۱ اسفند	+	۵ ماه	+	۲ ماه	+	تیرماه	ماه
۱	+	۵ × ۳۰	+	۲ × ۳۱	+	۲۴	روز

$$\overset{۷}{\equiv} ۳ + ۲ \times ۳ + ۵ \times ۲ + ۱ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

یعنی ۱ اسفند روز پنجشنبه می‌باشد، بنابراین اولین سه شنبهٔ اسفند ششم اسفندماه می‌باشد.

۲۱ ④ ❸ ② ①

با توجه به مفهوم ضربه (نیرو) و تغییرات سرعت داریم:

$$|\vec{F}| \cdot \Delta t = m|\Delta \vec{v}| \Rightarrow ۳ \times ۴ = ۲(v - ۵) \Rightarrow v - ۵ = ۶ \Rightarrow v = ۱۱\frac{m}{s}$$

$$|\vec{p_۲}| = m|\vec{v}| \Rightarrow |\vec{P_۲}| = ۲ \times ۱۱ = ۲۲\frac{kg \cdot m}{s}$$

۲۲ ❹ ③ ② ①

$$K = \frac{p^۲}{۲m} \rightarrow \frac{K_B}{K_A} = (\frac{p_B}{p_A})^۲(\frac{m_A}{m_B}) \rightarrow ۵ = (۱)(\frac{m_A}{m_B}) \rightarrow \frac{m_A}{m_B} = ۵$$

۲۳ ④ ③ ② ❶ می‌دانیم که نسبت نیروی مرکز گرای ماهواره به نیروی وزن آن در سطح زمین، همانند نسبت شتاب گرانش در محل حضور ماهواره به شتاب گرانش سطح زمین است. یعنی:

وزن ماهواره درسطح زمین $\frac{۱}{۱۶}$ = نیروی مرکزگرای ماهواره = نیروی جاذبه‌ی گرانش نیوتون بین $Me\,, m$

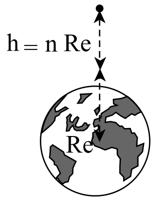
$$W' = \frac{۱}{۱۶}W \Rightarrow \frac{GmMe}{(\mathrm{Re}+h)^۲} = \frac{۱}{۱۶}\frac{GmM_e}{\mathrm{Re}^۲} \Rightarrow \frac{۱}{(\mathrm{Re}+h)^۲} = \frac{۱}{۱۶} \times \frac{۱}{(\mathrm{Re})^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\mathrm{Re}+h} = \frac{۱}{۴\,\mathrm{Re}} \Rightarrow h = ۳\,\mathrm{Re}$$

۲۴ ④ ③ ② ❶ شتاب گرانشی با مجذور فاصله از مرکز زمین رابطهٔ معکوس دارد ($g' \propto \frac{۱}{r^۲}$). در صورتی که شعاع کرهٔ زمین را برابر R_e فرض کنیم، فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر از مرکز زمین برابر است با:

$$r = R_e + h = R_e + nR_e = (n + ۱)R_e$$

اگر شتاب گرانش در سطح زمین برابر g باشد. و برای محاسبه‌ی محلی که شتاب گرانش $\frac{۱}{۴}$ سطح زمین است داریم:



$$\frac{g'}{g}=\frac{\frac{GMe}{r^۲}}{\frac{GMe}{R_e^۲}}=(\frac{R_e}{r})^۲=(\frac{R_e}{(n+۱)R_e})^۲=\frac{۱}{۴}$$

جذر گرفتن از طرفین رابطه $\Rightarrow \frac{۱}{n+۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow n=۱$

تذکر: به طور ذهنی نیز می‌توان گفت اگر فاصله از مرکز زمین از R_e به $۲R_e$ برسد، شتاب گرانش $\frac{۱}{۴}$ برابر می شود.

$g=\frac{GM_e}{r^۲}\Rightarrow$ دو برابر می شود $r \Rightarrow$ برابر می شود $\frac{۱}{۴}$ ،g شتاب

$$\begin{cases} r=۲R_e \\ r=h+R_e \end{cases}\Rightarrow h=R_e$$

۲۵ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

$$K_۱=\frac{۱}{۲}mv_۱^۲=\frac{۱}{۲}\times ۲v_۱^۲=v_۱^۲$$

$$K_۲=\frac{۱}{۲}\times ۲(v_۱+۸)^۲\Rightarrow ۴v_۱^۲=(v_۱+۸)^۲$$

$$\Rightarrow ۲v_۱=v_۱+۸\Rightarrow v_۱=۸m/s\Rightarrow p_۱=mv_۱=۲\times ۸=۱۶kgm/s$$

روش دوم:

$$K=\frac{p^۲}{۲m}\xrightarrow{m=\text{ثابت}}\frac{K_۲}{K_۱}=(\frac{p_۲}{p_۱})^۲\rightarrow ۴=(\frac{p_۲}{p_۱})^۲\rightarrow p_۲=۲p_۱m(۸+v_۱)=۲mv_۱\rightarrow v_۱=۸\frac{m}{s}p_۱=m_۱v_۱=۲\times ۸=۱۶kg\frac{m}{s}$$

۲۶ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ ابتدا دوره حرکت مکعب را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{۱\text{ min}}{۶}\times\frac{۶۰s}{۱\text{ min}}=۱۰s$$

$$T=\frac{۲\pi r}{v}\Rightarrow ۱۰=\frac{۲\pi\times ۲}{v}\Rightarrow v=\frac{۲\pi}{۵}(m/s)$$

مکعب بدون لغزش با صفحه می‌چرخد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت، نیروی مرکزگرا برابر نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر مکعب است، پس داریم:

$$F_{net}=\frac{mv^۲}{r}\Rightarrow f_s=\frac{mV^۲}{r}=\frac{۵\times(\frac{۲\pi}{۵})^۲}{۲}=\frac{۴\pi^۲}{۱۰}=۰٫۴\pi^۲(N)$$

۲۷ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ طبق رابطهٔ $\bar{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$، مساحت محصور بین نمودار نیرو - زمان و محور زمان برابر با Δp (تغییرات تکانه) است.

۲۸ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

$$r_۱=R_e+h_۱=R_e+R_e=۲R_e$$

$$p_۱=p_۲\Rightarrow m_۱v_۱=m_۲v_۲\Rightarrow mv_۱=۲mv_۲\Rightarrow v_۲=\frac{۱}{۲}v_۱$$

$$\Rightarrow F_{net}=\frac{mv^۲}{r}\Rightarrow\frac{GmM_e}{r^۲}=\frac{mv^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\sqrt{\frac{r_۱}{r_۱}}$$

$$\Rightarrow\frac{r_۱}{r_۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow r_۲=۴r_۱=۴\times ۲R_e=۸R_e$$

$$r_۲=R_e+h_۲\Rightarrow ۸R_e=R_e+h\Rightarrow h=۷R_e$$

۲۹ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ چون مکعب همراه باصفحهٔ افقی و بدون لغزش دوران می‌کند، دوره و سرعت زاویه‌ای حرکت مکعب همان دوره و سرعت زاویه ای صفحه است. یعنی:

$$T=\frac{t}{N}=\frac{۶۰}{۶}=۱۰\ (s)$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۱۰}=\frac{\pi}{۵}\frac{rad}{s}$$

مکعب بدون لغزش با صفحه می‌چرخد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت، نیروی مرکزگرا برابر نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر مکعب است، پس داریم:

$$F_{\text{مرکزگرا}}=f_s\Rightarrow f_s=mr\omega^۲=۵\times ۲\times(\frac{\pi}{۵})^۲=۰٫۴\pi^۲\ (N)$$

۳۰ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ ابتدا با توجه به تعریف دورهٔ تناوب، تندی حرکت ذره را به دست می‌آوریم:

$$T=\frac{۱\text{ min}}{۶}\times\frac{۶۰s}{۱\text{ min}}=۱۰s$$

محیط دایره : $۲\pi r=۱۲\Rightarrow ۲\times ۳\times r=۱۲\Rightarrow r=۲m$

$$T=\frac{۲\pi r}{v}=۱۰=\frac{۲\times۳\times۲}{v}\Rightarrow v=\frac{۱۲}{۱۰}=\frac{۶}{۵}m/s$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ شتاب مرکزگرا داریم:

$$a_c=\frac{v^۲}{r}=\frac{(\frac{۶}{۵})^۲}{۲}=\frac{۳۶}{۵۰}=\frac{۱۸}{۲۵}m/s^۲$$

۳۱ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱

تندی مداری ماهواره‌ها به دور زمین از رابطه $v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ به‌دست می‌آید:

$$v=\sqrt{\frac{GMe}{r}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{r_B}{r_A}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{R_e+۲R_e}{R_e+R_e}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

۳۲ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ بررسی گزینه‌ها:

گزینه های (۱) و (۲) از آن جایی که محلول مس (II) سولفات با طلا واکنش نمی‌دهد می‌توان دریافت که طلا کاهنده ضعیف‌تری است و $Au^{۳+}$ قدرت اکسندگی بیشتری دارد.

گزینهٔ ۳) هیچ فلزی با نمکی از جنس خودش واکنش نمی‌دهد.

گزینهٔ ۴) با توجه به جرم مولی مس، آهن و روی معلوم می شود که به جرم تیغهٔ آهن افزوده می‌شود. با اضافه شدن رسوب Cu که جرم بیشتری نسبت به Fe دارد، روی تیغهٔ Fe جرم آن اضافه می‌شود.

۳۳ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱] ابتدا به روش وارسی موازنه می‌نماییم و سپس موازنه بار انجام می‌دهیم.

$$۱Mn^{۲+}(aq)+۲H_۲O(l)\rightarrow ۱MnO_۲(s)+۴H^++\bar{e}$$

بارهای سمت راست = بارهای سمت چپ

$$۱\times(+۲)=۴\times(+۱)+f\times(-۱)$$

$$\rightarrow ۲=۴-f\Rightarrow f=۲$$

$$\Rightarrow \underset{a}{\overset{\downarrow}{۱}}+\underset{b}{\overset{\downarrow}{۲}}+\underset{c}{\overset{\downarrow}{۱}}+\underset{d}{\overset{\downarrow}{۴}}+\underset{f}{\overset{\downarrow}{۲}}=۱۰$$

۳۴ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

$$Cr_۲O_۷^{۲-}\rightarrow ۲Cr+۷(-۲)=-۲\rightarrow Cr=+۶$$

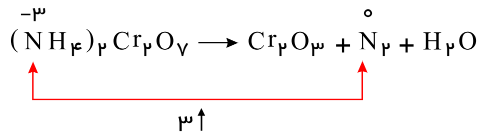
$$CrO_۴^{۲-}\rightarrow Cr+۴(-۲)=-۲\rightarrow Cr=+۶$$

۳۵ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱] عبارت‌های (الف) و (ب) درست است.

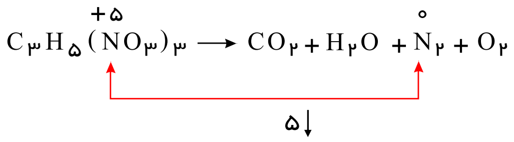
بررسی عبارت های نادرست:

با دو تیغه از جنس فلز روی و مس (نه از یک جنس) و میوه ای مانند لیمو می توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ LED را روشن کرد. اکسیژن نافلزی فعال است که با اغلب فلزها واکنش می دهد.

۳۶ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

الف)


$$(NH_۴)_۲Cr_۲O_۷\longrightarrow Cr_۲O_۳+N_۲+H_۲O$$

ب)


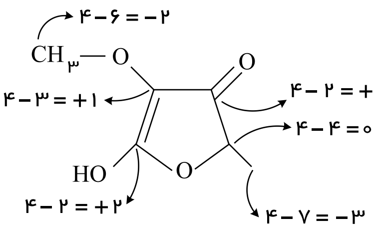
$$C_۳H_۵(NO_۳)_۳\longrightarrow CO_۲+H_۲O+N_۲+O_۲$$

۳۷ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ واکنش‌پذیری فلز نقره کمتر از مس است؛ پس واکنش فلز نقره با محلول مس (II) سولفات انجام نمی‌شود. (نادرستی گزینه‌های ۱ و ۲)

فلز آلومینیم می‌تواند با اکسایش یافتن، الکترون‌های ظرفیت خود را به کاتیون مس (II) بدهد. به عبارت دیگر آلومینیم فعال‌تر از مس است و درنتیجه واکنش یاد شده گرماده است. از سوی دیگر کاتیون مس (II) با گرفتن الکترون‌های ظرفیت آلومینیم، کاهش می‌یابد و اکسنده می‌باشد.

۳۸ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

اعداد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن، در شکل نشان داده شده است که ۵ نوع متفاوت هستند.



۳۹) ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

مقدار $SnCl_2$ مصرفی $= ۲۰mL \times \frac{۲g}{۱۰۰mL} = ۰٫۴g$

$SnCl_2 + ۲FeCl_3 \rightarrow SnCl_4 + ۲FeCl_2$

$$\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} = \frac{\text{غلظت مولی} \times (mL)\text{حجم}}{\text{ضریب} \times ۱۰۰۰}$$

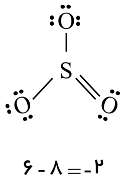
$$\frac{۰٫۴g \times a}{۱۹۰ \times ۱۰۰} = \frac{۴۰ \times ۰٫۱}{۲ \times ۱۰۰۰} \rightarrow a = ۹۵\%$$

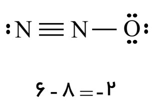
در این واکنش، به ازای مصرف ۲ مول $FeCl_3$، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود.

$۲FeCl_3 \sim ۲e$

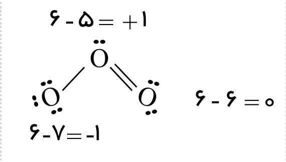
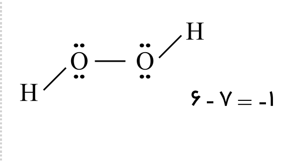
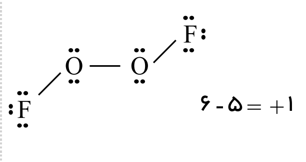
$$\frac{۴۰ \times ۰٫۱}{۲ \times ۱۰۰۰} = \frac{xmol}{۲} \Rightarrow x = ۰٫۰۰۴mol\, e^-$$

۴۰) ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ عدد اکسایش اکسیژن در SO_3 و N_2O برابر (-۲) است:





در سایر گزینه ها عدد اکسایش اکسیژن به‌صورت زیر است:

		
(۴)	(۳)	(۱)

۴۱) [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ چون دمای محلول دارای تیغهٔ Z از همه بیش‌تر افزایش یافته است، از دو تیغهٔ دیگر کاهنده‌تر است و چون دمای محلول دارای تیغهٔ Y ثابت مانده است، یعنی با محلول Cu^{2+} واکنش نداده و از Cu قدرت کاهندگی کم‌تری دارد و می‌تواند طلا باشد که یک فلز نجیب است. فلز Z از فلز X کاهنده‌تر است و وقتی در هوای مرطوب در تماس‌اند، فلز Z در رقابت اکسایش برنده می‌شود.

۴۲) ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

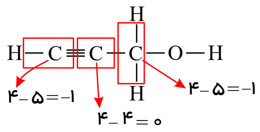
$H\underline{P}O_2 = ۱ + x + ۲(-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۳,\ \underline{P}_2O_3 = ۲x + ۳(-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۳$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) $\underline{P}F_6^- : x + ۶(-۱) = -۱ \Rightarrow x = +۵$

$Na_2\underline{Mn}O_4 : ۲ + x + ۴(-۲) = ۰ \Rightarrow x = +۶$

۲) مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در ترکیب داده شده برابر ۲− است.



۴)

$\underline{N}H_4^+ \cdots Cl^- \Rightarrow x + (۴) = +۱ \rightarrow x = -۳$

۴۳) ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

عبارت‌های دوم تا چهارم درست‌اند. برای تعیین گروه این عناصر، باید عدد اکسایش آنها را در این دو ترکیب بدست بیاوریم:

$XO_4^- \rightarrow X + ۴(-۲) = -۱ \rightarrow X = +۷$

$AO_3^{2-} \rightarrow A + ۳(-۲) = -۲ \rightarrow A = +۴$

X و A نافلز هستند؛ بنابراین عنصر X در گروه ۱۷ و عنصر A در گروه ۱۴ قرار دارند.(برای عنصرهای گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ به‌جز فلوئور و اکسیژن، بالاترین عدد اکسایش برابر با یکان شمارهٔ گروه است.)

بررسی موارد:

– A در گروه ۱۴ قرار دارد.

– عنصر A در گروه ۱۴ جدول قرار دارد و تنها نافلز گروه ۱۴، کربن است که در دورهٔ دوم جدول جای دارد.

– عنصر X که در گروه ۱۷ قرار دارد با فلوئور که اکسنده‌ترین عنصر جدول است، هم گروه می‌باشد.

-آرایش الکترونی عنصرهای گروه ۱۴ به $ns^۲np^۲$ و عنصرهای گروه ۱۷ به $ns^۲np^۵$ ختم می‌شود.

۴۴ ۴ ۳ **۲** ۱ در سلول گالوانی $(SHE-Al)$، نیم سلول Al آند و SHE کاتد است. الکترود مورد استفاده در کاتد تیغه پلاتین است که در واکنش شرکت نمی‌کند و تغییر وزن ندارد.

واکنش $Co^{۳+}+Fe^{۲+}\to Co^{۲+}+Fe^{۳+}$ (خود به خودی است.)

هر چه E° کوچک‌تر باشد، جزء سمت راست نیم واکنش کاهنده‌تر است. پس $Fe^{۳+}$ نسبت به $Co^{۲+}$ کاهنده‌تر است.

در واکنش $۴Fe^{۲+}(aq)+O_۲(g)+۲H_۲O(l)\to ۴Fe^{۳+}(aq)+۴OH^-(aq)$، اکسیژن اکسنده و $Fe^{۲+}$ کاهنده است.

$E^\circ_{\text{واکنش}}=E^\circ_{\text{اکسنده}}-E^\circ_{\text{کاهنده}}=۰٫۴-۰٫۷۷<۰$ غیر خودبه‌خودی

۴۵ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$۳Ag(s)+NO_۳^-(aq)+۴H^+(aq)\to ۳Ag^+(aq)+NO(g)+۲H_۲O(l)$$

مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد برابر ۱۴ است.

و نیم‌واکنش کاهش آن به‌صورت زیر است:

عدد اکسایش N از $+۵$ به $+۲$ می‌رسد؛ بنابراین ۳ مول الکترون مبادله می‌شود.

$$NO_۳^-+۴H^++۳e^-\to NO+۲H_۲O$$

۴۶ **۴** ۳ ۲ ۱ بررسی عبارت‌ها:

عبارت آ) مطابق واکنش $Zn(s)+Cu^{۲+}(aq)\to Zn^{۲+}(aq)+Cu(s)$، یون $Cu^{۲+}$ نقش اکسنده دارد.

عبارت ب) ترتیب قدرت کاهندگی: $Zn>Fe>Cu$

عبارت پ) مطابق معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش زیر، به‌ازای مبادلهٔ ۶ مول الکترون، مقدار ۵۴ گرم Al مصرف و ۱۹۲ گرم Cu تولید می‌شود:

$$۲Al(s)+۳Cu^{۲+}(aq)\to ۲Al^{۳+}(aq)+۳Cu(s)$$

بنابراین به‌ازای مبادلهٔ ۰٫۱۲ مول الکترون، مقدار ۱٫۰۸ گرم Al مصرف و ۳٫۸۴ گرم Cu تولید می‌شود.

۴۷ ۴ ۳ **۲** ۱ هرچه E° یک نیم‌واکنش بیشتر باشد، گونهٔ سمت راست آن کاهندهٔ ضعیف‌تر و گونهٔ سمت چپ آن، اکسندهٔ قوی‌تری است.

$$Br_۲+۲e^-\to ۲Br^-\qquad E^\circ=۱٫۵V$$

۴۸ ۴ ۳ **۲** ۱

$$a)۲Ca_۳(PO_۴)_۲+۶SiO_۲+۱۰C\xrightarrow{\Delta}P_۴+۶CaSiO_۳+۱۰CO$$

مجموع ضرایب $=۲+۶+۱۰+۱+۶+۱۰=۳۵$

$$d)PCl_۵+۴H_۲O\to H_۳PO_۴+۵HCl$$

مجموع ضرایب $=۱+۴+۱+۵=۱۱$

تفاوت مجموع ضرایب $=۳۵-۱۱=۲۴$

واکنش‌های a و c به دلیل داشتن عنصرهای آزاد C و $I_۲$ از نوع اکسایش ــ کاهش هستند، اما در واکنش‌های b و d، عدد اکسایش هیچ عنصری تغییر نکرده است و این واکنش‌ها از نوع اکسایش ــ کاهش نیستند.

۴۹ ۴ ۳ **۲** ۱ معادلهٔ واکنش انجام یافته به صورت زیر است:

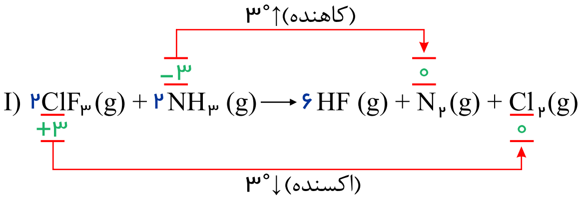
$$۲Ag^+(aq)+Fe(s)\to ۲Ag(s)+Fe^{۲+}(aq)$$

$$۷٫۵۲۵\times ۱۰^{۲۲}e^-\times\frac{۱mole^-}{۶٫۰۲\times ۱۰^{۲۳}e^-}\times\frac{۱molFe^{۲+}}{۲mole^-}=۶٫۲۵\times ۱۰^{-۲}molFe^{۲+}$$

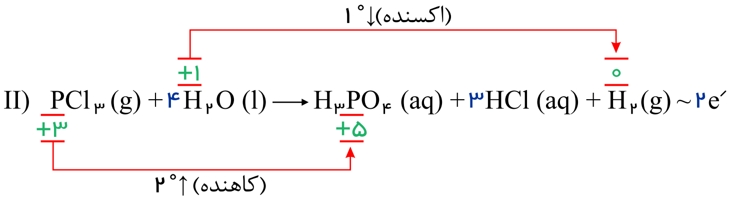
$$R^-(\text{واکنش})=\overline{R}(Fe^{۲+})=\frac{۶٫۲۵\times ۱۰^{-۲}}{\frac{۷٫۵}{۶۰}}=۵۰\times ۱۰^{-۲}=۰٫۵mol\cdot min^{-۱}$$

۵۰ ۴ **۳** ۲ ۱ عبارت‌های سوم، چهارم و پنجم درست هستند.

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌ها به صورت زیر است:



$$\text{I)}\ ۲ClF_۳(g) + ۲NH_۳(g) \longrightarrow ۶HF(g) + N_۲(g) + Cl_۲(g)$$



$$\text{II)}\ PCl_۳(g) + ۴H_۲O(l) \longrightarrow H_۳PO_۴(aq) + ۳HCl(aq) + H_۲(g) \sim ۲e^-$$

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول: گونهٔ اکسنده در واکنش (I)، اتم کلر موجود در $ClF_۳$ است. گونهٔ $ClF_۳$ یک ترکیب مولکولی است و اطلاق نام «هالید» به کلر موجود در مولکول $ClF_۳$، صحیح نیست!

عبارت دوم:

$$۳molHCl \sim ۲e^- \Rightarrow \frac{۱۰molHCl}{۳} = \frac{xmole^-}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۳}mole^-$$

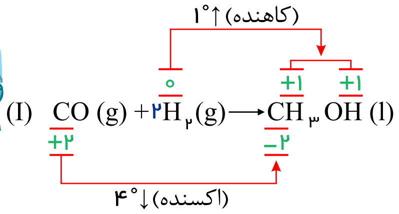
عبارت سوم: ضریب $ClF_۳$ و $NH_۳$ یکسان و برابر ۲ است.

عبارت چهارم:

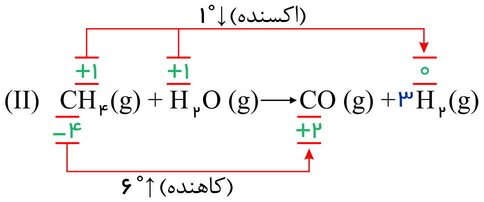
$$\frac{\text{ضریب } HF \text{ در واکنش } (I)}{\text{ضریب } H_۲O \text{ در واکنش } (II)} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

عبرات پنجم: ضریب $PCl_۳$ در واکنش (II) با ضریب، $NH_۳$ در واکنش (I) یکسان و برابر ۲ است.

(۵۱) ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌های ارائه‌شده به‌صورت زیر است:



$$\text{(I)}\ CO(g) + ۲H_۲(g) \longrightarrow CH_۳OH(l)$$



$$\text{(II)}\ CH_۴(g) + H_۲O(g) \longrightarrow CO(g) + ۳H_۲(g)$$

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: فرم کاهش‌یافتهٔ گونهٔ اکسنده در واکنش (II)، مولکول $H_۲$ می‌باشد که ناقطبی است.

گزینهٔ «۲»: عوامل کاهنده در واکنش‌های (I) و (II)، به‌ترتیب $H_۲$ و $CH_۴$ هستند.

گزینهٔ «۳»: عدد اکسایش اتم کربن در واکنش (I)، ۴ واحد کاهش و در واکنش (II)، ۶ واحد افزایش یافته است.

گزینهٔ «۴»: برای تهیهٔ یک مول متانول، یک مول CO و ۲ مول $H_۲$ نیاز است که به مقدار اضافی در واکنش (II) به‌ازای مصرف یک مول واکنش‌دهنده تولید می‌شوند.