۱

سؤالات طبقه‌بندی

۱- خط d و دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند، اگر خط شامل A و B بر خط d عمود نباشد، چند نقطه روی d وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله است؟

۱) یک ۲) صفر ۳) صفر یا یک ۴) بی‌شمار

۲- نقطه A به فاصله $۵ - ۲x$ از خط d مفروض است. اگر دو نقطه روی خط d وجود داشته باشد که از نقطه A به فاصله ۵ باشد، کدام گزینه در بازه x صحیح است؟

۱) $x = ۲$ ۲) $x < ۵$ ۳) $x = ۵$ ۴) $۲ < x$

۳- دو نقطه A و B به فاصله ۶ از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۴ و از نقطه B به فاصله ۳ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴- نقطه A به فاصله $۵ + ۲x$ از خط d مفروض است. اگر دو نقطه روی خط d وجود داشته باشند که از نقطه A به فاصله ۱۳ باشند، حدود تغییرات x کدام است؟

۱) $x = ۴$ ۲) $-\frac{۵}{۲} \leq x < ۴$ ۳) $x > ۴$ ۴) $۰ < x < ۴$

۵- نقطه A به فاصله ۵ از خط d قرار دارد. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۴ باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶- دو نقطه A و B به فاصله ۱۰ از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر و از نقطه B به فاصله ۶ سانتی‌مترند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) صفر

۷- دو نقطه A و B به فاصله ۵ سانتی‌متر مفروض‌اند. چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله ۴ و از B به فاصله ۳ سانتی‌مترند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۸- فرض کنید پاره‌خط AB و خط d متعامد نیستند. روی خط d چند نقطه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

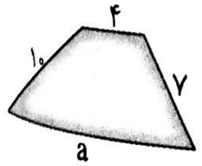
۹- چند نقطه در صفحه وجود دارد که از دو خط متقاطع D و D' به یک فاصله‌اند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۰- زاویه $X\hat{O}Y$ و دایره C مماس بر اضلاع زاویه مفروض است. بر روی دایره چند نقطه وجود دارد که از اضلاع زاویه به یک فاصله می‌باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱- اگر ذوزنقه مقابل قابل رسم باشد، آن‌گاه a کدام مقدار می‌تواند باشد؟



۱) ۷
۲) ۲۳
۳) ۲۱
۴) ۱۹

۱۲- کدام دسته از اعداد زیر می‌تواند سه ضلع یک مثلث باشند؟

۱) ۳، ۵، ۷ ۲) ۲، ۳، ۶ ۳) ۱، ۲، ۳ ۴) ۱، ۳، ۴

۱۳- در مثلثی ۸ = h_a، ۱۰ = m_a و ۱۷ = c ضلع a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۴- با کدام‌یک از سه طول داده شده می‌توان یک مثلث ساخت؟

۱) ۱، ۲ و ۳ ۲) $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ ۳) ۱/۷، ۱/۳ و ۴ ۴) $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۱۰}$

۱۵- با اطلاعات ۸ = a و ۶ = b و ۵ = h_a چند مثلث قابل رسم است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶- با معلومات ۲ = h_a، ۱ = b، ۳ = c چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۱۷- با معلومات ۱ = h_a، ۱ = b و ۳ = c چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

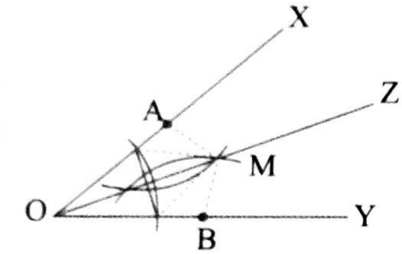
۱۸- در مثلث ABC طول ارتفاع ۸ = h_a، ۱۷ = b و ۱۰ = c. مساحت این مثلث کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

۱) فقط ۸۴ ۲) فقط ۳۶ ۳) ۸۴ و ۴۲ ۴) ۸۴ و ۳۶

۱۹- با معلومات ۱ = h_a، ۲ = b و ۳ = c چند مثلث متمایز می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۲۰- مرکز کمان‌ها در شکل مقابل، نقاط O، A و B هستند. کدام گزینه نادرست است؟



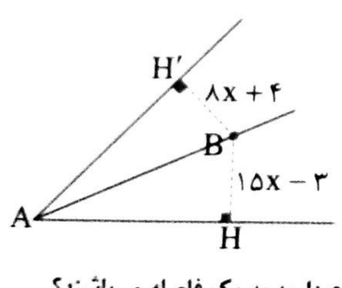
۱) OZ نیمساز $X\hat{O}Y$ است.

۲) OZ عمودمنصف AB است.

۳) OM نیمساز زاویه $A\hat{M}B$ است.

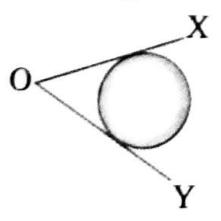
۴) AB عمودمنصف OM است.

۲۱- در شکل مقابل، AB نیمساز A است. با توجه به شکل مقابل مقدار x کدام است؟



۱) ۶
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۱

۲۲- در شکل زیر، اضلاع زاویه $X\hat{O}Y$ بر یک دایره مماس‌اند. چند نقطه روی محیط دایره وجود دارد که از اضلاع زاویه به یک فاصله می‌باشند؟

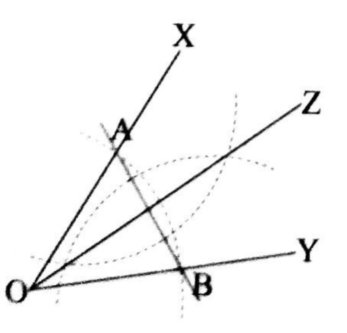


۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) بی‌شمار

۲۳- مرکز کمان‌ها در شکل مقابل، نقاط A، O و B هستند. در این‌صورت کدام عبارت درست است؟

الف) OZ عمودمنصف AB است.

ب) OZ نیمساز $X\hat{O}Y$ است.



۱) «الف» درست و «ب» نادرست است.

۲) «الف» نادرست و «ب» درست است.

۳) هر دو درست هستند.

۴) هر دو نادرست هستند.

۲۴- **کدام‌یک از ویژگی‌های زیر مربوط به نیمساز یک زاویه است؟**

۱) هر نقطه روی آن از اضلاع زاویه به یک فاصله است.

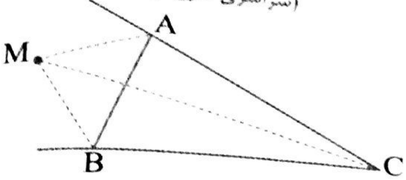
۲) هر نقطه روی نیمساز از هر پاره‌خط مفروض به یک فاصله است.

۳) مجموع فاصله‌های هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع، مقدار ثابتی است.

۴) هر نقطه روی هر ضلع از زاویه، فاصله‌اش از نیمساز و ضلع دیگر آن با هم برابر است.

(سراسری خارج از کشور ریاضی-۹۴)

۲۵- **در شکل مقابل، نقطه M روی نیمساز خارجی زاویه A است. نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟**



۱) بزرگ‌تر از ۱

۲) کمتر از ۱

۳) برابر با ۱

۴) غیرمشخص

۲۶- **مراکز دایره‌هایی که از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرند روی .... قرار دارند.**

۱) دو خط عمود بر AB ۲) عمودمنصف AB ۳) دو خط موازی AB ۴) خطی موازی AB

۲۷- **در مثلث ABC داریم $\hat{B}+\hat{C}=70^\circ$، نقطه تلاقی عمودمنصف‌های این مثلث کجا قرار دارد؟**

۱) داخل مثلث ۲) خارج مثلث ۳) یکی از رئوس مثلث ۴) وسط ضلع بزرگ

۲۸- **نقطه تلاقی ارتفاع‌های مثلث به ضلع‌های ۶، ۸ و ۱۲ کجا قرار می‌گیرد؟**

۱) درون مثلث ۲) بیرون مثلث ۳) روی محیط مثلث ۴) وسط ضلع بزرگ‌تر

۲۹- **در مثلث ABC داریم $\hat{A}>\hat{B}+\hat{C}$، در این مثلث محل تلاقی ارتفاع و عمودمنصف‌ها به‌ترتیب کدام است؟**

۱) خارج مثلث- خارج مثلث

۲) وسط یکی از اضلاع- روی یکی از رئوس

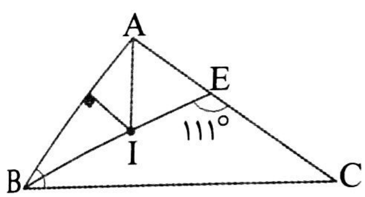
۳) روی یکی از رئوس- وسط یکی از اضلاع

۴) روی یکی از رئوس- خارج مثلث

۳۰- **در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائمه ۶ و ۸ سانتی‌متر، فاصله محل تلاقی سه ارتفاع از محل تلاقی سه عمودمنصف چقدر است؟**

۱) ۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶ ۴) ۶/۵

۳۱- **در شکل زیر عمودمنصف ضلع AB و نیم‌ساز رأس A در نقطهٔ I متقاطع هستند و امتداد BI، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اگر $B\hat{E}C=111^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟**



۱) ۷۴

۲) ۴۵

۳) ۳۷

۴) ۹۰

۳۲- **اگر O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد و داشته باشیم $OA=x+2$، $OB=3x-4$ و $OC=y+2$، حاصل $x+y$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۳- **مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ مفروض است. عمودمنصف دو ضلع AB و BC یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. اگر فاصلهٔ O تا نقاط B و C به‌ترتیب $2x-1$ و $x+2$ باشد، اندازهٔ OA چقدر است؟**

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- **در صفحهٔ شامل مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، چند نقطه وجود دارد که از B و C به یک فاصله بوده و از AB و AC نیز به یک فاصله باشد؟**

۱) صفر ۲) همواره یک ۳) همواره بی‌شمار ۴) یک یا بی‌شمار

۳۵- **متوازی‌الاضلاعی با معلوم بودن دو قطر به اندازه‌های ۴ و ۸ و ضلع a قابل رسم است. a کدام عدد <u>نمی‌تواند</u> باشد؟**

۱) ۳/۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶/۵

۳۶- **متوازی‌الاضلاعی با طول دو ضلع ۴ و ۸ و طول قطر d رسم شده است. d کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۱۵ ۴) ۳

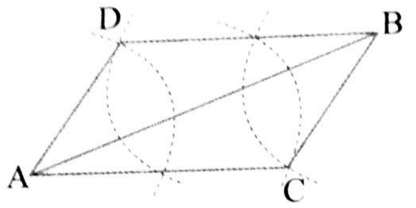
۳۷- به مرکز یک سر پاره‌خط به طول ۸، کمانی به شعاع ۵ می‌زنیم. سپس به مرکز سر دیگر پاره‌خط AB کمانی به همین شعاع می‌زنیم. اگر این دو کمان در نقاط C و D یکدیگر را قطع کنند، مساحت چهارضلعی با رئوس A، B، C و D کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۳۸- با اطلاعات داده شده در کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌توان چند شکل غیرهم‌نهشت رسم کرد؟

۱) رسم مربعی با قطر به طول a
۲) لوزی با دو قطر به طول‌های ۵ و ۳
۳) رسم متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۳ و ۵
۴) رسم مستطیل با طول قطر ۵ و ضلع به طول ۲

۳۹- پاره‌خط AB به طول ۸ مفروض است. دهانه پرگار را یک بار به اندازه a و بار دیگر به اندازه b باز می‌کنیم و از نقطه A دو کمان می‌زنیم، سپس با همان اندازه‌ها، کمان‌هایی از نقطه B می‌زنیم و مانند شکل نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. با کدام شرط ACBD می‌تواند یک متوازی‌الاضلاع باشد؟



۱) $b = ۱۲$ و $a = ۵$
۲) $a + b = ۹$
۳) $a + b = ۸$
۴) همواره متوازی‌الاضلاع است.

۴۰- چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد که قطرهای آن ۶ و ۴ می‌باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۴۱- با اطلاعات داده شده در کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌توان چند شکل غیرهم‌نهشت رسم کرد؟

۱) رسم مربع با پاره‌خط مفروض DE به‌عنوان قطر آن
۲) لوزی با قطرهای به طول ۳ و ۴
۳) رسم متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۳ و ۵ و طول ضلع ۲
۴) رسم مستطیل به طول قطر ۴

۴۲- برای رسم یک متوازی‌الاضلاع داشتن موارد کدام گزینه کافی نیست؟

۱) طول دو قطر
۲) طول دو ضلع مجاور و طول یکی از قطرها
۳) طول قطرها و اندازه زاویه بین آن‌ها
۴) طول دو ضلع مجاور و یکی از زاویه‌ها

۴۳- می‌دانیم چهارضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. چند متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۸ و ۱۰ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۴- چند لوزی به طول ضلع ۲ و قطر کوچک ۶ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۵- به مرکز یک سر پاره‌خط AB به طول ۱۰، کمانی به شعاع ۷ می‌زنیم، سپس به مرکز سر دیگر پاره‌خط AB کمانی به همین شعاع می‌زنیم. اگر این دو کمان در نقاط C و D یکدیگر را قطع کنند، با چهار رأس A، B، C و D کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟

۱) ذوزنقه ۲) لوزی ۳) مستطیل ۴) مربع

۴۶- لوزی با طول ضلع ۴ و طول قطر $۲ + m$ قابل رسم است. کدام مقدار برای m قابل قبول نیست؟

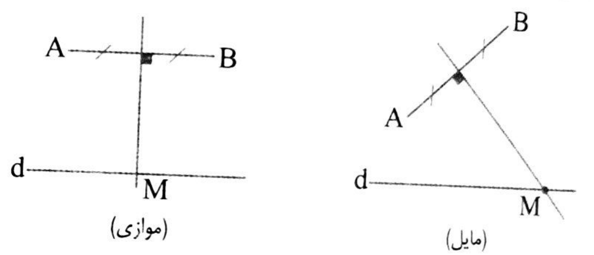
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۷- پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. عمودمنصف AB آن را در نقطه M قطع می‌کند، به مرکز M و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس قطر CD عمود بر AB می‌باشد را رسم می‌کنیم. چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) مربع ۲) لوزی ۳) مستطیل ۴) ذوزنقه

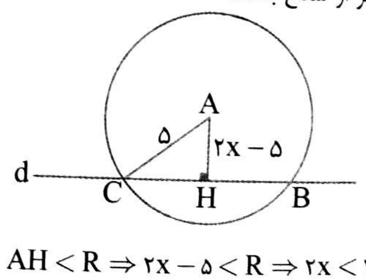
پاسخ نامه

۱. گزینهٔ (۱)



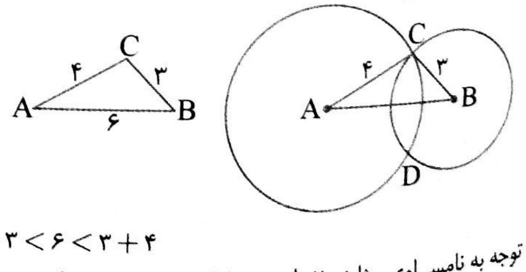
محل تلاقی عمودمنصف AB و d جواب است که در دو حالت نقطه M جواب سؤال است.

۲. گزینهٔ (۲) چون دو نقطه وجود دارد، بنابراین باید فاصله خط d از دایره به شعاع ۵ کمتر از شعاع باشد.



بنابراین داریم: $AH < R \Rightarrow ۲x - ۵ < R \Rightarrow ۲x < ۱۰ \Rightarrow x < ۵$

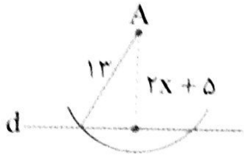
۳. گزینهٔ (۳)



$۴ - ۳ < ۶ < ۳ + ۴$

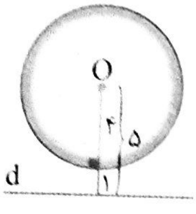
با توجه به نامساوی مثلث، ۲ دایره متقاطع هستند و ۲ نقطه در صفحه جواب هستند.

۴. گزینهٔ (۲) با توجه به این‌که دو نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۱۳ است، پس می‌توان نتیجه گرفت فاصله نقطه A از خط کمتر از ۱۳ می‌باشد، پس داریم:

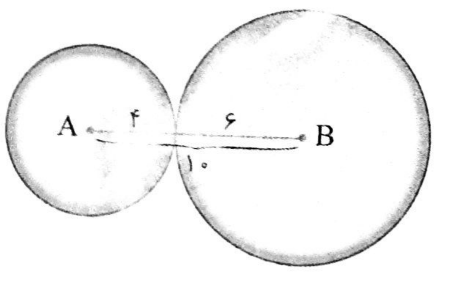


$$۰ \leq ۲x + ۵ < ۱۳$$
$$\Rightarrow -۵ \leq ۲x < ۸$$
$$\Rightarrow \frac{-۵}{۲} \leq x < ۴$$

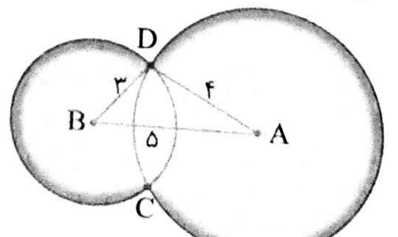
۵. گزینهٔ (۱) ابتدا برای تعیین نقاطی در صفحه که از نقطه A به فاصله ۴ می‌باشند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ رسم می‌کنیم، اما مطابق شکل مقابل چون شعاع دایره کمتر از فاصله نقطه A تا خط d است، پس دایره خط d را قطع نمی‌کند، بنابراین نقطه‌ای روی خط d وجود ندارد که از A به فاصله ۴ باشد.



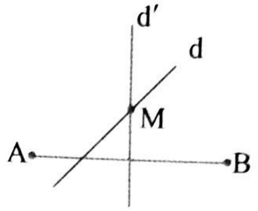
۶. گزینهٔ (۲) ابتدا پاره‌خط AB به طول ۱۰ سانتی‌متر را در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۶ رسم می‌کنیم، زیرا تمام نقاطی در صفحه که از B به فاصله ۶ سانتی‌مترند، روی این دایره است. همین‌طور دایره‌ای هم به مرکز A و شعاع ۴ رسم می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید این دو دایره بر یکدیگر در یک نقطه مماس‌اند، پس فقط این نقطه این ویژگی را دارد.



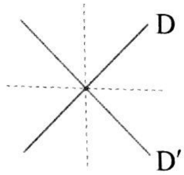
۷. گزینهٔ (۳) ابتدا پاره‌خط AB به طول ۵ سانتی‌متر را در نظر می‌گیریم. به مرکز A به شعاع ۴ و به مرکز B به شعاع ۳ دو دایره رسم می‌کنیم. این دو دایره مطابق شکل همدیگر را در نقاط C و D قطع می‌کنند. این دو نقطه هر دو ویژگی را دارند.



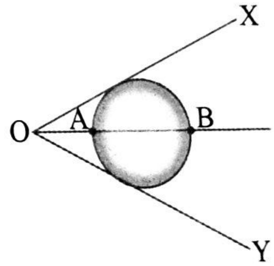
۸. گزینهٔ (۲) نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB باشند، پس جواب مسئله محل تلاقی عمودمنصف AB و خط d است که یک نقطه می‌باشد. (نقطه M در شکل زیر)



۹. گزینهٔ (۴) نقاطی در صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، نیمسازهای دو خط متقاطع می‌باشند، پس بی‌شمار نقطه در صفحه وجود دارد که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند.



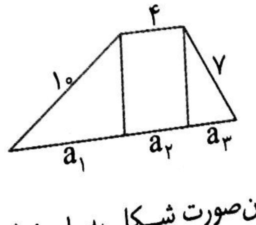
۱۰. گزینهٔ (۲) نقاطی از صفحه که از اضلاع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه می‌باشد، پس شکل مسئله مطابق توضیحات سؤال، به‌صورت زیر است:



پس جواب مسئله دو نقطه A و B است.

۱۱. گزینهٔ (۴)

$$\left.\begin{array}{l} a_۱ < ۱۰ \\ a_۲ = ۴ \\ a_۳ < ۷ \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{a_۱ + a_۲ + a_۳}_{a<۲۱} < ۴ + ۷ + ۱۰$$

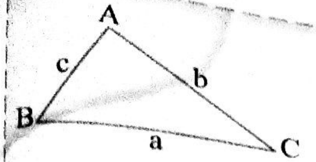


بیشترین مقدار a، عدد ۲۱ است که در این‌صورت شکل به پاره‌خط تبدیل می‌شود، بنابراین حتماً a باید کمتر از ۲۱ باشد.

۱۲. گزینهٔ (۱)

نکته

قضیه نامساوی مثلث: در هر مثلث، طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر، کوچک‌تر است.



$$a < b + c \ , \ b < a + c \ , \ c < a + b$$

از قضیه بالا می‌توان نتیجه گرفت:

در هر مثلث طول هر ضلع از قدرمطلق تفاضل طول دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و از مجموع طول آن دو ضلع کوچک‌تر است؛ یعنی داریم:

$$a > |b - c|, b > |a - c|, c > |a - b|$$

با بررسی تمامی گزینه‌ها می‌توان دریافت که گزینهٔ «۱» درست است، زیرا:

$$۳ + ۵ = ۸ > ۷$$

$$۳ + ۷ = ۱۰ > ۵$$

$$۵ + ۷ = ۱۲ > ۳$$

و اما دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:

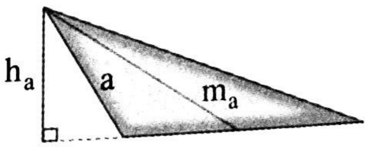
گزینهٔ «۲»: $۳ + ۲ \not> ۶$

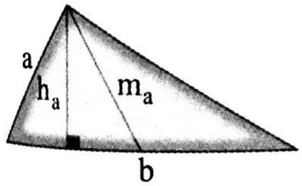
گزینهٔ «۳»: $۲ + ۱ \not> ۳$

گزینهٔ «۴»: $۳ + ۱ \not> ۴$

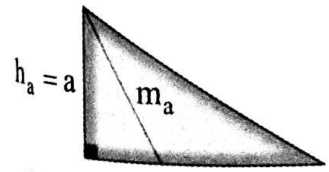
۱۳. گزینهٔ (۳) اگر از مثلث ABC، یک ضلع (مثلاً ضلع a) و میانه و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر (مثلاً h_a و m_a) معلوم باشد، در این صورت چند حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول: درصورتی که ارتفاع از ضلع و میانه کوچک‌تر باشد، دو جواب دارد.

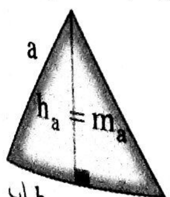




حالت دوم: اگر ارتفاع با عدد کوچک‌تر بین آن دو برابر باشد، یک جواب بیش‌تر ندارد.



الف) $h_a = a \Rightarrow$ مثلث قائم‌الزاویه است.

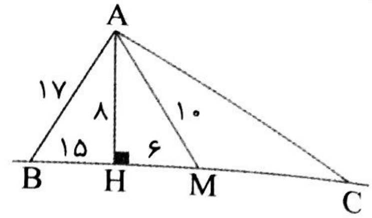


ب) $h_a = m_a \Rightarrow$ مثلث متساوی‌الساقین است.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

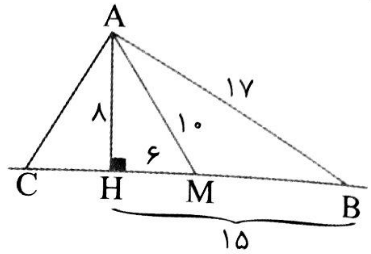
الف) پای ارتفاع بین پای میانه و نقطه B است. در این صورت:

$$BM = BH + MH = ۱۵ + ۶ = ۲۱ \Rightarrow BC = ۲BM = ۴۲$$



ب) پای میانه بین پای ارتفاع و نقطه B است. در این صورت:

$$BM = BH - MH = ۱۵ - ۶ = ۹ \Rightarrow BC = ۲BM = ۱۸$$



تذکر: در هر دو حالت برای محاسبه طول پاره‌خط‌های BH و MH، از رابطه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و AMH استفاده شده است:

$$\begin{cases} BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = ۱۷^۲ - ۸^۲ \Rightarrow BH = ۱۵ \\ MH^۲ = AM^۲ - AH^۲ = ۱۰^۲ - ۸^۲ \Rightarrow MH = ۶ \end{cases}$$

....

۱۴. گزینهٔ (۲)

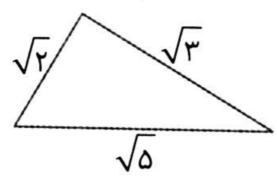
نامساوی مثلث $|b-c| < a < b+c$

گزینهٔ «۱» نادرست است. $۱ + ۲ = ۳$

گزینهٔ «۴» نادرست است. $\sqrt{۲} + \sqrt{۳} < \sqrt{۱۰}$

گزینهٔ «۳» نادرست است. $۱/۳ + ۱/۷ < ۴$

$$|\sqrt{۳} - \sqrt{۲}| < \sqrt{۵} < \sqrt{۲} + \sqrt{۳}$$

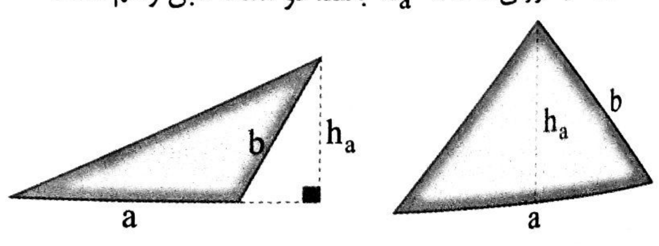


....

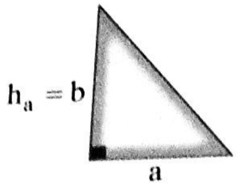
۱۵. گزینهٔ (۲)

اگر از مثلث ABC، دو ضلع (مثلاً a و b) و ارتفاع وارد بر یکی از همین اضلاع (مثلاً h_a) معلوم باشد، چند حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول: درصورتی‌که $h_a < b$ باشد، دو مثلث قابل رسم است.



حالت دوم: درصورتی‌که $h_a = b$ باشد، یک مثلث قائم‌الزاویه قابل رسم است.



حالت سوم: در غیر این صورت هیچ مثلثی قابل رسم نیست.

طبق نکته مذکور، چون $h_a < b$، پس فقط دو مثلث قابل رسم است.

....

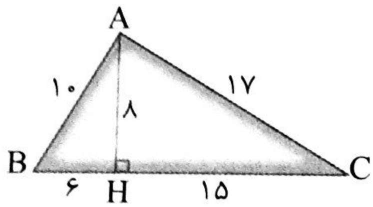
۱۶. گزینهٔ (۴) چون $b \neq c$ و $h_a \not< b$، پس مثلثی با این معلومات نمی‌توان رسم کرد.

....

۱۷. گزینهٔ (۱) چون $h_a = b < c$ پس طبق حالت دوم نکته مذکور در سؤال ۱۶، فقط یک مثلث قائم‌الزاویه می‌توان رسم کرد.

....

۱۸. گزینهٔ (۴) مسئله دو جواب دارد. در هر دو شکل، طبق رابطه فیثاغورس در دو مثلث ABH و ACH خواهیم داشت:



$$\overset{\triangle}{ACH}: AC^۲ = CH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۷^۲ = ۸^۲ + CH^۲$$
$$\Rightarrow CH = ۱۵$$

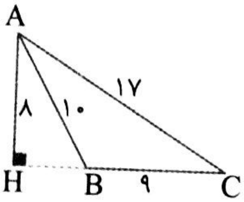
$$\overset{\triangle}{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۸^۲ + BH^۲$$
$$\Rightarrow BH = ۶$$

در شکل (۱) داریم: $BC = CH + BH = ۱۵ + ۶ = ۲۱$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \cdot BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲۱ = ۸۴$$

و در شکل (۲) داریم:



$$\overset{\triangle}{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲$$
$$\Rightarrow ۱۰^۲ = ۸^۲ + BH^۲ \Rightarrow BH = ۶$$
$$\overset{\triangle}{ACH}: AC^۲ = AH^۲ + CH^۲$$
$$\Rightarrow ۱۷^۲ = ۸^۲ + CH^۲$$
$$\Rightarrow CH = ۱۵$$
$$BC = CH - BH = ۱۵ - ۶ = ۹$$

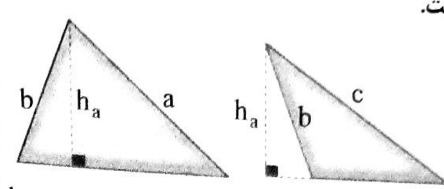
بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AH \cdot BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۹ = ۳۶$$

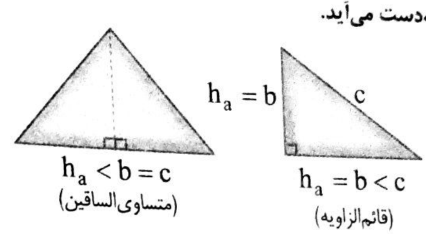
۱۹. گزینهٔ (۲)

نکته: اگر از مثلث ABC دو ضلع (مثلا b و c) و ارتفاع وارد بر ضلع سوم (یعنی h_a) معلوم باشد، چند حالت ممکن است رخ دهد:

۱) اگر $b \neq c$ چون $h_a < b$ و $h_a < c$ می‌باشد دو مثلث به‌دست می‌آید که یکی حاده‌الزاویه و دیگری منفرجه‌الزاویه است.



۲) اگر $h_a < b = c$ (دو ضلع برابر باشند) یا $h_a = b < c$ باشد (ارتفاع برابر ضلع کوچک‌تر باشد) دقیقاً یک مثلث به‌دست می‌آید.



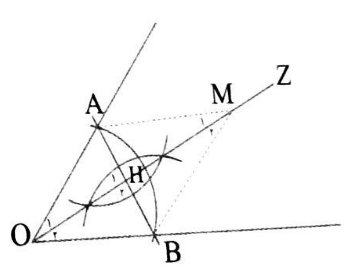
۳) در غیر این صورت جوابی برای مسئله وجود ندارد.

طبق حالت اول نکته مذکور و معلومات مسئله، $h_a < b$ و $h_a < c$ پس دو مثلث قابل رسم است.

۲۰. گزینهٔ (۴)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: مطابق توضیحات کتاب درسی، می‌دانیم OZ نیمساز زاویه XOY است.



گزینهٔ «۲»:

$$\left.\begin{array}{r} \text{نیمساز } OZ: \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \\ \text{شعاع دایره}: OA = OB \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AOH} \cong \overset{\Delta}{BOH}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزا متناظر}} AH = HB, \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

$$\xrightarrow{\hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \Rightarrow$$ OZ عمود منصف AB

گزینهٔ «۳»:

$$\left.\begin{array}{r} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{نیمساز } OZ: \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OM = OM \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AOM} \cong \overset{\Delta}{BOM}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزا متناظر}} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow$$ OZ نیمساز $A\hat{M}B$

گزینهٔ «۴»: نادرست است، زیرا AB لزوماً عمودمنصف OM نیست.

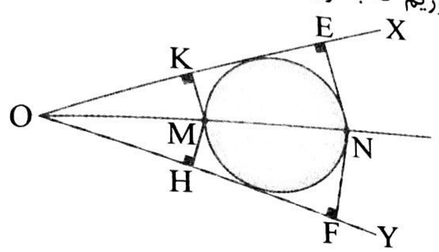
۲۱. گزینهٔ (۴)

هر نقطه روی نیمساز از ۲ ضلع زاویه به یک فاصله است.

$$8x + 4 = 15x - 3 \Rightarrow 3 + 4 = 7x \Rightarrow 7 = 7x \Rightarrow 1 = x$$

۲۲. گزینهٔ (۲)

نقطه‌هایی که از ۲ ضلع زاویه به یک فاصله‌اند، روی نیمساز قرار دارند؛ بنابراین باید تقاطع نیمساز $\hat{O}$ و دایره را به‌دست آوریم که با توجه به شکل ۲ نقطه M و N خواهند بود.



$MK = MH$ و $NE = NF$

۲۳. گزینهٔ (۳)

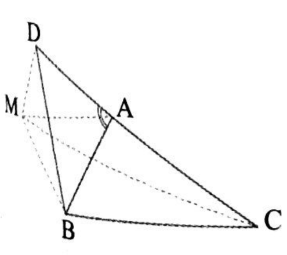
طبق تعریف نیمساز و روش رسم آن، OZ نیمساز زاویه $x\hat{o}y$ می‌باشد، به راحتی نیز ثابت می‌شود که OZ عمودمنصف AB است.

۲۴. گزینهٔ (۱)

نیمساز هر زاویه نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۲۵. گزینهٔ (۱)

ضلع AC را از طرف A تا نقطه D امتداد می‌دهیم، به‌طوری‌که $AD=AB$ گردد. از آن‌جا که مثلث BAD متساوی‌الساقین به رأس A است، بنابراین نیمساز خارجی AM عمودمنصف قاعده BD خواهد بود. با توجه به این‌که هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دوسر پاره‌خط به یک فاصله است، لذا $MB=MD$ و همچنین داریم:



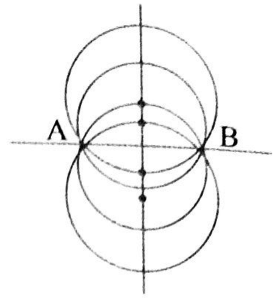
$$\left.\begin{array}{l} MB + MC \\ = MD + MC > DC \\ DC = AD + AC \\ = AB + AC \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow MB + MC > AB + AC$$

$$\Rightarrow \frac{MB + MC}{AB + AC} > 1$$

۲۶. گزینهٔ (۲)

مرکز دایره‌هایی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، بنابراین مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند.



۲۷. گزینهٔ (۲)

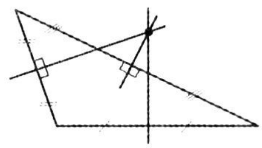
می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با ۱۸۰° است، پس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ$$

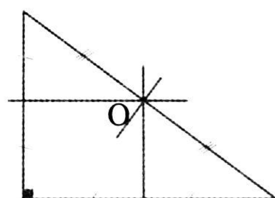
$$\Rightarrow \widehat{A} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = ۱۱۰^\circ \Rightarrow$$ $\widehat{A}$ منفرجه است.

با توجه به این‌که مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است می‌توان نتیجه گرفت که محل تلاقی عمودمنصف‌های این مثلث خارج این مثلث قرار دارد.

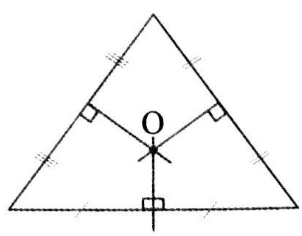
الف) درصورتی‌که اگر مثلث دارای زاویه منفرجه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها بیرون مثلث است.



ب) اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها بر وسط وتر منطبق است.



پ) چنان‌چه زاویه‌های مثلث حاده باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها درون مثلث قرار دارد.



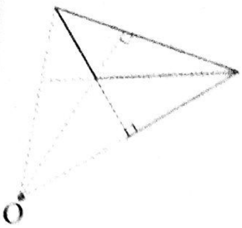
پس در صفحه هر مثلث یک نقطه وجود دارد که از رأس‌های آن به یک فاصله است.

۲۸. گزینهٔ (۲)

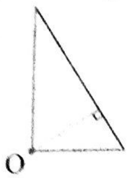
نکته

سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند. درصورتی‌که:

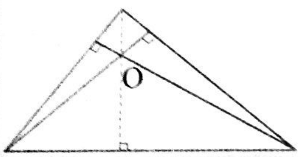
الف) مثلث زاویه منفرجه داشته باشد، نقطه تلاقی ارتفاع‌ها بیرون مثلث قرار می‌گیرد.



ب) در مثلث قائم‌الزاویه نقطه تلاقی ارتفاع‌ها، رأس قائمه است.



پ) در مثلثی که زاویه‌های آن حاده‌اند، نقطه تلاقی ارتفاع درون مثلث است.



فرض می‌کنیم $a = ۱۲$، $b = ۶$ و $c = ۸$، چون داریم:

$a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow$ زاویه A منفرجه است.

پس ارتفاع‌های مثلث در بیرون مثلث همدیگر را قطع می‌کنند.

۲۹. گزینهٔ (۱)

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، پس داریم:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ$$

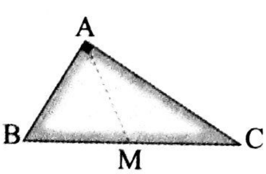
$$\widehat{A} > \widehat{B} + \widehat{C} \xrightarrow{+\widehat{A}} ۲\widehat{A} > \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

$$\Rightarrow ۲\widehat{A} > ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} > ۹۰^\circ$$

پس مثلث فوق منفرجه‌الزاویه است، در هر مثلث منفرجه‌الزاویه محل تلاقی ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها خارج مثلث است.

۳۰. گزینهٔ (۱)

می‌دانیم محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث قائم‌الزاویه، رأس قائمه آن و محل تلاقی عمودمنصف‌های آن وسط وتر می‌باشد، پس باید مطابق شکل طول میانه وارد بر وتر را محاسبه کنیم. طبق قضیه فیثاغورس داریم:



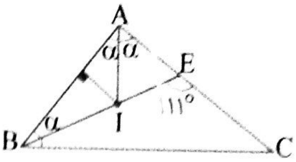
$$\overset{\Delta}{ABC}: AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow ۶^۲ + ۸^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$$

$$AM = \frac{BC}{۲} = ۵$$

۳۱. گزینهٔ (۱)



$AI \Rightarrow B\hat{A}I = I\hat{A}E = \alpha$ (نیمساز)

$I \rightarrow IA = IB \Rightarrow A\hat{B}I = B\hat{A}I = \alpha$ روی عمودمنصف BA

$\overset{\triangle}{AEB}$: زاویهٔ خارجی $B\hat{E}C = ۲\alpha + \alpha \Rightarrow ۳\alpha = ۱۱۱^{\circ}$

$\Rightarrow \alpha = ۳۷^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = ۷۴^{\circ}$

۳۲. گزینهٔ (۳)

نکته **نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث از تمامی رئوس آن مثلث به یک فاصله است، بنابراین:**

$OA = OB = OC$

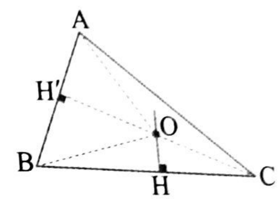
$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OB \Rightarrow x + ۲ = ۳x - ۴ \Rightarrow x = ۳ \\ OA = OC \Rightarrow (۳) + ۲ \Rightarrow y + ۲ \Rightarrow y = ۳ \end{cases}$$

در نتیجه: $x + y = ۶$

۳۳. گزینهٔ (۲)

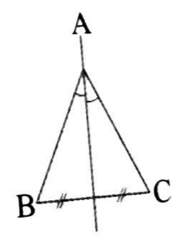
اثبات: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

$OB = OC \Rightarrow ۲x - ۱ = x + ۲ \Rightarrow x = ۳$

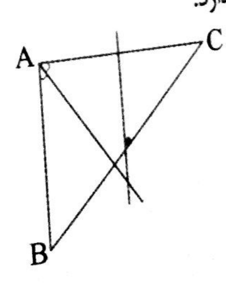


در نتیجه طبق قضیه گفته شده: $OB = OC = ۲ \times ۳ - ۱ = ۵$

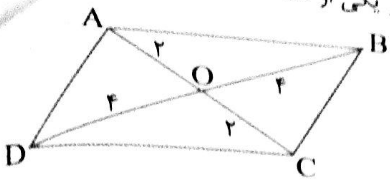
۳۴. گزینهٔ (۲) اگر $AB = AC$، هر نقطه‌ای روی عمودمنصف BC (نیمساز $B\hat{A}C$) از B و C به یک فاصله و از AB و AC به فاصلهٔ یکسان قرار دارد و مسئله بی‌شمار جواب دارد.



اگر $AC = BC \neq AB$، نیمساز $B\hat{A}C$ و عمودمنصف BC همواره در یک نقطه متقاطع‌اند و مسئله یک جواب دارد.



۳۵. گزینهٔ (۴) متوازی‌الاضلاعی را به‌صورت زیر، رسم شده فرض می‌کنیم، کافی است شرط وجود مثلث را در یکی از مثلث‌های کوچک بررسی کنیم:



می‌دانیم اندازه هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل اندازه‌های دو ضلع دیگر بیشتر و از مجموع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر کمتر است. این شرط را در مثلث AOB می‌نویسیم:

$|OA - OB| < AB < OA + OB$

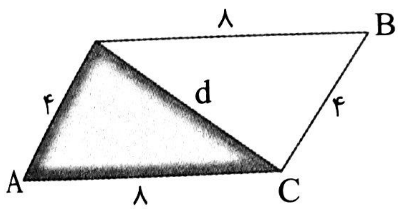
$\Rightarrow |۲ - ۴| < AB < ۲ + ۴ \Rightarrow ۲ < AB < ۶$

در بین گزینه‌ها AB نمی‌تواند ۶/۵ باشد.

۳۶. گزینهٔ (۲)

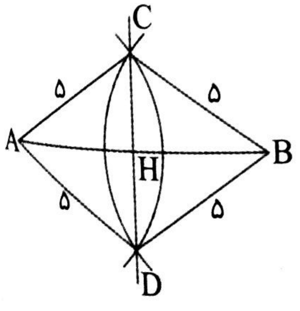
نکته **برای این‌که ببینیم یک چهارضلعی قابل رسم است یا نه، ابتدا با اطلاعات داده شده چهارضلعی را رسم شده فرض می‌کنیم. حال در چهارضلعی یک مثلث پیدا می‌کنیم که اطلاعات سه جز مستقل آن معلوم است. اگر آن مثلث قابل رسم بوده چهارضلعی نیز قابل رسم است.**

فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع مطلوب به‌صورت زیر باشد، واضح است که اگر مثلث رنگ شده قابل رسم باشد، متوازی‌الاضلاع نیز رسم می‌شود، پس:



$|۴ - ۸| < d < ۴ + ۸ \Rightarrow ۴ < d < ۱۲$

۳۷. گزینهٔ (۱) پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. یک‌بار به مرکز A و به شعاع ۵ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۵ کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط C و D قطع کنند.



همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌کنیم، طول ضلع‌های چهارضلعی $ACBD$ برابر ۵ است، پس چهارضلعی لوزی می‌باشد. مساحت لوزی برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{AB \times CD}{۲}$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB = ۸ \Rightarrow HB = ۴ \\ CB = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow CH^{۲} = CB^{۲} - HB^{۲} = ۹$$

$$\Rightarrow CH = ۳ \Rightarrow CD = ۶$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۸ \times ۶}{۲} = ۲۴$$

۳۸. گزینهٔ (۳)

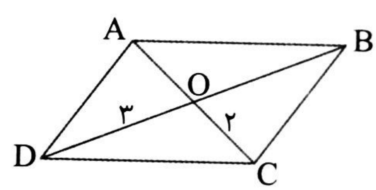
بی‌شمار متوازی‌الاضلاع غیرهم‌نهشت با داشتن طول دو قطر آن قابل رسم است. (توضیح سؤال قبل را بخوانید) در تمرین‌های کتاب درسی دیدیم که:
فقط یک مربع با طول قطر a دقیقاً قابل رسم است. (گزینهٔ «۱»)
همچنین لوزی‌ای که طول دو قطر آن داده شده باشد منحصربه‌فرد است. (گزینهٔ «۲»)
مستطیل با داشتن طول قطر و یک ضلع آن منحصربه‌فرد است (گزینهٔ «۴»)

۳۹. گزینهٔ (۲)

در مثلث ABC، $BC = b, AC = a, AB = ۸$ پس باید:

$$|a - b| < ۸ < a + b$$

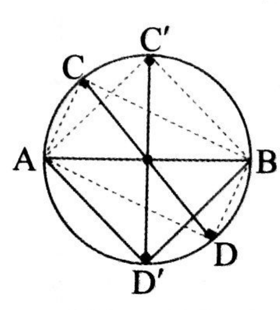
۴۰. گزینهٔ (۴)



$$D\hat{O}C : ۳ - ۲ < DC < ۲ + ۳ \Rightarrow ۱ < DC < ۵$$

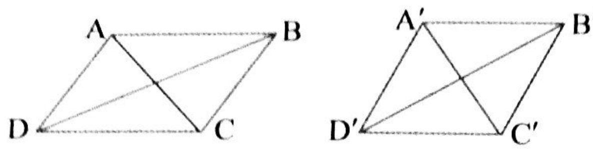
می‌توان بی‌شمار مثلث $O\overset{\triangle}{D}C$ با فرض $۱ < DC < ۵$ ساخت، بنابراین بی‌شمار متوازی‌الاضلاع هم می‌توان رسم کرد.

۴۱. گزینهٔ (۴) اگر دایره‌ای به قطر ۴ رسم کنیم، با انتخاب هر نقطه دلخواه روی نیم‌دایره بالا و اتصال آن به مرکز و امتداد آن می‌توان یک مستطیل با قطر ۴ داشت که بدیهی است هم‌نهشت نخواهند بود.

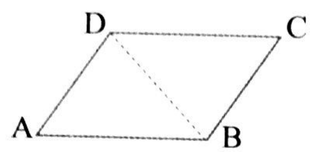


۴۲. گزینهٔ (۱)

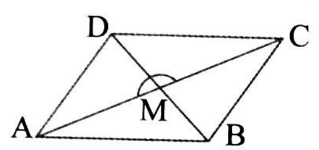
گزینهٔ «۱»: دو متوازی‌الاضلاع روبه‌رو، قطرهای برابر دارند، ولی با یکدیگر هم‌نهشت نیستند.



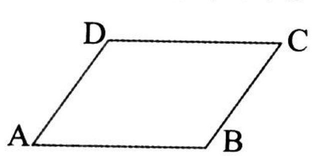
بررسی سایر گزینه‌ها:
گزینهٔ «۲»: وقتی طول دو ضلع مجاور را داریم؛ یعنی طول هر چهارضلع را داریم. یکی از قطرها را هم داریم، می‌توانیم فرض کنیم BD را داشته باشیم، پس در دو مثلث ABD و BCD طول سه ضلع را داریم و آن‌ها را با داشتن طول سه ضلع رسم می‌کنیم.



گزینهٔ «۳»: می‌دانیم در یک متوازی‌الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، بنابراین مثلث‌های CMB, DMC, AMD و BMA را با داشتن دو ضلع و زاویه بین رسم می‌کنیم.

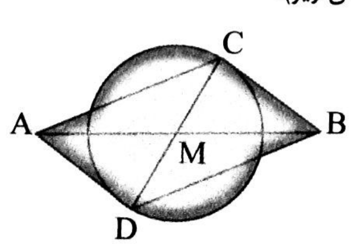


گزینهٔ «۴»: وقتی طول دو ضلع مجاور را داریم؛ یعنی طول هر چهار ضلع را داریم، یکی از زاویه‌ها را هم داریم. فرض می‌کنیم زاویه A را داشته باشیم، به این ترتیب مثلث DAB را با داشتن دو ضلع و زاویه بین رسم می‌کنیم، پس طول BD را داریم. از مثلث BCD طول هر سه ضلع را داریم و آن را رسم می‌کنیم.



۴۳. گزینهٔ (۴)

پاره‌خط AB به طول ۱۰ واحد را رسم می‌کنیم. یک دایره به شعاع نصف ۸ یعنی ۴ واحد به مرکز M (وسط AB) رسم می‌کنیم. محل برخورد هر خط که از M می‌گذرد با دایره، دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است. (مطابق شکل زیر):



به این ترتیب بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این اطلاعات وجود دارد.