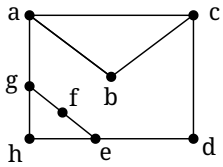
پدرام کرد

۱ چه تعداد از مجموعه‌های زیر برای گراف شکل مقابل احاطه‌گر هستند؟الف) $\{a,c,d,e\}$



ب) $\{a,b,c,f\}$

پ) $\{a,b,g,f\}$

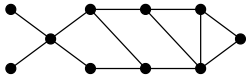
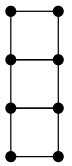
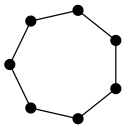
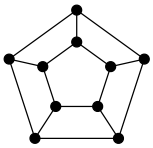
ت) $\{a,f,g,h\}$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ گراف کامل مرتبهٔ ۶ دارای چند مجموعهٔ احاطه‌گراست؟

۱) ۳۱ ۲) ۶۳ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

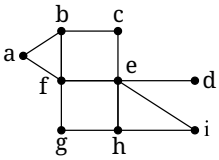
۳ عدد احاطه‌گری کدام‌یک از گراف‌های زیر با بقیه متفاوت است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۴ در گرافی با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d,e\}$ ، $|N_G(a)|=۴$ و $N_G(b)=\{a,c\}$ و $deg(c)=۲$ و $\delta=۱$ است. در این گراف چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۵ کدام مجموعه برای گراف G در شکل مقابل، احاطه‌گر محسوب نمی‌شود؟



۱) $A=\{f,e\}$ ۲) $B=\{e,a,g\}$ ۳) $C=\{a,c,d,f,h\}$ ۴) $D=\{a,d,i,h,g,f\}$

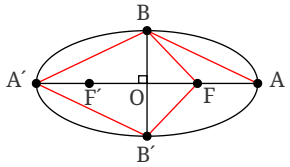
۶ مختصات کانون‌های یک بیضی $F(۵,۴)$ و $F'(۵,-۴)$ و طول قطر کوچک آن ۴ می‌باشد. اندازهٔ وتر کانونی این بیضی کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$

۷ خروج از مرکز یک بیضی که یک رأس و کانون‌های آن، رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸ در بیضی مقابل با کانون‌های F و F'، مساحت مثلث $BA'B'$ سه برابر مساحت مثلث ABF است. مساحت چهارضلعی $FBA'B'$ چند برابر مساحت مثلث ABF است؟



۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۵

۹ مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی $A(۱,-۹)$ و $A'(۱,-۱)$ و طول قطر کوچک بیضی برابر $۴\sqrt{۳}$ می‌باشد. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

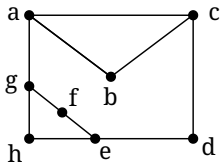
۱۰ در یک بیضی نقاط $F(۰,۲)$ و $F'(-۴,۲)$ کانون‌ها و $M(-۲,۳)$ نقطه‌ای از آن می‌باشد. طول کوچکترین قطر بیضی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم، هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

با توجه به نکتهٔ بالا، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



الف) رئوس b و g با a مجاورند و f و h با c مجاورند. پس یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

ب) رأس h در مجموعه نیست و یا هیچ‌یک از اعضای مجموعه هم مجاور نیست، پس مجموعه احاطه‌گر نیست.

پ) رأس d در مجموعه نیست و با هیچ‌یک از اعضای مجموعه نیز مجاور نیست، پس مجموعه احاطه‌گر نیست.

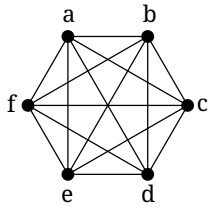
ت) رأس d در مجموعه نیست و با هیچ‌یک از اعضای مجموعه نیز مجاور نیست، پس مجموعه احاطه‌گر نیست.

بنابراین گزینهٔ «۲» پاسخ است.

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ از آنجا که تمامی رئوس گراف کامل مرتبهٔ ۶ باهم مجاور هستند به‌ازای انتخاب هریک رأس یا هر دو رأس یا ... هر ۶ رأس مجموعه‌های حاصل احاطه‌گر هستند.

پس:

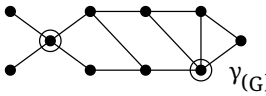
$$\text{تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر } K_۶ = \binom{۶}{۱}+\binom{۶}{۲}+\binom{۶}{۳}+\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۵}+\binom{۶}{۶} = ۲^۶ - ۱ = ۶۳$$



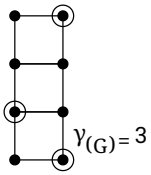
۳ ۱ ۲ ۳ ۴

گزینهٔ ۱: یک مجموعه شامل رئوس که هر رأس گراف در آن مجموعه باشد یا با یکی از اعضای آن مجموعه مجاور باشد و کمترین تعداد عضو ممکن را داشته باشد مجموعه احاطه‌گر مینیمم نامیده می‌شود و تعداد اعضایش عدد احاطه‌گری گراف نام دارد.

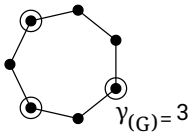
گزینهٔ اول:



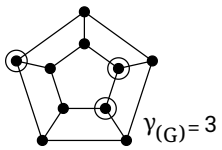
گزینهٔ دوم:



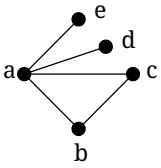
گزینهٔ سوم:



گزینهٔ چهارم:



۴ ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار این گراف با توجه به مفروضات مساله به فرم



است و مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف عبارتند از:

$$\{a\},\{e,b,d\},\{e,c,d\}$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴ هیچ‌کدام از رئوس مجموعهٔ D با رأس C مجاور نیستند، پس مجموعهٔ D نمی‌تواند یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف G باشد.

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به فرض سؤال داریم:

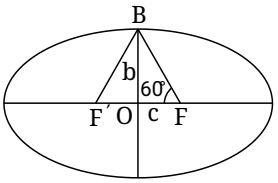
$$\begin{cases} ۲c = FF' = \sqrt{(۵-۵)^۲ + (۴-(-۴))^۲} = \sqrt{۰^۲ + ۸^۲} = ۸ \to c = ۴ \\ ۲b = ۴ \to b = ۲ \end{cases}$$

داریم : $a^۲=b^۲+c^۲\rightarrow a^۲=۲^۲+۴^۲=۲۰\rightarrow a=۲\sqrt{۵}$

طول وتر کانون کانونی یک بیضی از رابطهٔ $\frac{۲b^۲}{a}$ به‌دست می‌آید:

وتر کانونی $=\frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲\times ۲^۲}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴ در مثلث $\overset{\Delta}{OBF}$، زاویه $\hat{F}=۶۰^\circ$ می‌باشد پس داریم:



$\rightarrow \tan ۶۰^\circ=\frac{OB}{OF}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{b}{c}\Rightarrow b=\sqrt{۳}c$

از طرفی در بیضی داریم $a^۲=b^۲+c^۲$ پس:

$a^۲=b^۲+c^۲\xrightarrow{b=\sqrt{۳}c}a^۲=۳c^۲+c^۲=۴c^۲\Rightarrow\frac{c^۲}{a^۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

نسبت مساحت مثلث‌های داده شده را برحسب ارتفاع و قاعده‌های نظیر می‌نویسیم:

$$\frac{S_{BA'B'}}{S_{ABF}}=\frac{\frac{۱}{۲}OA'\times BB'}{\frac{۱}{۲}OB\times AF}=\frac{a\times ۲\cancel{b}}{\cancel{b}\times(a-c)}=\frac{۲a}{a-c}=۳\rightarrow ۲a=۳a-۳c\rightarrow ۳c=a$$

درنتیجه داریم:

$$\frac{S_{FBA'B'}}{S_{ABF}}=\frac{\frac{۱}{۲}A'F\times BB'}{\frac{۱}{۲}OB\times AF}=\frac{(a+c)\times ۲\cancel{b}}{\cancel{b}\times(a-c)}=\frac{۲(a+c)}{a-c}=\frac{۲(۳c+c)}{۳c-c}=\frac{\cancel{۴}\times ۴\cancel{c}}{\cancel{۴}\cancel{c}}=۴$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به فرض، پارامترهای بیضی را به‌دست می‌آوریم:

قطر بزرگ : $AA'=۲a=\sqrt{(۱-۱)^۲+(-۹-(-۱)^۲}=۸\rightarrow a=۴$

قطر کوچک : $۲b=۴\sqrt{۳}\rightarrow b=۲\sqrt{۳}$

$a^۲=b^۲+c^۲\rightarrow ۴^۲=(۲\sqrt{۳})^۲+c^۲\rightarrow ۱۶=۱۲+c^۲\rightarrow c^۲=۴\rightarrow c=۲$

خروج از مرکز : $\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از دو کانون بیضی برابر $۲a$ است، پس:

$MF=\sqrt{(۰-(-۲))^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$

$MF'=\sqrt{(-۴-(-۲))^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$

$MF+MF'=۲a\rightarrow\sqrt{۵}+\sqrt{۵}=۲a\rightarrow ۲\sqrt{۵}=۲a\rightarrow a=\sqrt{۵}$

$۲c=FF'=\sqrt{(-۴-۰)^۲+(۲-۲)^۲}\rightarrow ۲c=۴\rightarrow c=۲$

داریم : $a^۲=b^۲+c^۲\rightarrow(\sqrt{۵})^۲=b^۲+۲^۲\rightarrow b^۲=۵-۴=۱\rightarrow b=۱$

$\Rightarrow$ طول کوچکترین قطر بیضی $= 2b = 2 \times 1 = 2$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴	۴ ۱ ۲ ۳ ۴	۷ ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴
۲ ۱ ۲ ۳ ۴	۵ ۱ ۲ ۳ ۴	۸ ۱ ۲ ۳ ۴	
۳ ۱ ۲ ۳ ۴	۶ ۱ ۲ ۳ ۴	۹ ۱ ۲ ۳ ۴	