بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۳)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

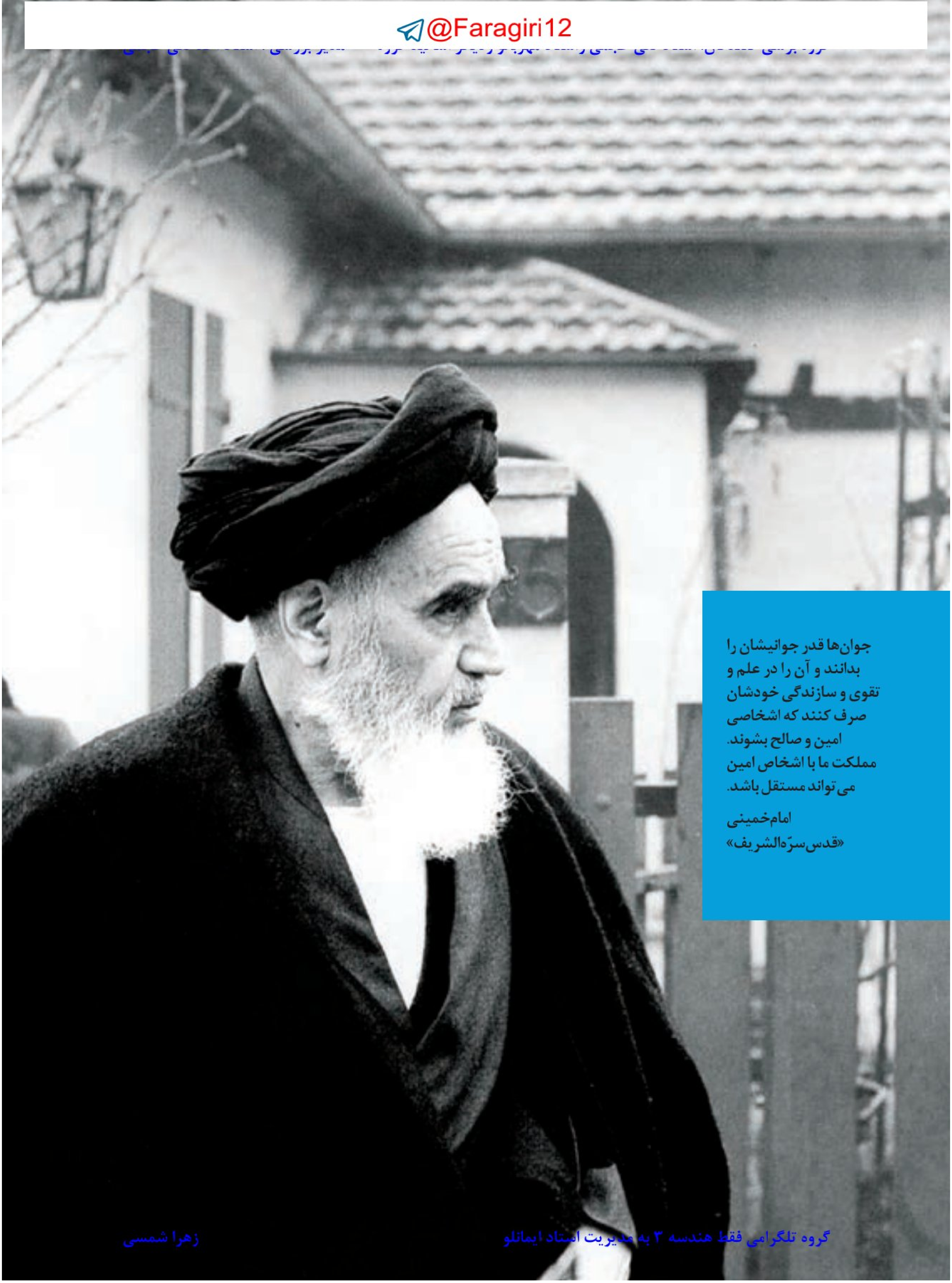
پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: هندسه(۳) ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۲۱۳
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، هوشنگ شرقی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف) ـ محمد دانشگر (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ مجتبی زند (مدیر هنری، طراح جلد و صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ زهره برهانی زرندی، سوروش سعادتمندی، فاطمه گیتی‌جبین، فاطمه صغری ذوالفقاری، کبری اجابتی و حمید ثابت‌کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول ۱۳۹۷

شابک ۶ـ۳۱۱۳ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978_964_05_3113_6



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
تقوی و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدس‌سرّه‌الشریف»

فهـــرست

پیشـــگفتار

کتاب حاضر در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هرحال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار[1] و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی[2] دارد، به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

۱ـ mathrde@gmail.com

۲ـ http: //math-dept.talif.sch.ir

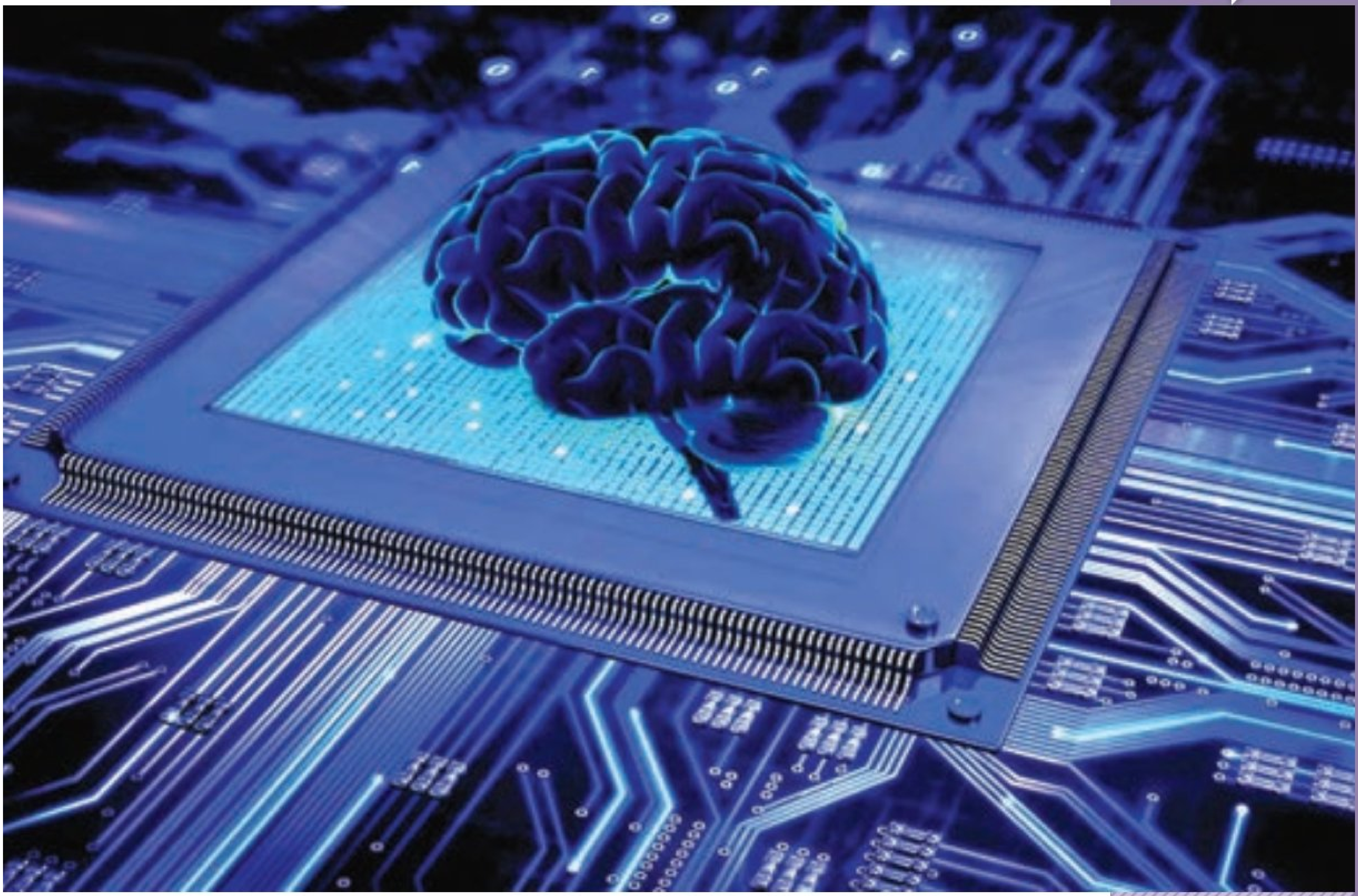
گروه بررسی کنندگان: استاد تقی عجمی واستاد مهربانو ودیگر اساتید گروه   مدیر بررسی : استاد احد تقی عجمی

گروه تلگرامی فقط هندسه ۳ به مدیریت استاد ایمانلو

زهرا شمسی

فصل اوّل

ماتریس و کاربـــردها



یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص در فیزیک کوانتم (هایزنبرگ، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند.) و در رایانه و علومی چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هایش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا در بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطهٔ تنگاتنگ دارد.

درس اوّل

ماتریس[1] و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به‌صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است :

	برد	باخت	مساوی	امتیاز
تیم A	۹	۳	۳	۳۰
تیم B	۷	۴	۴	۲۵
تیم C	۶	۳	۶	۲۴
تیم D	۶	۵	۴	۲۲

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف M نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$M=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D \end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{برد}&\text{باخت}&\text{مساوی}&\text{امتیاز}\end{array}\\ \begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۳ & ۳۰\\ ۷ & ۴ & ۴ & ۲۵\\ ۶ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ ۶ & ۵ & ۴ & ۲۲ \end{bmatrix}\end{array}$$

تعریف: هر نمایش مستطیلی شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند B ، A و C و... نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال : ماتریس A ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای ۱۲=۴×۳ درایه است و مثلاً عدد حقیقی $\sqrt{۲}$ درایهٔ روی سطر اول و ستون چهارم است و درایهٔ (۷−) روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \sqrt{۲}\\ ۵ & ۳ & -۷ & ۱\\ -۳ & ۲۰ & \pi & ۱۴ \end{bmatrix}$$

در حالت کلّی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم (A ماتریسی از مرتبه $m\times n$ (m در n) است.) برای هر درایهٔ ماتریس و

۱– Matrix

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستونِ آن درایه را مشخص می‌کند، a_{ij} یعنی درایهٔ روی سطر iاُم و ستون jاُم.

ماتریس $A_{2\times3}$ و ماتریس $B_{m\times n}$ با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند :

$$A_{2\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad و \quad B_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۶۵–۱۸۰۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کِیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراشتراوس (۱۸۹۷–۱۸۱۵) و دیگران در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

درایهٔ b_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس B می‌نامیم که $1\leq i\leq m$ و $1\leq j\leq n$ تغییر می‌کنند.
همهٔ درایه‌های ماتریس B را می‌توان توسط درایهٔ عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم $B=[b_{ij}]$.[1]

مثال : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ ماتریسی ۲×۲ باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-2$ در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

$$\begin{cases} -2 & i<j \\ 7 & i=j \\ 5 & i>j \end{cases}$$

حل : $a_{11}=a_{22}=7$ و $a_{21}=5$ و $a_{12}=-2$ پس $A=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

کاردرکلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس ۴×۳ و یک بار با ماتریسی ۳×۴ نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{شلوار} & \text{بلوز} & \text{پیراهن} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 24 & 15 & 7 \\ 26 & 19 & 11 \\ 17 & 28 & 22 \\ 12 & 31 & 35 \end{bmatrix}_{4\times3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{شلوار} \\ \text{بلوز} \\ \text{پیراهن} \end{array} & \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \\ 7 & 11 & 22 & 35 \end{bmatrix}_{3\times4} \end{array}$$

۱ــ اگر $m=n=1$ در این صورت ماتریس $[K]_{1\times1}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می‌کنیم.

معرفی چند ماتریس خاص

۱ـ اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس **مربعی** از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \quad و \quad C=[۵]_{۱\times ۱}=۵$$

در ماتریس‌های A و B قطرهای مشخص شده را **قطر اصلی** این دو ماتریس می‌نامیم و اگر $i=j$ در این صورت درایهٔ a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

۲ـ اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس **سطری** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند :

$A=[۱\ \ ۲]_{۱\times ۲}$, $B=[۲\ \ -۱\ \ ۴\ \ ۵]_{۱\times ۴}$, $C=[۷]_{۱\times ۱}=۷$

۳ـ اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس **ستونی** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ \\ \pi \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۱} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۴\times ۱} \quad و \quad C=[۱۱۴]_{۱\times ۱}=۱۱۴$$

۴ـ ماتریس **قطری**، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad و \quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵ـ اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس **اسکالر** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۰ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۲} = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۵ \\ ۳ & ۰ \\ ۱۸ & ۶ \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس همانی

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \quad و \quad C=[۲]$$

مثل عددمی ماند که در ماتریس ضرب شده است

۶ــ ماتریس **صفر**، ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\overline{O}$ نشان می‌دهیم. ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس صفر ۲×۲ است.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}] \quad 1\leq i\leq m \,,\, 1\leq j\leq n$$

مثال : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \\ z-۱=۵ \end{cases} \Rightarrow x=۶,\ y=۳\ ,\ z=۶ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

جمع ماتریس‌ها

در کاردرکلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکنندهٔ لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است :

	A	B	C	D
شلوار	۲۴+۲۰	۲۶+۲۰	۱۷+۲۰	۱۲+۲۰
بلوز	۱۵+۳۰	۱۹+۳۰	۲۸+۳۰	۳۱+۳۰
پیراهن	۷+۵۰	۱۱+۵۰	۲۲+۵۰	۳۵+۵۰

اگر این جدول را با یک ماتریس ۳×۴ نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴} + \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ \\ ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ \end{bmatrix}_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} ۴۴ & ۴۶ & ۳۷ & ۳۲ \\ ۴۵ & ۴۹ & ۵۸ & ۶۱ \\ ۵۷ & ۶۱ & ۷۲ & ۸۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبهٔ A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

کار در کلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ & -۱ \\ ۷ & ۸ & ۹ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱+(-۱) & ۲+(-۲) & ۳+(-۳) & (-۱)+۱ \\ ۴+۱ & ۵+۲ & ۶+۳ & (-۱)+۴ \\ ۷+۵ & ۸+۶ & ۹+۷ & (-۱)+۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۷ & ۹ & ۳ \\ ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & ۷ \end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ب) $A=[۱ \ \ -۱ \ \ ۳ \ \ ۷] \quad , \quad B=[۳ \ \ ۲ \ \ -۱ \ \ ۴] \Rightarrow A+B=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ & ۲ \\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} , B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & -۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ت) $A=[۵] \quad , \quad B=[-۷] \Rightarrow A+B=\cdots$

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

الف) $A+B=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$

ب) $A+B=[۴ \ \ ۱ \ \ ۲ \ \ ۱۱]$

پ) $A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۷ & -۵ \\ \sqrt{۲}+۱ & ۷ & ۲ & -۵ \end{bmatrix}$

ت) $A+B=[-۲]=-۲$

ث) $\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & -۵ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۶ \\ ۰ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

$A+(-A)=\bar{0}$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

تعریف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \ , \ r\in\mathbb{R} \Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$B=\begin{bmatrix} ۲۴\times۲ & ۲۶\times۲ & ۱۷\times۲ & ۱۲\times۲ \\ ۱۵\times۲ & ۱۹\times۲ & ۲۸\times۲ & ۳۱\times۲ \\ ۷\times۲ & ۱۱\times۲ & ۲۲\times۲ & ۳۵\times۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲۴+۲۴ & ۲۶+۲۶ & ۱۷+۱۷ & ۱۲+۱۲ \\ ۱۵+۱۵ & ۱۹+۱۹ & ۲۸+۲۸ & ۳۱+۳۱ \\ ۷+۷ & ۱۱+۱۱ & ۲۲+۲۲ & ۳۵+۳۵ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}=A+A=۲A$$

کار در کلاس

۱ــ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $-1\times\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-4&-5&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\-4&-5&-6\\4&5&6\end{bmatrix}$

ب) $\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}4&6&8&1\\0&3&5&7\\\sqrt{2}&-1&2&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4&\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-1}{2}&1&4\end{bmatrix}$

پ) $0\times\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-3&-4\\5&6&7\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{0}_{4\times3}$ $\quad 0A=\bar{0}$

ت) $7\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{0}_{2\times3}$ $\quad 7\bar{0}=\bar{0}$

۲ــ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$\begin{bmatrix}2&4&6\\8&4&2\\10&3&1\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1&2&3\\4&2&1\\5&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&-1&-2\\3&1&4\\2&5&0\end{bmatrix}=(-1)\times\begin{bmatrix}-1&1&2\\-3&-1&-4\\-2&-5&0\end{bmatrix}$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد قرینهٔ ماتریس A را با $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-1) در ماتریس A به‌دست می‌آید. واضح است که $A+(-A)=\bar{O}$

$(-A)+A=\bar{0}$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A ، B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند :

الف) $A+B=B+A$ — خاصیت جابه‌جایی

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$ — خاصیت شرکت‌پذیری

پ) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ — خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها

ت) $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$ خاصیت عضو قرینه

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

ح) $A=B \Rightarrow rA=rB$

مثال : فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$
در این صورت نشان می‌دهیم که $(-۲)(A+B)=(-۲)A+(-۲)B$،

$$-۲(A+B)=(-۲)\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱+(-۲) & ۲+۱ & ۳+۴ \\ (-۱)+۳ & ۳+۲ & (-۵)+۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)(۱+(-۲)) & (-۲)(۲+۱) & (-۲)(۳+۴) \\ (-۲)((-۱)+۳) & (-۲)(۳+۲) & (-۲)((-۵)+۰) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)\times ۱+(-۲)\times(-۲) & -۲\times ۲+(-۲)\times ۱ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۴ \\ (-۲)\times(-۱)+(-۲)\times ۳ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۲ & (-۲)\times(-۵)+(-۲)\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{در } \mathbb{R}]{\text{توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع}}\begin{bmatrix} -۲\times ۱ & -۲\times ۲ & -۲\times ۳ \\ (-۲)\times(-۱) & -۲\times ۳ & (-۲)\times(-۵) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} (-۲)\times(-۲) & -۲\times ۱ & -۲\times ۴ \\ -۲\times ۳ & -۲\times ۲ & -۲\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+(-۲)\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=(-۲)A+(-۲)B$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت برای $r\in\mathbb{R}$ داریم :

$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=\left[r(a_{ij}\pm b_{ij})\right]$

$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$ توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در $\mathbb{R}$

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]$ تعریف ضریب عدد در ماتریس

$=rA\pm rB$

کاردرکلاس

۱ــ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=۳$ و $s=-۲$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۲ــ درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایهٔ ماتریس A را در درایهٔ نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

مثال : اگر $A=[-۱\ \ ۲\ \ ۰\ \ ۳\ \ -۵]$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۷ \\ -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ در این صورت داریم :

$$A\times B=[-۱\ \ ۲\ \ ۰\ \ ۳\ \ -۵]\times\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۷ \\ -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$=[(-۱)\times(-۲)+۲\times۳+۰\times۷+۳\times(-۱)+(-۵)\times(-۲)]$$

$$=[۲+۶+۰+(-۳)+۱۰]=[۱۵]=۱۵$$

کاردرکلاس

یک ماتریس سطری ۳ × ۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱ × ۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد) در این صورت $A_{mp}\times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp}\times B_{pn}=C_{mn}=[c_{ij}]$، ماتریس C ماتریسی $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iام و ستون jام در آن یعنی، C_{ij} از ضرب سطر iام A در ستون jام B به‌دست می‌آید، یعنی