

کد اجرا: نامشخص

تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۵/۰۲

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۶۰ دقیقه

نام آزمون: هندسه ۲

علوی دخترانه مرکز

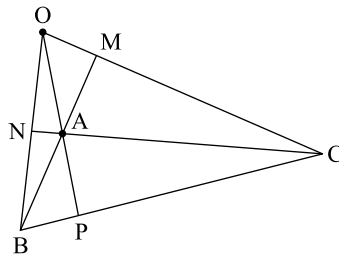
۱- طول خط‌المركزين دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۶ واحد، برابر ۱۲ واحد است. فاصله نقطه برخورد دو مماس مشترک داخلی از مرکز دایره بزرگ‌تر کدام است؟

۹٫۶ (۴)

۷٫۲ (۳)

۶٫۴ (۲)

۴٫۸ (۱)



۲- در مثلث ABC ، O محل هم‌رسي سه ارتفاع است. چهارضلعی $BNMC$ کدام است؟

(۱) هم محاطی و هم محیطی

(۲) فقط محاطی

(۳) فقط محیطی

(۴) نه محاطی، نه محیطی

۳- مساحت یک شش‌ضلعی منتظم که بر دایره‌ای به شعاع ۲ محیط شده است، چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

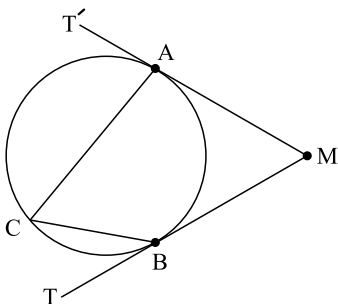
۱۲ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۴- در شکل روبه‌رو، زاویه بین دو مماس رسم‌شده از نقطه M بر دایره برابر 60° است. اگر $\angle CBT = 40^\circ$ باشد، اندازه $\widehat{CAM}$ کدام است؟



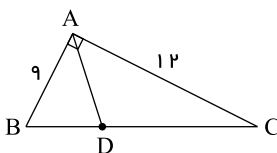
۱۰۰° (۱)

۱۱۰° (۲)

۱۲۰° (۳)

۱۳۰° (۴)

۵- در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر، نقطه D به فاصله $2\sqrt{13}$ از رأس A قرار دارد. بیشترین فاصله نقطه D از رأس B کدام است؟



۵٫۴ (۲)

۵ (۱)

۶٫۲ (۴)

۵٫۸ (۳)

۶- در مثلث ABC به طول اضلاع ۱، ۱، $\sqrt{3}$ ، شعاع دایره محیطی کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

۱ (۱)

۷- طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی $\frac{3}{5}$ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

۲٫۷۵ (۴)

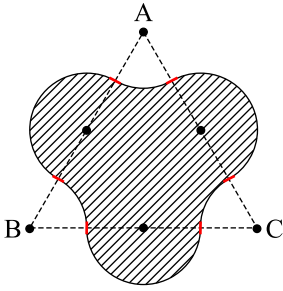
۲٫۲۵ (۳)

۱٫۷۵ (۲)

۱٫۲۵ (۱)



۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۴ واحد، مطابق شکل هر ضلع را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کرده و سه کمان 60° و سه نیم‌دایره رسم کرده‌ایم. مساحت ناحیه هاشورخورده چند واحد مربع است؟

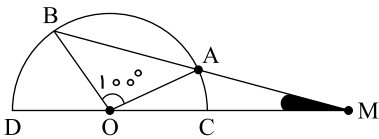


(۲) $4\sqrt{3} + \pi$

(۱) $4\sqrt{3} + \frac{3}{4}\pi$

(۴) $8\sqrt{3} + \pi$

(۳) $8\sqrt{3} + \frac{3}{4}\pi$



۹- در شکل مقابل MA با شعاع دایره برابر است. اندازه زاویه M چقدر است؟

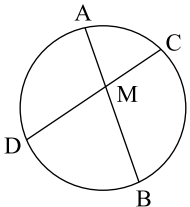
(۲) 20°

(۱) 10°

(۴) 30°

(۳) 15°

۱۰- در دایره $C(O, R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۱۰ واحد را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11$ باشد، طول پاره‌های جدا شده روی AB چند واحد اختلاف دارند؟



(۲) $4,5$

(۱) 4

(۴) $5,5$

(۳) 5

۱۱- از نقطه M خارج دایره $C(O, x-2)$ مماس MT به طول $6\sqrt{2}$ بر این دایره رسم شده است. اگر کمترین فاصله M از محیط دایره $x+1$ باشد، طول عمود رسم شده از نقطه T بر MO کدام است؟

(۴) 3

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{3}$

۱۲- طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۱۲ برابر با ۱۲ است، وضعیت نسبی دو دایره کدام است؟

(۴) متخارج

(۳) متقاطع

(۲) مماس خارج

(۱) مماس داخل

۱۳- اندازه دو زاویه یک چهارضلعی محاطی 102° و 75° می‌باشد. اندازه بزرگ‌ترین زاویه این چهارضلعی کدام است؟

(۴) 105°

(۳) 102°

(۲) 108°

(۱) 110°

۱۴- یک n ضلعی منتظم بر دایره‌ای به شعاع r محیط و در دایره‌ای به شعاع r' محاط شده است. حاصل $\frac{r}{r'}$ کدام است؟

(۴) $\cot(\frac{180^\circ}{n})$

(۳) $\tan(\frac{180^\circ}{n})$

(۲) $\cos(\frac{180^\circ}{n})$

(۱) $\sin(\frac{180^\circ}{n})$

۱۵- در مثلث ABC ، شعاع دایره محاطی داخلی نصف یکی از شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی بوده و از دو شعاع دایره‌های محاطی دیگر به اندازه ۱ و ۵ واحد کوچک‌تر است. شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC کدام است؟

(۴) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(۳) $\frac{4\sqrt{6}}{3} - 1$

(۲) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

(۱) $\frac{2\sqrt{6}}{3} - 1$

۱۶- دوزنقه‌ای با قاعده‌های ۱ و ۶، امتداد ساق‌ها بر هم عمودند. اگر نیمسازهای زوایای این دوزنقه در O هم‌رس باشند، طول ساق کوچک‌تر کدام است؟

(۴) 4

(۳) $2,5$

(۲) 3

(۱) $3,5$



۱۷- چه تعداد از تبدیل‌های زیر همانی هستند؟

الف- دوران حول نقطه A با زاویه θ که در آن θ مضرب صحیحی از π است.

ب- تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k که در آن $k^2 = 1$ است.

ج- بازتاب‌های متوالی، ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها.

د- انتقال تحت بردار غیر صفر $\vec{v}$.

④ صفر

③ ۱

② ۲

① ۳

۱۸- دو دایره $C(O, 2)$ و $C'(O', 4)$ با طول خط‌المركزین $OO' = 9$ به مرکز A متجانس مستقیم و به مرکز B متجانس معکوس یکدیگرند. فاصله A و B از هم چقدر است؟

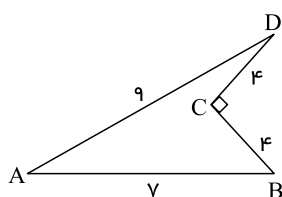
④ ۱۸

③ ۱۵

② ۱۲

① ۱۰

۱۹- دور زمینی مطابق شکل حصارکشی شده است. با جابه‌جایی حصارهای BC و CD بدون آنکه طول آنها تغییر کند، مساحت زمین را افزایش می‌دهیم. مقدار مساحت زمین چقدر می‌شود؟



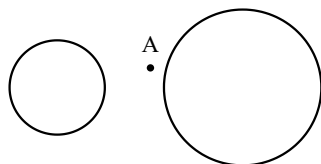
④ $14 + 16\sqrt{2}$

③ $16 + 14\sqrt{2}$

② $14 + 8\sqrt{2}$

① $8 + 14\sqrt{2}$

۲۰- در شکل زیر می‌دانیم پاره‌خطی وجود دارد که دو سر آن روی دو دایره بوده و وسط آن منطبق بر نقطه A است. با کدام تبدیل می‌توان این پاره‌خط را رسم کرد؟



④ تجانس مستقیم

③ بازتاب

② انتقال

① دوران

۲۱- نقاط A و B به ترتیب به فاصله‌های ۴ و ۹ از خط d مفروض‌اند. اگر نقاط A' و B' به ترتیب بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d بوده و چهارضلعی $AA'B'B$ محیطی باشد، مساحت این چهارضلعی کدام است؟

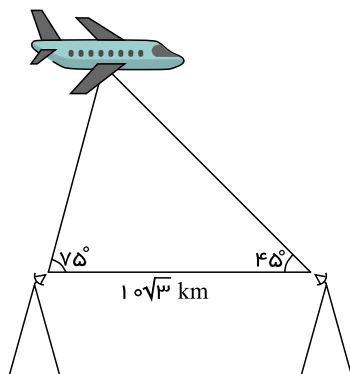
④ ۱۵۶

③ ۱۴۴

② ۱۳۲

① ۱۲۰

۲۲- دو ایستگاه رادار که در فاصله $10\sqrt{3}$ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۷۵ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصله هواپیما از ایستگاه سمت چپ چند کیلومتر است؟



① $10\sqrt{3} + 10$

② $5\sqrt{3} + 5$

③ $5\sqrt{2}$

④ $10\sqrt{2}$

۲۳- یک لوزی هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه کوچک‌تر در هر مثلث حاصل از رسم قطرهای این لوزی چند درجه است؟

④ ۴۵

③ ۳۰

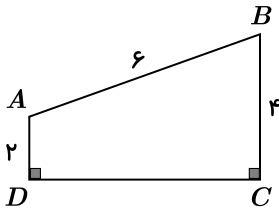
② ۱۵

① ۱۰



۲۴- در دوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ ، $AD = 2$ ، $BC = 4$ و $AB = 6$.

نقطه M روی DC متغیر است. کمترین محیط مثلث MAB چقدر است؟



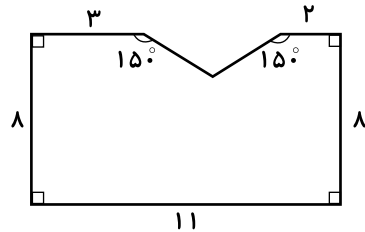
(۲) $3\sqrt{17} - 6$

(۱) $\sqrt{17} + 6$

(۴) $2\sqrt{17} + 6$

(۳) $2\sqrt{17} - 6$

۲۵- مطابق شکل، زمینی فنس کشی شده است. اگر بخواهیم طول فنس به کار رفته تغییر نکند و مساحت زمین بیشترین مقدار باشد، آنگاه این مقدار کدام است؟



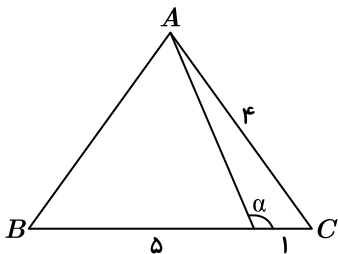
(۲) $88 + \sqrt{3}$

(۱) $88 + 3\sqrt{3}$

(۴) $44 + \sqrt{3}$

(۳) $44 + 3\sqrt{3}$

۲۶- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



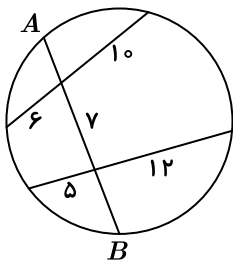
(۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(۳) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) $-\frac{2}{5}$

۲۷- در شکل زیر، طول وتر AB کدام است؟



(۴) ۱۹

(۳) ۱۸

(۲) ۱۷

(۱) ۱۶

۲۸- مماس‌های رسم شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر شعاع دایره کوچک‌تر ۱٫۵ و فاصله بین مراکز دو دایره ۲٫۵ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر، کدام است؟

(۴) ۲

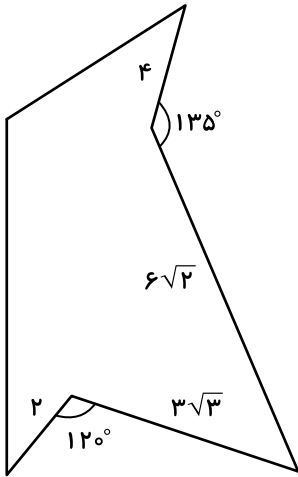
(۳) ۳

(۲) $\sqrt{5}$

(۱) $\sqrt{3}$



۲۹ - میزان افزایش مساحت شکل زیر، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟



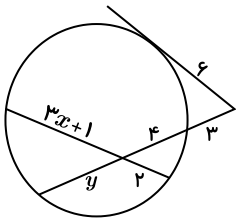
۳۹ (۴)

۳۳ (۳)

۱۹٫۵ (۲)

۱۶٫۵ (۱)

۳۰ - در شکل زیر، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۰٫۶ (۴)

۰٫۵ (۳)

۰٫۴ (۲)

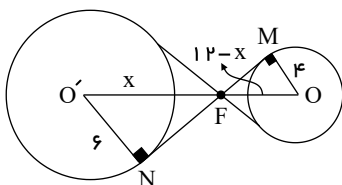
۰٫۳ (۱)



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

دو مماس مشترک داخلی در نقطه‌ای روی خط المکزین دو دایره هم‌مرس هستند. مطابق شکل داریم:

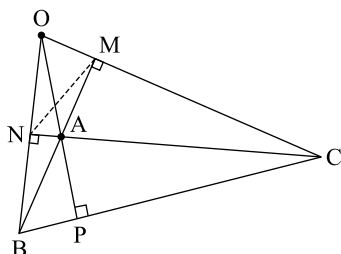


$$\triangle MOF \sim \triangle NO'F \text{ (تثلیث اضلاع)} \Rightarrow \frac{OM}{O'N} = \frac{OF}{O'F} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{12-x}{x} \Rightarrow 4x = 36 - 3x \Rightarrow 7x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{7} = 5,1$$

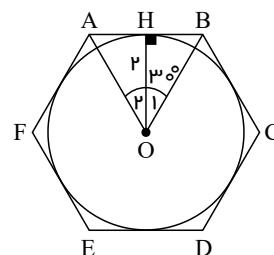
۲ - گزینه ۲

نقطه O محل هم‌مرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است، پس BN و CM دو ارتفاع این مثلث هستند.

با توجه به اینکه $\hat{BMC} = \hat{BNC} = 90^\circ$ است، پس نقاط M و N روی دایره‌ای به قطر BC هستند. یعنی چهارضلعی BNMC محاطی است.



۳ - گزینه ۲



طول ضلع شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع $R = 2$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a = 2R \tan \frac{180^\circ}{6} = 2 \times 2 \tan 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

مساحت این شش‌ضلعی منتظم برابر است با:

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{16}{3} = 8\sqrt{3}$$

۴ - گزینه ۱ با توجه به فرض داریم:

$$\widehat{CBT} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} + \widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + 80^\circ + \widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{AB} = 280^\circ \quad (1)$$

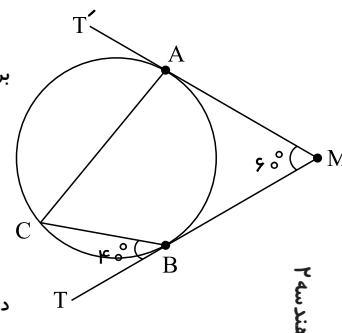
$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow 60^\circ = \frac{\widehat{AC} + 80^\circ - \widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} - \widehat{AB} = 40^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{AC} = 160^\circ, \widehat{AB} = 120^\circ$$

$$\widehat{CAM} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} = \frac{120^\circ + 80^\circ}{2} = \frac{200^\circ}{2} = 100^\circ$$

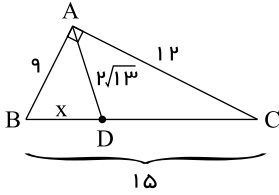
برای زاویه $\hat{M}$ داریم:



در نتیجه زاویه ظلی $\widehat{CAM}$ برابر است با:



۵ - گزینه ۳ اندازه وتر BC از رابطه فیثاغورس برابر ۱۵ به دست می‌آید، پس $\cos \hat{B} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:



$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos \hat{B} \Rightarrow (2\sqrt{13})^2 = 9^2 + x^2 - 18x\left(\frac{3}{5}\right)$$

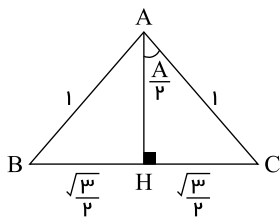
$$\Rightarrow x^2 - \frac{54}{5}x + 29 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 54x + 29 \times 5 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 54^2 - 4 \times 5 \times 29 \times 5 = 2916 - 2900 = 16 \Rightarrow x = \frac{54 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{54 \pm 4}{10} = 5,8, 5$$

بیشترین مقدار x برابر ۵,۸ است.

۶ - گزینه ۱

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین مطابق شکل داریم:

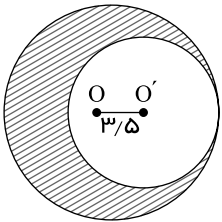


$$\sin \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

$$R = \frac{BC}{2 \sin \hat{A}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

شعاع دایره محیطی

۷ - گزینه ۱



$$OO' = r - r' = 3,5$$

$$S_{\text{دایره کوچکتر}} - S_{\text{دایره بزرگتر}} = S_{\text{هاشور}}$$

$$21\pi = \pi r^2 - \pi r'^2 \rightarrow 21 = r^2 - r'^2$$

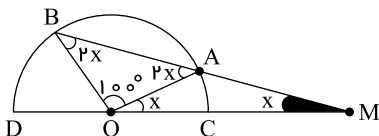
$$\rightarrow 21 = (r - r')(r + r') \rightarrow 21 = 3,5 \times (r + r')$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow r + r' = 6 \\ \rightarrow r - r' = 3,5 \end{array} \right\} \rightarrow 2r' = 2,5 \rightarrow r' = 1,25$$

۸ - گزینه ۲ با توجه به شکل صورت سؤال باید از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، مساحت سه کمان 60° درجه از دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را کم کرده و مساحت سه نیم‌دایره به شعاع ۱ را به آن بیفزاییم. پس مساحت ناحیه هاشورخورده برابر می‌شود با:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(4)^2 - 3 \times \frac{1}{6}\pi(1)^2 + 3 \times \frac{1}{2}\pi(1^2) \Rightarrow S = 4\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 4\sqrt{3} + \pi$$

۹ - گزینه ۲ با توجه به شکل داریم:



$$MA = OA \Rightarrow \hat{AOC} = \hat{M} = x$$

$$\hat{OAB} = x + x = 2x$$

$$OB = OA \Rightarrow \hat{OBA} = \hat{OAB} = 2x$$

از زاویه خارجی مثلث OAM است، بنابراین:

از زاویه خارجی



بنابراین در مثلث OAB :

$$2x + 2x + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow 4x = 80^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

۱۰ - گزینه ۳ طبق روابط طولی در دایره $C(O, R)$ داریم:

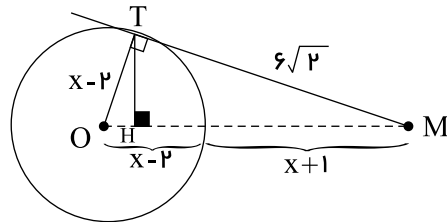
$$IB = CM \cdot MD \quad (*)$$

$$\begin{cases} CD = CM + MD = 10 \\ \frac{CM}{MD} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CM = 4 \\ MD = 6 \end{cases} \xrightarrow{*} AM(11 - AM) = 4 \times 6 \Rightarrow AM^2 - 11AM + 24 = 0 \Rightarrow (AM - 3)(AM - 8) = 0 \xrightarrow{\text{فرض: } AM < MB} \begin{cases} AM = 3 \\ MB = 8 \end{cases}$$

اختلاف پاره‌های جدا شده روی AB برابر است با $8 - 3 = 5$.

۱۱ - گزینه ۳

با توجه به اطلاعات صورت سوال خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} \triangle OTM : OM^2 &= OT^2 + MT^2 \\ \Rightarrow (2x - 1)^2 &= (x - 2)^2 + (6\sqrt{2})^2 \\ \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 &= x^2 - 4x + 4 + 72 \\ \Rightarrow 3x^2 &= 75 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

$$TH \times OM = OT \times TM \Rightarrow TH \times 9 = 3 \times 6\sqrt{2} \Rightarrow TH = 2\sqrt{2}$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه OTM داریم:

۱۲ - گزینه ۲

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$12 = \sqrt{d^2 - (12 - 3)^2} \Rightarrow 144 = d^2 - 81 \Rightarrow d^2 = 225 \Rightarrow d = 15$$

بنابراین:

بنابراین:

$$d = R + R'$$

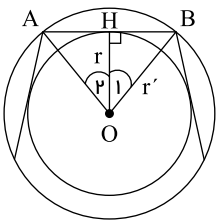
در نتیجه دو دایره مماس خارج هستند.

۱۳ - گزینه ۴ می‌دانیم در هر چهارضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکمل‌اند. چون دو زاویه 102° و 75° مکمل یکدیگر نیستند، پس این دو زاویه روبه‌رو به هم نبوده و مجاور یکدیگرند. پس:

$$102^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 78^\circ$$

$$75^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 105^\circ \text{ (بزرگترین زاویه)}$$

۱۴ - گزینه ۲ مطابق شکل و فرض داریم:



$$\hat{O}_1 = \hat{O}_r = \frac{1}{r}(AOB) = \frac{1}{r}\left(\frac{360^\circ}{n}\right) = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\triangle BOH : \cos \hat{O}_1 = \frac{OH}{OB} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{r}{r'} = \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

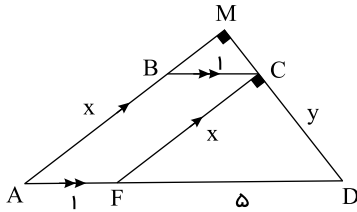
۱۵ - گزینه ۱ اگر شعاع دایره محاطی داخلی را r بگیریم، سه شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث برابر $2r$ ، $r + 1$ ، $r + 5$ خواهد شد. رابطه زیر بین شعاع‌های دایره‌های محاطی مثلث برقرار است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+5} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{(r+5) + (r+1)}{(r+1)(r+5)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} = \frac{1}{2r} \\ \Rightarrow 4r^2 + 12r &= r^2 + 6r + 5 \Rightarrow 3r^2 + 6r - 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 60}}{6} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{6}}{6} \xrightarrow{r > 0} r = \frac{2\sqrt{6}}{3} - 1 \end{aligned}$$

پاسخ



چون نیمسازهای زوایای دوزنقه $ABCD$ هم‌رس‌اند، پس دوزنقه محیطی است. از C خطی موازی ساق AB رسم می‌کنیم تا قاعده AD را در F قطع کند. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel FC \\ AF \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow ABCF \text{ متوازی‌الاضلاع است} \Rightarrow AF = BC = 1, FC = AB = x \Rightarrow FD = AD - AF = 6 - 1 = 5$$

$$\text{دوزنقه } ABCD \text{ محیطی است} \Rightarrow AB + CD = BC + AD \Rightarrow x + y = 1 + 6 = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{طرفین تساوی را به} \\ \text{مربع کنیم} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 7^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 49 \\ \Delta FCD: x^2 + y^2 = 5^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow 25 + 2xy = 49$$

$$\Rightarrow 2xy = 24 \Rightarrow xy = 12 \Rightarrow x(7-x) = 12 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ساق کوچکتر} \Rightarrow y = 4 \text{ ساق بزرگتر}$$

۱۷ - گزینه ۴ هیچ‌کدام از تبدیل‌های فوق، همانی نیستند.

مورد (الف): دوران حول نقطه A زمانی همانی خواهد بود که زاویه دوران مضرب صحیحی از 2π باشد.

مورد (ب): تجانس به مرکز O زمانی همانی خواهد بود که نسبت تجانس $k = 1$ باشد.

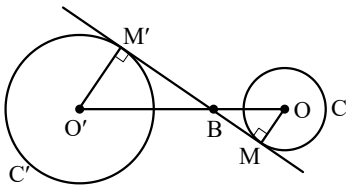
مورد (ج): بازتاب‌های متوالی، ابتدا نسبت به محور x ها و سپس محور y ها، معادل تبدیلی است که توسط آن قرینه نقطه را نسبت به مبدأ مختصات، به دست می‌دهد که همانی نیست.

مورد (د): انتقال زمانی همانی خواهد بود که بردار انتقال، بردار صفر باشد.

۱۸ - گزینه ۲

دو دایره C و C' متخارج‌اند. محل تقاطع خط‌المركزین با مماس‌های مشترک داخلی، مرکز تجانس معکوس B و محل تقاطع امتداد خط‌المركزین با

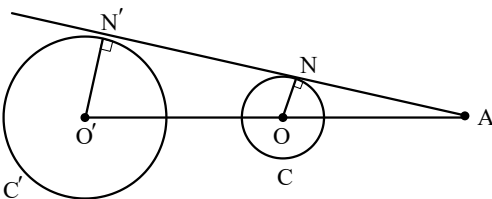
مماس‌های مشترک خارجی، مرکز تجانس مستقیم A است. با توجه به شکل داریم:



$$\Delta OMB \sim \Delta O'M'B \Rightarrow \frac{OB}{O'B} = \frac{OM}{O'M'} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OB}{OO'} = \frac{2}{2+4} \Rightarrow OB = \frac{2}{6} \times 9 = 3$$

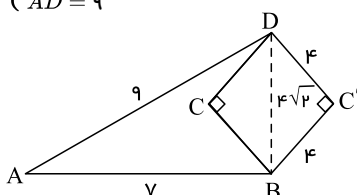
$$\Delta ONA \sim \Delta O'N'A \Rightarrow \frac{OA}{O'A} = \frac{ON}{O'N'} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{OA}{OO'} = \frac{2}{4-2} \Rightarrow OA = \frac{2}{2} \times 9 = 9$$

در نتیجه با توجه به شکل $AB = OB + OA = 12$ است.



۱۹ - گزینه ۱ طول وتر BD در مثلث قائم‌الزاویه BCD برابر $4\sqrt{2}$ می‌شود. رابطه فیثاغورس بین اضلاع مثلث ABD برقرار است، پس این مثلث در رأس B قائم‌الزاویه است:

$$\begin{cases} AB = 7 \\ BD = 4\sqrt{2} \rightarrow 7^2 + (4\sqrt{2})^2 = 49 + 32 = 81 = 9^2 \\ AD = 9 \end{cases}$$



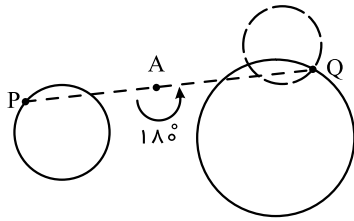
با بازتاب نقطه C نسبت به پاره خط BD ، نقطه C' را می‌یابیم؛ با این کار بدون تغییر در محیط چهارضلعی $ABCD$ ، مساحت آن را افزایش

می‌دهیم. مقدار مساحت زمین $ABC'D$ برابر است با:



$$S_{ABC'D} = S_{ABD} + S_{BC'D} = \frac{7 \times 4\sqrt{2}}{2} + \frac{4 \times 4}{2} = 14\sqrt{2} + 8$$

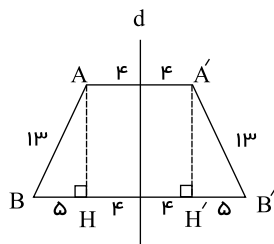
۲۰ - گزینه ۱



فرض کنیم مطابق شکل، پاره خط PQ ویژگی موردنظر را دارد. در واقع نقطه P با دوران 180° نسبت به نقطه A بر نقطه Q منطبق می‌شود. پس بهترین کار آن است که دایره کوچک را با دوران 180° حول نقطه A دوران دهیم و با دایره بزرگ تر تقاطع دهیم. نقطه تقاطع همان نقطه Q خواهد بود و بدین ترتیب پاره خط QA را از طرف A امتداد می‌دهیم تا دایره کوچک را در نقطه P قطع کند.

توجه: با تجانس معکوس و ضریب تجانس $k = -1$ هم می‌توان این کار را انجام داد.

۲۱ - گزینه ۴



مطابق شکل $AA' = 8$ و $BB' = 18$ است. چهارضلعی $AA'B'B$ محیطی است، بنابراین داریم:

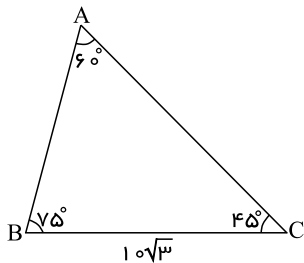
$$AB + A'B' = AA' + BB' = 8 + 18 = 26$$

بازتاب تبدیلی طولیاست، پس $AB = A'B' = 13$ است و در نتیجه داریم:

$$\triangle AHB: AH^2 = AB^2 - BH^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AH = 12$$

$$S_{AA'B'B} = \frac{1}{2}AH(AA' + BB') = \frac{1}{2} \times 12(8 + 18) = 156$$

۲۲ - گزینه ۴

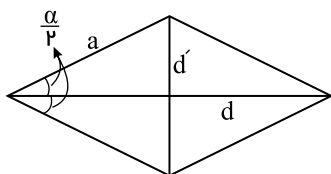


مثلث ABC ، شکل مربوط به این سؤال است. زاویه سوم مثلث برابر 60° می‌شود. طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AB = \frac{10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2}$$

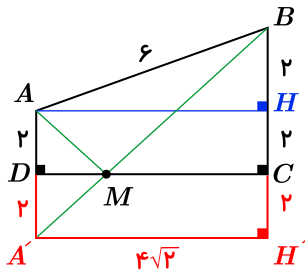
پس هواپیما در فاصله $10\sqrt{2}$ کیلومتری از ایستگاه سمت چپ قرار دارد.

۲۳ - گزینه ۲



$$S = \frac{1}{2}dd' = a^2 \sin \alpha \xrightarrow{a^2 - dd'} \sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 15^\circ$$

۲۴ - گزینه ۴

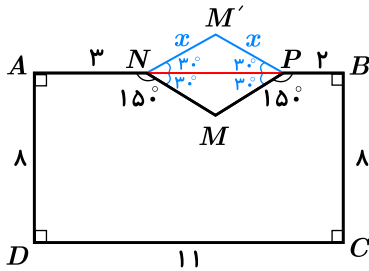


$$AH'^2 = AB'^2 - BH'^2 = 36 - 4 \Rightarrow A'H' = AH = DC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} MA + MB + AB &= MA' + MB + AB = A'B + AB = A'B + 6 \\ A'B^2 &= (4\sqrt{2})^2 + (6)^2 = 68 \Rightarrow A'B = 2\sqrt{17} \end{aligned} \right\} \Rightarrow ? = 2\sqrt{17} + 6$$

از طرفی

۲۵ - گزینه ۱



$$NP = 11 - (3 + 2) = 6, \quad \hat{m}' = 12^\circ$$

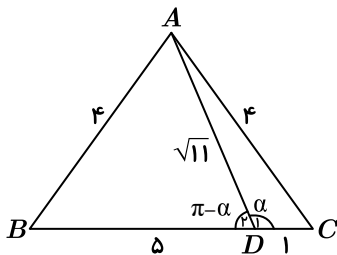
$$x^2 + x^2 - 2x^2 \cos 12^\circ = 36 \Rightarrow x^2 = 12$$

قضیه کسینوسها

$$S_{NM'P} = \frac{1}{2} x^2 \sin 12^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \rightarrow \text{جواب} = 88 + 3\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = 8 \times 11 = 88$$

۲۶ - گزینه ۳



$ABC \rightarrow$ متساوی الساقین است $AB = AC = 4$

رابطه استوارت: $AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$

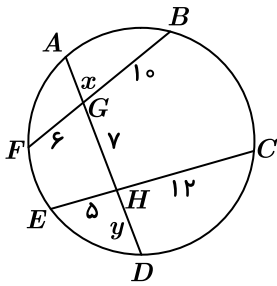
$$4^2 \times 1 + 4^2 \times 4 = AD^2 \times 5 + 1 \times 4 \times 5 \rightarrow 16 + 64 = 5AD^2 + 20 \rightarrow 66 = 5AD^2 \rightarrow 11 = AD^2 \rightarrow AD = \sqrt{11}$$

$\triangle ADC$: قضیه کسینوسها: $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \times \cos \alpha$

$$4^2 = 11 + 1 - 2\sqrt{11} \times 1 \times \cos \alpha \rightarrow 4 = -2\sqrt{11} \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \rightarrow \frac{1}{(-\frac{2}{\sqrt{11}})^2} = 1 + \tan^2 \alpha \rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \xrightarrow{\alpha \text{ منفرجه است}} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

۲۷ - گزینه ۲ با استفاده از روابط طولی در دایره داریم:

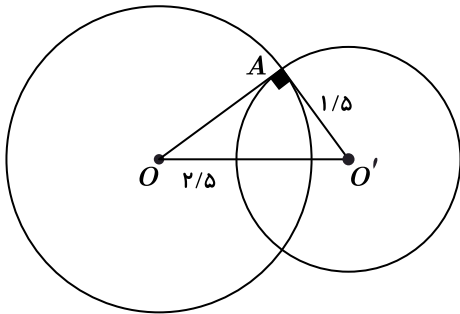


$$\left. \begin{aligned} AG \times GD &= FG \times GB \rightarrow x(7+y) = 6 \times 10 \\ DH \times HA &= EH \times HC \rightarrow y(7+x) = 5 \times 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(7+y) = y(7+x) + 7x + xy = 7y + xy \Rightarrow x = y$$

$$x(7+x) = 60 \rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0 \rightarrow (x+12)(x-5) = 0 \rightarrow x = 5, y = 5$$

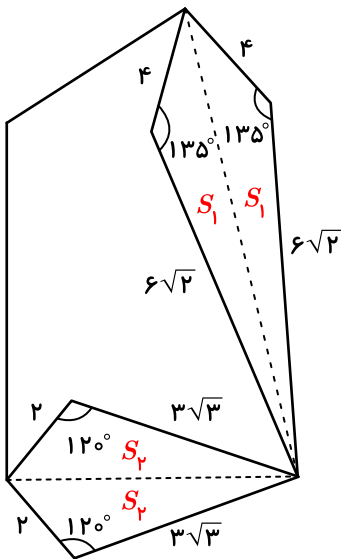
$$AB = x + 7 + y = 5 + 7 + 5 = 17$$

۲۸ - گزینه ۴



$$\triangle AOO' : OA^2 + 1,5^2 = 2,5^2 \rightarrow OA^2 = 6,25 - 2,25 = 4 \rightarrow OA = 2$$

۲۹ - گزینه ۳



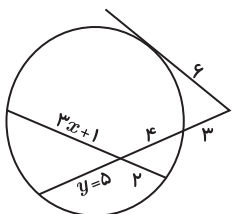
$$\Delta S = 2S_1 + 2S_2$$

$$\Rightarrow \Delta S = 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 6\sqrt{2} \times \sin 135^\circ + 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{3} \times \sin 120^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta S = 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 33$$

۳۰ - گزینه ۴

با استفاده از روابط طولی در دایره داریم:



$$6^2 = 3(7+y) \Rightarrow 36 = 21 + 3y \Rightarrow y = 5$$

$$4 \times 5 = 2(3x+1) \Rightarrow 20 = 6x + 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} = 0,6$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۳	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۲	۷ - ۱	۱۲ - ۲	۱۷ - ۴	۲۲ - ۴	۲۷ - ۲
۳ - ۲	۸ - ۲	۱۳ - ۴	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۴
۴ - ۱	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۱	۲۴ - ۴	۲۹ - ۳
۵ - ۳	۱۰ - ۳	۱۵ - ۱	۲۰ - ۱	۲۵ - ۱	۳۰ - ۴