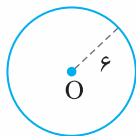


آسان

-۵

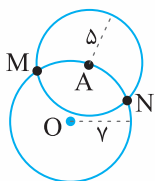
تمامی نقاطی از صفحه که از نقطه O به فاصله 6 cm هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع 6 cm است.



آسان

-۶

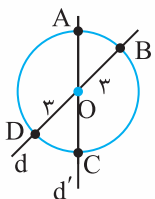
۲ نقطه. نقاطی که از A (روی دایره‌ای به شعاع 7) به فاصله 5 هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع 5 می‌باشد. نقاط M و N که با دایره اول برخورد دارد جواب مسئله است.



آسان

-۷

مکان هندسی نقاطی که از نقطه O به فاصله 3 cm است، دایره‌ای به مرکز O و شعاع 3 cm است. این دایره دو خط d و d' را در ۴ نقطه A و B و C و D قطع می‌کند.



دشوار

-۸

مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله R باشد، دایره‌ای به مرکز A و شعاع R است که این دایره با خط d ۳ حالت دارد:
حالت ۱: فاصله خط d از A بیشتر از R باشد: دایره خط d را قطع نمی‌کند و مسئله جواب ندارد.



حالت ۲: فاصله خط d از A برابر R باشد: دایره بر خط مماس است و مسئله ۱ جواب دارد.



حالت ۳: فاصله خط d از A کمتر از R باشد: دایره خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و مسئله ۲ جواب دارد.



سوالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۱

آسان

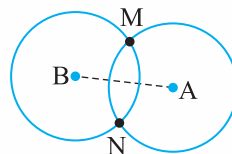
-۱

(آ) عمودمنصف آن پاره‌خط (ب) نیمساز آن زاویه
(پ) ۲ نقطه (ت) بی‌شمار

متوسط

-۲

مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله 2 cm است، دایره‌ای به مرکز A و شعاع دو سانتی‌متر است و مکان هندسی نقاطی که از B به فاصله $2/5$ سانتی‌متر است، دایره‌ای به مرکز B و شعاع $2/5\text{ cm}$ است. محل برخورد این دو دایره جواب مسئله است، دو دایره همدیگر را در ۲ نقطه M و N قطع می‌کنند که M و N جواب مسئله هستند.



آسان

-۳

(آ) 4 cm و 5 cm ($5 < 4 + 5$)

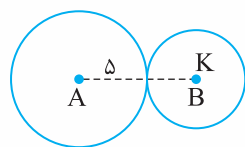
(ب) 4 cm و 3 cm ($3 = 4 + 3$)

(پ) 2 cm و 3 cm ($3 > 2 + 3$)

دشوار

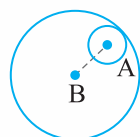
-۴

دو دایره‌ای که از مراکز A و B به شعاع 5 و K رسم می‌شوند قطعاً مماس بوده‌اند که فقط یک نقطه مشترک بین آن‌ها وجود دارد، حال ۲ حالت داریم:



$$R_A + R_B = AB \\ \Rightarrow 5 + K = 9 \Rightarrow K = 4$$

حالت ۲: دو دایره مماس داخل باشند.



$$|R_A - R_B| = AB \Rightarrow |5 - K| = 9$$

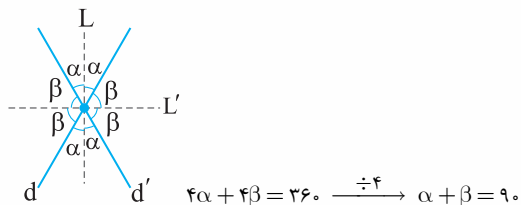
$$\Rightarrow \begin{cases} 5 - K = 9 \Rightarrow K = -4 \\ K - 5 = 9 \Rightarrow K = 14 \end{cases}$$

بنابراین برای K دو مقدار وجود دارد.

متوسط

-۱۴

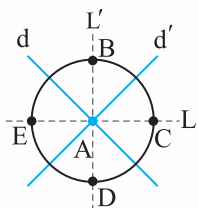
اگر تصور کنیم دو خط d و d' همدیگر را در نقطه O قطع کنند، نیمسازهای هر دو زاویه‌ای که دو خط در نقطه O می‌سازند از هر دو خط d و d' به یک فاصله است (دو خط L و L') و این دو خط حتماً بر هم عمودند.



آسان

-۱۵

مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند نیمسازهای زاویه A است (دو خط L و L') و مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله 3 cm باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع 3 cm است که محل برخورد این دایره با دو خط L و L' جواب مسئله است. که مسئله ۴ جواب دارد (نقاط B و C و D و E)



دشواری

-۱۶

$$\widehat{A} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیتاغورس}} BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 25 = 9 + AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 16 \Rightarrow AC = 4$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \Rightarrow S = 6$$

چون D روی نیمساز A است بنا به قضیه نیمساز فاصله نقطه D تا ضلع AB

برابر فاصله نقطه D تا ضلع AC است $DH = DQ = x$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{1}{2} DH \times AB + \frac{1}{2} DQ \times AC$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{1}{2} x \times 3 + \frac{1}{2} x \times 4 \xrightarrow{\times 2} 12 = 7x \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

ب) چهار ضلعی $AQDH$ چون دارای ۴ زاویه قائمه است و طول و عرض آن با هم برابر است ($DH = DQ$) پس مربع است و می‌دانیم قطر هر مربع $\sqrt{2}$ برابر اندازه ضلع آن است.

$$AD = \sqrt{2} DH = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

آسان

-۹

چون فقط یک نقطه به فاصله $(8 - x)$ از نقطه A روی خط d وجود دارد

پس فاصله A تا خط d نیز $8 - x$ است پس داریم:

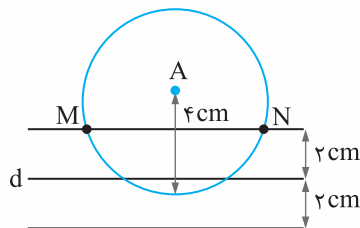
$$8 - x = 7 \Rightarrow 8 - 7 = x \Rightarrow x = 1$$

d

متوسط

-۱۰

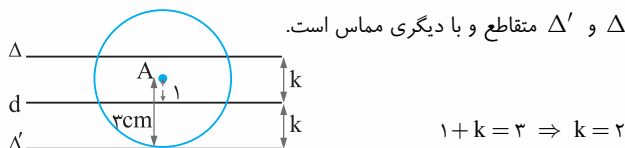
مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله 4 cm باشد، دایره‌ای به مرکز A و شعاع 4 cm است و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله 2 cm باشد دو خط به موازات d و به فاصله 2 cm از آن است که محل برخورد این دو خط با دایره جواب مسئله است. مسئله ۲ جواب دارد.



دشواری

-۱۱

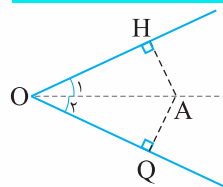
مکان هندسی نقاطی که از دو خط d به فاصله k باشد، دو خط موازی با d است که Δ و Δ' می‌نامیم و مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله 3 cm است، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع 3 cm که این دایره با یکی از دو خط Δ و Δ' متقاطع و با دیگری مماس است.



$$1 + k = 3 \Rightarrow k = 2$$

متوسط

-۱۲



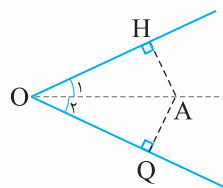
فرض $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ حکم $AH = AQ$

$\left. \begin{array}{l} OA = OA \text{ (وتر مشترک)} \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ فرض} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle OAH \cong \triangle OAQ \xrightarrow{\text{ا.م}} AH = AQ$

متوسط

-۱۳

فرض $AH = AQ$ حکم $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$



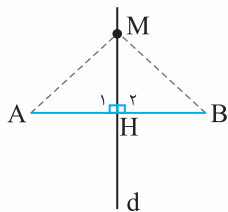
$\left. \begin{array}{l} AO = AO \text{ (وتر مشترک)} \\ AH = AQ \text{ فرض} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AOH \cong \triangle OAQ \xrightarrow{\text{ا.م}} \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

متوسط

-۲۰

M روی عمود منصف AB است: حکم $MA = MB$: فرض

از نقطه M فقط یک عمود بر پاره خط AB می توان رسم کرد (خط d) باید ثابت کنیم خط d پاره خط AB را نصف می کند.

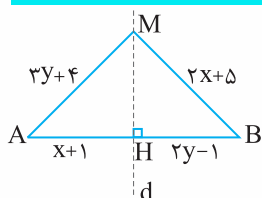


$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \text{ مشترک} \\ MA = MB \text{ فرض (وتر)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle MAH \cong \triangle MHB$$

$$\xrightarrow{\text{م.}} AH = HB \Rightarrow M \text{ روی عمود منصف AB است}$$

متوسط

-۲۱



$$M \text{ روی عمود منصف AB} \Rightarrow AH = HB \Rightarrow x+1 = 2y-1 \Rightarrow 2y-x = 2$$

$$M \text{ روی عمود منصف AB} \Rightarrow MA = MB \Rightarrow 3y+4 = 2x+5$$

$$\Rightarrow 3y-2x = 1$$

$$\begin{cases} 2y-x=2 \\ 3y-2x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y+2x=-4 \\ 3y-2x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -y = -3 \Rightarrow y = 3, x = 4$$

$$\text{پس } AH = HB = 5 \text{ و } AM = MB = 13$$

$$\triangle AMH : \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} AM^2 = MH^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow 169 = MH^2 + 25 \Rightarrow MH^2 = 144 \Rightarrow MH = 12$$

دشوار

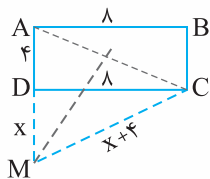
-۲۲

چون نقطه M روی عمود منصف AC است پس $MA = MC = x+4$

$$\triangle DCM : \hat{D} = 90^\circ \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} MC^2 = MD^2 + DC^2 \Rightarrow$$

$$(x+4)^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = x^2 + 64 \Rightarrow 8x = 48 \Rightarrow x = 6$$

$$DM = x = 6$$



دشوار

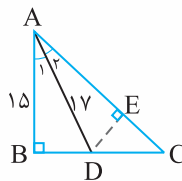
-۱۷

چون نقطه D روی نیمساز زاویه A است، فاصله D از AB برابر فاصله D از AC است پس $BD = DE$

$$\triangle ABD : \hat{B} = 90^\circ \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow 289 = 225 + BD^2 \Rightarrow BD^2 = 64 \Rightarrow BD = 8 \Rightarrow DE = 8$$

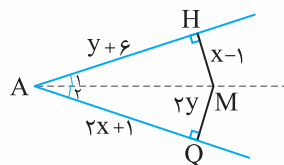
$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADE} \text{ چون } \triangle ABD \cong \triangle ADE \text{ است پس}$$



$$S_{ABDE} = S_{ABD} + S_{ADE} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 120$$

آسان

-۱۸



$$M \text{ روی نیمساز A} \Rightarrow MH = MQ \Rightarrow x-1 = 2y \Rightarrow x-2y = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} AM = AM \text{ مشترک} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ نیمساز} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر یک زاویه حاده}} \triangle AMH \cong \triangle AQM \xrightarrow{\text{م.}} AH = AQ$$

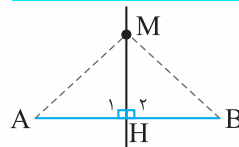
$$\Rightarrow y+6 = 2x+1 \Rightarrow 2x-y = 5$$

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ -4x+2y=-10 \end{cases} \Rightarrow -3x = -9 \Rightarrow x = 3$$

$$y = 1$$

متوسط

-۱۹



$$\text{فرض : } \begin{cases} AH = HB \\ \hat{H} = 90^\circ \end{cases} \quad \text{حکم : } AM = MB$$

$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \text{ مشترک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = HB \text{ فرض} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض. ض.}} \triangle AMH \cong \triangle MHB \xrightarrow{\text{م.}} MA = MB$$



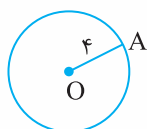
آسان

۱- گزینه «۴»

مکان هندسی نقاطی که از نقطه O به فاصله 4 cm در داخل یک صفحه قرار

دارند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع 4 cm

$$S = \pi R^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$$



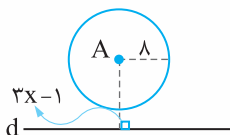
آسان

۲- گزینه «۴»

مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله 8 cm باشد، دایره‌ای است به

مرکز A و شعاع 8 cm که این دایره خط d را قطع نمی‌کند.

پس x می‌تواند عدد 4 باشد. $3x - 1 > 8 \Rightarrow 3x > 9 \Rightarrow x > 3$



متوسط

۳- گزینه «۳»

مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله 5 باشد، دایره‌ای است به مرکز A

و شعاع 5 cm و مکان هندسی نقاطی که از نقطه B به فاصله 8 باشد، دایره‌ای

است به مرکز B و شعاع 8 cm که این دو دایره حتماً در یک نقطه با هم

تماس دارند یعنی یا مماس داخل هستند یا مماس خارج

$AB = |R_B - R_A| \Rightarrow$ اگر دو دایره مماس داخل باشند

$$\Rightarrow L_1 = |8 - 5| \Rightarrow L_1 = 3$$

$AB = R_A + R_B \Rightarrow$ اگر دو دایره مماس خارج باشند

$$\Rightarrow L_2 = 8 + 5 \Rightarrow L_2 = 13$$

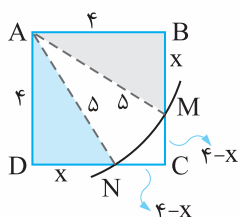
$$L_1 + L_2 = 3 + 13 = 16$$

آسان

۴- گزینه «۲»

$$\Delta ABM : \hat{B} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیناغورس}} AM^2 = AB^2 + BM^2$$

$$\Rightarrow 25 = 16 + x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$



$$CM = 4 - x = 4 - 3 = 1$$

به طریق مشابه $NC = 1$ است.

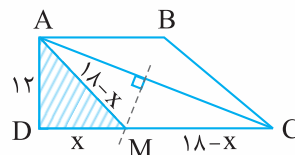
$$CM + NC = 1 + 1 = 2$$

دشواری

۲۳-

اگر $DM = x$ باشد، آن‌گاه $MC = 18 - x$

$$M \text{ روی عمودمنصف } AC \xrightarrow{\text{قضیه عمودمنصف}} AM = MC = 18 - x$$



$$\Delta ADM : AM^2 = DM^2 + AD^2 \Rightarrow (18 - x)^2 = 12^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 324 - 36x + x^2 = 144 + x^2 \Rightarrow 180 = 36x \Rightarrow x = 5$$

$$MC = 18 - x = 18 - 5 \Rightarrow MC = 13$$

متوسط

۲۴-

$$BC = 17 \Rightarrow BE + DE + DC = 17 \Rightarrow y + 5 + y = 17$$

$$\Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

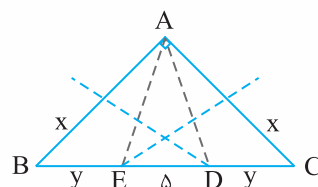
$$E \text{ روی عمودمنصف } AC \Rightarrow AE = EC \Rightarrow AE = DE + y = 5 + 6$$

$$\Rightarrow AE = 11$$

$$D \text{ روی عمودمنصف } AD \Rightarrow AE = EB \Rightarrow AE = DE + y = 5 + 6$$

$$\Rightarrow AE = 11$$

$$\Delta ADE \text{ محیط} = AD + AE + DE = 11 + 11 + 5 = 27$$

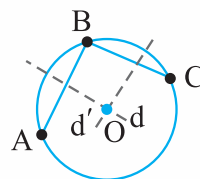


متوسط

۲۵-

$$O \text{ روی عمودمنصف } AB \xrightarrow{\text{قضیه عمودمنصف}} OA = OB = R$$

$$O \text{ روی عمودمنصف } BC \xrightarrow{\text{قضیه عمودمنصف}} OB = OC = R$$



کافی است عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AB و BC را رسم کنیم، محل برخورد

این دو خط مرکز دایره‌ای است که از نقاط A و B و C می‌گذرد.

دشوار

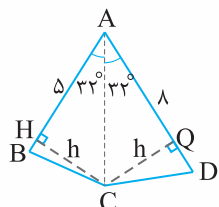
۸- گزینه ۲»

نقطه C روی نیمساز A است پس فاصله نقطه C از دو ضلع زاویه A با هم

برابر است $CH = CQ = h$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CQ \times AD \Rightarrow ۳۲ = \frac{1}{2} h \times ۸ \Rightarrow h = ۸$$

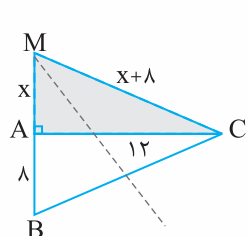
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CH \times AB = \frac{1}{2} \times ۸ \times ۵ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = ۲۰$$



متوسط

۹- گزینه ۳»

چون نقطه M روی عمودمنصف BC است پس $MB = MC = x + ۸$



$$\begin{aligned} \triangle AMC: \hat{A} &= 90^\circ \\ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} MC^2 &= MA^2 + AC^2 \\ \Rightarrow (x+8)^2 &= x^2 + 12^2 \\ \Rightarrow x^2 + 16x + 64 &= x^2 + 144 \\ \Rightarrow 16x &= 80 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

دشوار

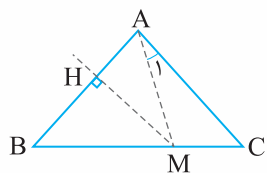
۱۰- گزینه ۳»

$$\triangle ABC: AB = AC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 55^\circ$$

$$\hat{A} = 70^\circ$$

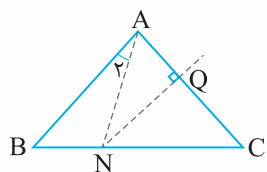
AB عمودمنصف M $\Rightarrow AM = MB$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{BAM} = 55^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 70^\circ - 55^\circ = 15^\circ$$

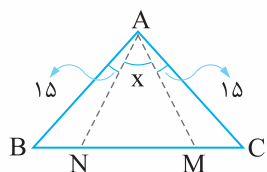


AC عمودمنصف N $\Rightarrow NC = AN \Rightarrow \hat{C} = \hat{CAN} = 55^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = 70^\circ - 55^\circ = 15^\circ$$



$$\hat{A} = 70^\circ \Rightarrow 15 + x + 15 = 70 \Rightarrow x = 40^\circ$$



متوسط

۵- گزینه ۱»

چون فاصله خطوط ثابت است، پس ۴ خط با هم موازیند.

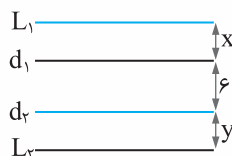
$۸ = \text{مجموع فاصله } L_1 \text{ تا دو خط } d_1 \text{ و } d_2$

$$\Rightarrow x + (6 + x) = ۸ \Rightarrow 2x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$۸ = \text{مجموع فاصله } L \text{ تا دو خط } d_1 \text{ و } d_2$

$$\Rightarrow y + (6 + y) = ۸ \Rightarrow 2y = ۲ \Rightarrow y = ۱$$

$L_1 \text{ تا } L_3 \text{ فاصله} = x + 6 + y = ۱ + 6 + ۱ = ۸$



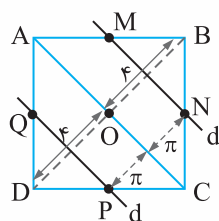
متوسط

۶- گزینه ۴»

اگر اندازه یک ضلع مربع a باشد، اندازه قطر آن $a\sqrt{2}$ است.

$$AC = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = ۸$$

می‌دانیم قطرهای مربع عمودمنصف هم هستند پس $BO = OD = ۴$



مکان هندسی نقاطی که از خط AC به فاصله π باشد، دو خط d و d' موازی

AC است و چون $(\pi < ۴)$ است هر خط، مربع را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس

مسئله ۴ جواب دارد.

دشوار

۷- گزینه ۳»

چون نقطه N روی نیمساز زاویه A است پس فاصله نقطه N از ضلع AB برابر

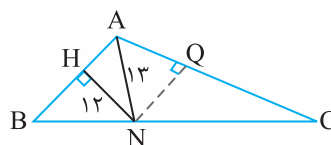
فاصله نقطه N از ضلع AC است پس $NH = NQ = ۱۲$

$$\triangle ANQ: \hat{Q} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AN^2 = AQ^2 + QN^2$$

$$\Rightarrow ۱۶۹ = ۱۴۴ + AQ^2 \Rightarrow AQ^2 = ۲۵ \Rightarrow AQ = ۵ \Rightarrow QC = ۱۴ - ۵ = ۹$$

$$\triangle NQC: \hat{Q} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} NC^2 = NQ^2 + QC^2$$

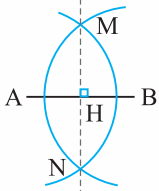
$$\Rightarrow NC^2 = ۱۴۴ + ۸۱ = ۲۲۵ \Rightarrow NC = ۱۵$$



آسان

-۴

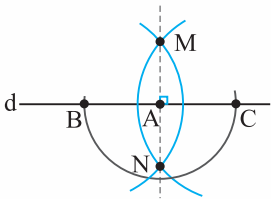
دهانه پرگار را بیشتر از نصف پاره خط AB باز می‌کنیم و با شعاع‌های مساوی از نقاط A و B کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا این کمان‌ها همدیگر را در نقطه‌های M و N قطع کنند، M را به N وصل کرده و امتداد می‌دهیم، این خط عمودمنصف پاره خط AB است.



متوسط

-۵

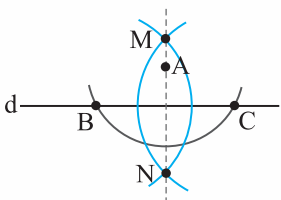
فرض کنیم نقطه A روی خط d است. دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کرده و از نقطه A کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه B و C قطع کند چون $AB = AC$ است بنابراین A روی عمودمنصف پاره خط BC است پس دهانه پرگار را بیشتر از نصف پاره خط BC باز کرده و به مراکز B و C شعاع‌های مساوی کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند، M را به N وصل کرده و امتداد می‌دهیم این خط از A گذشته و بر d عمود است.



متوسط

-۶

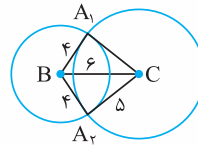
فرض کنیم نقطه A خارج خط d است. دهانه پرگار را بیشتر از فاصله A تا خط d باز می‌کنیم و کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند چون $AB = BC$ است پس A روی عمودمنصف BC است بنابراین دهانه پرگار را بیشتر از نصف اندازه پاره خط BC باز کرده و با شعاع‌های مساوی از مراکز B و C کمان‌هایی رسم می‌کنیم، این کمان‌ها همدیگر را در نقاط M و N قطع می‌کنند، M را به N وصل کرده و امتداد می‌دهیم، این خط از نقطه A گذشته و بر خط d عمود است.



آسان

-۱

فرض کنیم $AB = 4$ و $AC = 5$ و $BC = 6$ باشد، ابتدا ضلع BC به طول ۶ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، چون فاصله نقطه A تا B برابر ۴ است، نقطه A روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ cm قرار دارد و چون فاصله نقطه A تا C برابر ۵ است، نقطه A روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۵ cm قرار دارد، که چون دو دایره در ۲ نقطه متقاطع هستند، ۲ نقطه برای A امکان‌پذیر است. چون دو مثلث BA_1C و BA_2C همنهشت هستند، بنابراین با این مشخصات فقط یک مثلث می‌توان رسم کرد.



دشوار

-۲

طول تک به تک اضلاع باید مثبت باشد پس داریم:

$$\begin{aligned} x+5 > 0 &\Rightarrow x > -5 & 2x-2 > 0 &\Rightarrow x > 1 \\ x+1 > 0 &\Rightarrow x > -1 \end{aligned}$$

مجموع هر دو ضلع باید از ضلع سوم مثلث، بزرگ‌تر باشد.

$$x+5+2x-2 > x+1 \Rightarrow 2x > -2 \Rightarrow x > -1$$

$$x+5+x-1 > 2x-2 \Rightarrow 4 > -2 \text{ پدیده}$$

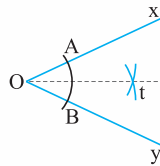
$$x+1+2x-2 > x+5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$$

از اشتراک بازه‌ها نتیجه می‌گیریم $x > 3$ است.

متوسط

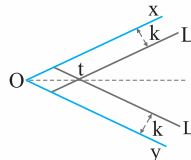
-۳

روش ۱: به مرکز O کمانی رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را در نقاط A و B قطع کند. حال به مراکز A و B شعاع‌های برابر کمان‌هایی می‌زنیم تا همدیگر را در نقطه t قطع کنند.



O را به t وصل کرده و امتداد می‌دهیم، Ot نیمساز زاویه O است.

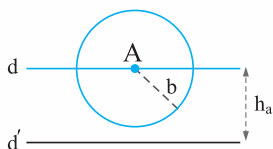
روش دوم: خط L را موازی Ox به فاصله k از آن رسم می‌کنیم و خط L' را موازی Oy و به فاصله k از آن رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطه t قطع کند، O را به t وصل کرده و امتداد می‌دهیم، این نیم خط، نیمساز زاویه O است.



آسان

-۱۰

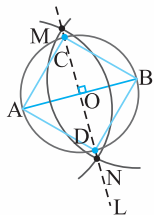
فرض کنیم می‌خواهیم مثلی با معلومات $AB = c$ و $AC = b$ و $h_a > b$ باشد برای این منظور دو خط d و d' را به فاصله h_a از هم رسم می‌کنیم و نقطه A را به دلخواه روی d انتخاب می‌کنیم چون فاصله نقطه C از A برابر b است، به مرکز A و شعاع b کمانی رسم می‌کنیم، این کمان خط d' را قطع نمی‌کند (چون $h_a > b$) پس مسئله جواب ندارد و مثلی وجود ندارد.



متوسط

-۱۱

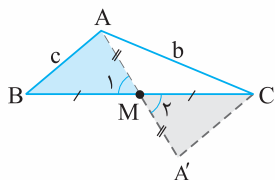
می‌دانیم قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگر هستند پس دهانه BC را بیشتر از نصف فاصله AB باز می‌کنیم و با شعاع‌های برابر به مراکز A و B کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا همدیگر را در M و N قطع کنند پس M را به N وصل کرده و امتداد می‌دهیم این خط (خط L) عمودمنصف AB است که AB را در O قطع می‌کند، حال به مرکز O و شعاع 1 cm کمان می‌زنیم تا خط L را در C و D قطع کند، جواب مسئله مربع $ACBD$ است.



دشوار

-۱۲

فرض $BM = MC$ حکم: $\frac{|b-c|}{2} < AM < \frac{b+c}{2}$
 AM را از سمت M به اندازه خودش امتداد می‌دهیم ($AM = A'M$) سپس A' را به C وصل می‌کنیم.



فرض $BM = MC$
 $\left. \begin{array}{l} \angle M_1 = \angle M_2 \text{ متقابل به راس} \\ AM = MA' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضربض}} \triangle AMB \cong \triangle A'MC \xrightarrow{\text{م.ا}} AB = A'C = c$

می‌دانیم اندازه هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است پس در مثلث $AA'C$ داریم:

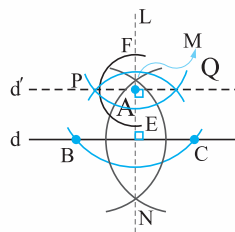
$$|A'C - AC| < AA' < A'C + AC \Rightarrow |b - c| < 2AM < b + c$$

$$\xrightarrow{\div 2} \frac{|b-c|}{2} < AM < \frac{b+c}{2}$$

دشوار

-۷

نکته: دو خط عمود بر یک خط در یک صفحه، با هم موازیند.
 دهانه BC را بیشتر از فاصله A تا خط d باز می‌کنیم و کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند چون $AB = AC$ است پس A روی عمودمنصف BC است پس دهانه BC را بیشتر از نصف فاصله BC باز کرده و به شعاع‌های مساوی از B و C کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند، M را به N وصل کرده و امتداد می‌دهیم (خط L)، این خط از A گذشته و بر خط d عمود است. حال به مرکز A و به شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا خط L را در نقاط E و F قطع کند، چون $AE = AF$ است پس A روی عمودمنصف EF است بنابراین دهانه BC را بیشتر از نصف EF باز کرده و به مراکز E و F شعاع برابر کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا همدیگر را در P و Q قطع کنند، P را به Q وصل کرده و امتداد می‌دهیم (خط d') این خط از A گذشته و بر L عمود است.



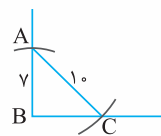
$$d \perp L, d' \perp L \Rightarrow d \parallel d'$$

پس خط d' ، خطی است که از A گذشته و موازی d است.

آسان

-۸

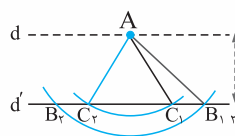
دو خط عمود بر هم رسم می‌کنیم ($\hat{B} = 90^\circ$) به مرکز B و شعاع 7 کمانی رسم می‌کنیم تا یکی از خطوط عمود را در نقطه A قطع کند، سپس به مرکز A و شعاع 10 کمانی رسم می‌کنیم تا خط دیگر عمود را در نقطه C قطع کند، مثلث ABC جواب مسئله است.



دشوار

-۹

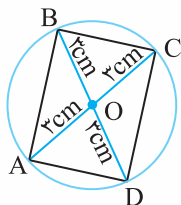
دو خط d و d' را به فاصله 4 cm از هم رسم می‌کنیم نقطه A را به دلخواه روی خط d در نظر می‌گیریم، از نقطه A کمانی به طول 7 رسم می‌کنیم تا طول d' را در B_1 و B_2 قطع کند پس از نقطه A کمانی به طول 5 cm رسم می‌کنیم تا خط d' را در نقاط C_1 و C_2 قطع کند مثلث‌های AB_1C_1 و AB_2C_2 جواب مسئله هستند (باقی مثلث‌ها یعنی AB_2C_1 و AB_1C_2 با این دو مثلث هم‌نهشت هستند)



متوسط

-۱۷

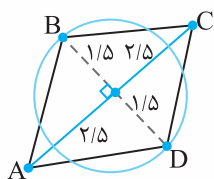
می‌دانیم در مستطیل طول دو قطر با هم برابر و قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند پس طول دو قطر مستطیل $AC = BD = 6$ است. برای رسم مستطیل ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O (وسط AC) و شعاع 3 cm دایره‌ای رسم می‌کنیم و یکی از بیشمار قطر این دایره را BD می‌نامیم، چهار ضلعی $ABCD$ جواب مسئله است و چون بی‌شمار قطر به جای BD می‌توان رسم کرد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



متوسط

-۱۸

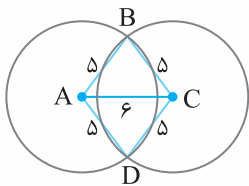
می‌دانیم قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگر هستند فرض کنیم $AC = 5$ و $BD = 3$ باشد، برای رسم ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم سپس به مرکز O (وسط AC) و شعاع $1/5$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و تنها قطری از دایره که بر AC عمود است BD می‌نامیم، چهار ضلعی $ABCD$ جواب مسئله است و چون تنها یک قطر بر AC عمود است، مسئله ۱ جواب دارد.



متوسط

-۱۹

قطر AC به طول ۶ را رسم می‌کنیم سپس به مراکز A و C و شعاع ۵ کمان‌هایی می‌زنیم تا این کمان‌ها همدیگر را در نقاط B و D قطع کنند، چهار ضلعی $ABCD$ جواب مسئله است.



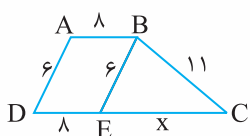
دشوار

-۲۰

از نقطه B موازی AD رسم می‌کنیم، در چهار ضلعی $ABED$ چون $AB \parallel DE$ و $AD \parallel BE$ است پس چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است و $AD = BE = 6$ و $AB = DE = 8$ است در مثلث BEC اگر فرض کنیم $EC = x$ باشد بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم:

$$|BC - BE| < EC < BC + BE \Rightarrow 11 - 6 < x < 11 + 6$$

$$\Rightarrow 5 < x < 17 \xrightarrow{+8} 13 < x + 8 < 25 \Rightarrow 13 < DC < 25$$



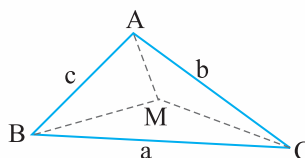
آسان

-۱۳

می‌دانیم در هر مثلث، مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم مثلث بزرگ‌تر است.

$$\begin{cases} \Delta AMB: AM + MB > c \\ \Delta AMC: AM + MC > b \\ \Delta BMC: BM + MC > a \end{cases} \xrightarrow{\oplus} 2(AM + MB + MC) > \underbrace{a+b+c}_{2P}$$

$$\Rightarrow AM + MB + MC > P$$



آسان

-۱۴

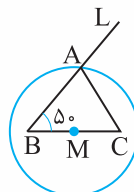
$$6x + x + 7 + 4x - 4 = 36 \Rightarrow 11x = 33 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین طول ۳ پاره‌خط ۱۸ و ۱۰ و ۸ است. می‌دانیم در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم مثلث بزرگ‌تر است حال آن‌که مجموع دو پاره‌خط به طول‌های ۱۰ و ۸ از اندازه پاره‌خط سوم به طول ۱۸ بزرگ‌تر نیست پس این ۳ پاره‌خط نمی‌توانند ضلع‌های یک مثلث باشند.

متوسط

-۱۵

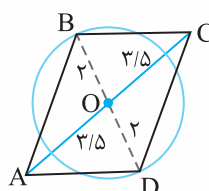
ابتدا پاره‌خط BC به طول ۶ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم و از نقطه B یک زاویه 50° با BC می‌سازیم (خط L) حال به مرکز وسط BC (نقطه M) و شعاع 4 cm دایره‌ای رسم می‌کنیم تا این دایره خط L را در نقطه A قطع کند. حال A را به C وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب مسئله است.



متوسط

-۱۶

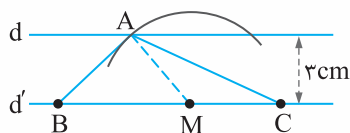
فرض کنیم $AC = 7$ و قطر $BD = 4$ باشد، می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند. برای رسم متوازی‌الاضلاع ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O (وسط AC) و شعاع 2 cm دایره‌ای رسم می‌کنیم و یکی از بیشمار قطر این دایره را رسم می‌کنیم و آن را BD می‌نامیم، چهار ضلعی $ABCD$ جواب مسئله است و چون بیشمار قطر جای BD می‌توان رسم کرد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



دشوار

-۲۴

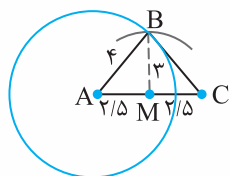
دو خط d و d' به فاصله 3 cm از هم قرار دارند روی خط d ، BC را به طول 10 cm روی خط d در نظر می‌گیریم، از نقطه M وسط BC ، کمانی به شعاع 4 cm رسم می‌کنیم، این کمان هر کجا خط d' را قطع کند، نقطه A رأس سوم مثلث است و مثلث ABC جواب مسئله است.



متوسط

-۲۵

ضلع $AC = 5$ را رسم می‌کنیم به مرکز A و شعاع 4 cm دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس به مرکز M (وسط AC) به شعاع 3 cm کمان دیگری رسم می‌کنیم تا کمان قبلی را در نقطه B قطع کند. مثلث ABC جواب مسئله است.



سوالات تستی

پاسخنامه

بخش ۲

آسان

۱- گزینه «۴»

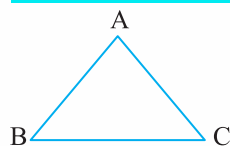
در هر مثلث، اندازه هر ضلع از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.

$$|AC - AB| < BC < AC + AB \Rightarrow 8 - 5 < 2a + 1 < 8 + 5$$

$$\Rightarrow 3 < 2a + 1 < 13 \xrightarrow{-1} 2 < 2a < 12 \xrightarrow{\div 2} 1 < a < 6$$

دشوار

۲- گزینه «۱»



$$\text{محیط} = AB + AC + BC \Rightarrow 24 = b + b + a$$

$$\Rightarrow a = 24 - 2b \quad (1)$$

$$a > 0 \Rightarrow 24 - 2b > 0 \Rightarrow -2b > -24 \Rightarrow b < 12$$

$$AB + AC > BC: b + b > a \Rightarrow 2b > 24 - 2b \Rightarrow 4b > 24 \Rightarrow b > 6$$

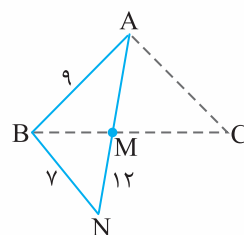
$$\xrightarrow{(1)} 2b > 24 - 2b \Rightarrow 4b > 24 \Rightarrow b > 6$$

پس $6 < b < 12$ است چون $b \in \mathbb{N}$ است پس $b \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$ یعنی ۵ مقدار برای b وجود دارد.

دشوار

-۲۱

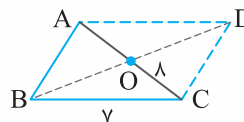
ابتدا مثلث ABN را با اضلاع $AB = 9$ و $BN = 7$ و $AN = 12$ رسم می‌کنیم. برای این منظور $AB = 9$ رسم می‌کنیم و از A کمانی به شعاع ۱۲ و از B کمانی به شعاع ۷ می‌زنیم تا این کمان‌ها همدیگر را در نقطه N قطع کنند مثلث ABN به دست می‌آید، حال B را به وسط AN (نقطه M) وصل کرده و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه C به دست آید و C را به A وصل می‌کنیم چون دو مثلث AMC و BNM بنا به دو ضلع و زاویه بین همنهشت هستند. $AC = BN = 7$



آسان

-۲۲

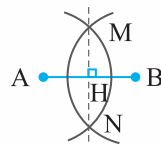
ابتدا مثلث ABC را به اضلاع $AB = 5$ و $BC = 7$ و $AC = 8$ رسم می‌کنیم برای این منظور $AC = 8$ را رسم کرده و از A کمانی به طول ۵ و از C کمانی به طول ۷ رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه B قطع کنند، مثلث ABC قابل رسم است حال B را به وسط AC وصل کرده و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه D به دست آید، سپس D را به A و C وصل می‌کنیم، چهار ضلعی $ABCD$ جواب مسئله است.



آسان

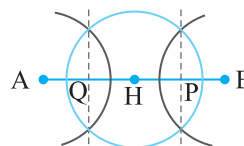
-۲۳

ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. برای این منظور دهانه پراگار را بیشتر از نصف پاره‌خط AB باز کرده و به شعاع‌های مساوی از A و B کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا این کمان‌ها همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند سپس M را به N وصل می‌کنیم، این خط عمودمنصف AB است.



حال عمودمنصف‌های AH ، HB را رسم می‌کنیم تا AB را در Q و P قطع

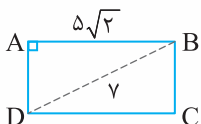
کنند در این صورت $AQ = QH = HP = PB$



دشوار

۸- گزینه «۱»

اگر فرض کنیم مستطیل شکل مقابل جواب باشد در مثلث قائم‌الزاویه ABD اندازه وتر BD برابر ۷ و اندازه ضلع قائمه AB برابر $5\sqrt{2}$ است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه اندازه وتر باید از اندازه ضلع قائمه بزرگ‌تر باشد، حال آن‌که در این مثلث اندازه ضلع قائمه از وتر بزرگ‌تر است ($AB > BD$) پس چنین مستطیلی قابل رسم نیست.



آسان

۹- گزینه «۴»

هرگاه فقط اندازه دو قطر یک متوازی‌الاضلاع را داشته باشیم بی‌شمار متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد. (اما اگر اندازه دو قطر و زاویه بین آن‌ها را داشته باشیم فقط یک متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد).

آسان

۱۰- گزینه «۲»

بنا به تعریف، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن عمودمنصف هم هستند پس مانند آن است که دو قطر و زاویه بین دو قطر یک متوازی‌الاضلاع را داشته باشیم که با این اطلاعات فقط یک متوازی‌الاضلاع (لوزی) می‌توان رسم کرد.

دشوار

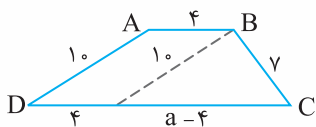
۱۱- گزینه «۴»

از رأس B موازی AD رسم می‌کنیم چون $AB \parallel DE$ و $AD \parallel BE$ است پس چهار ضلعی $ABED$ متوازی‌الاضلاع است بنابراین $AD = BE = 10$ و $AB = DE = 4$ پس $EC = a - 4$ می‌شود در مثلث BEC بنا به نامساوی مثلث داریم:

$$|BE - BC| < EC < BE + BC \Rightarrow 10 - 7 < a - 4 < 10 + 7$$

$$\xrightarrow{+4} 7 < a < 21$$

با توجه به گزینه‌ها $a = 19$ می‌تواند باشد.



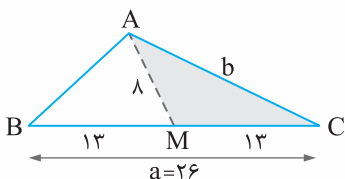
آسان

۱۲- گزینه «۲»

بنا به رابطه نامساوی در مثلث داریم:

$$\Delta AMC: |MC - AM| < AC < MC + AM \Rightarrow 13 - 8 < b < 13 + 8$$

پس AC (b) می‌تواند ۱۹ باشد. $\Rightarrow 5 < b < 21$



متوسط

۱۳- گزینه «۳»

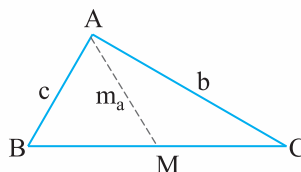
نکته: بزرگ‌ترین ضلع باید بزرگ‌تر یا مساوی ثلث محیط و کمتر از نصف محیط باشد یعنی اگر a بزرگ‌ترین ضلع و اندازه محیط $2P$ باشد داریم:

$$\frac{2P}{3} \leq a < P \Rightarrow 5 \leq a < 7/5$$

متوسط

۱۴- گزینه «۲»

نکته: در هر مثلث اندازه میانه از نصف قدرمطلق تفاضل دو ضلع مجاور بزرگ‌تر و از نصف مجموع دو ضلع مجاور کوچک‌تر است.



$$\frac{|AC - AB|}{2} < AM < \frac{AC + AB}{2} \Rightarrow \frac{11 - 7}{2} < m_a < \frac{11 + 7}{2}$$

$$\Rightarrow 2 < m_a < 9$$

چون طبق گفته صورت مسئله $m_a \in \mathbb{Z}$ است پس $m_a \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ یعنی ۶ مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.

متوسط

۱۵- گزینه «۴»

در هر مثلث اندازه میانه از قدرمطلق تفاضل دو میانه بزرگ‌تر و از مجموع دو میانه دیگر کوچک‌تر است.

$$|m_b - m_c| < m_a < m_b + m_c \Rightarrow 10 - 7 < m_a < 10 + 7$$

$$\Rightarrow 3 < m_a < 17$$

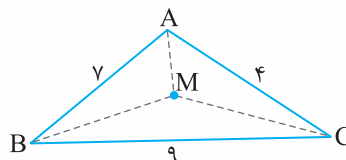
متوسط

۱۶- گزینه «۳»

اگر محیط مثلثی $2P$ باشد و نقطه M درون مثلث باشد، مجموع فاصله نقطه M از ۳ رأس مثلث از محیط مثلث کوچک‌تر و از نصف محیط مثلث بزرگ‌تر است.

$$2P = AB + AC + BC = 7 + 4 + 9 = 20 \Rightarrow P = 10$$

$$P < AM + BM + MC < 2P \Rightarrow 10 < AM + BM + CM < 20$$



متوسط

۱۷- گزینه «۴»

اگر محیط مثلثی $2P$ باشد، آن‌گاه برای مجموع ۳ میانه آن داریم:

$$\frac{3P}{2} < m_a + m_b + m_c < 2P$$

$$2P = 9 + 8 + 7 \Rightarrow 2P = 24 \Rightarrow P = 12$$

$$\frac{3P}{2} < \frac{m_a + m_b + m_c}{L} < 2P \Rightarrow \frac{3 \times 12}{2} < L < 24 \Rightarrow 18 < L < 24$$



آسان

-۱

- | | |
|-----------|-----------|
| آ) نادرست | ب) درست |
| پ) نادرست | ت) نادرست |
| ث) نادرست | ج) درست |

متوسط

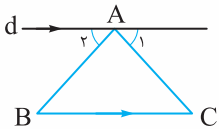
-۲

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \text{ حکم}$$

از رأس A خط d را موازی ضلع BC رسم می کنیم.

$$d \parallel BC \text{ و } AB \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \widehat{B} = \widehat{A}_2 \quad (1)$$

$$d \parallel BC \text{ و } AC \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \widehat{C} = \widehat{A}_1 \quad (2)$$



از (۱) و (۲) داریم:

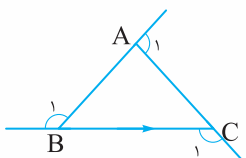
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_1 = 180^\circ$$

آسان

-۳

$\widehat{A}$ و $\widehat{A}_1$ دو زاویه مجانب هستند پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{A}_1 &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = 180^\circ - \widehat{A} \\ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A}_1$$

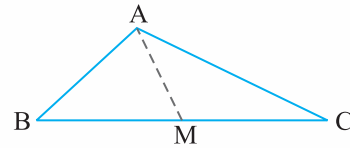


به همین ترتیب می توان ثابت کرد که $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B}_1$ و $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_1$

متوسط

۱۳-۵ گزینه «۱»

۱) در هر مثلث اندازه میانه از نصف قدرمطلق تفاضل دو ضلع مجاور بزرگ تر و از نصف مجموع دو ضلع مجاور کوچک تر است.



$$\frac{|AB - AC|}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2} \Rightarrow \frac{11 - 8}{2} < m_a < \frac{11 + 8}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < m_a < \frac{19}{2}$$

چون $m_a = 10$ است و $\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{2}\right) \ni m_a$ نیست، بنابراین مثلثی نمی توان رسم کرد.

آسان

۱۴-۵ گزینه «۱»

هرگاه با معلومات دو ضلع ($AC = b, AB = c$) و ارتفاع وارد بر ضلع سوم $Ah = h_a$ بتوانیم دو مثلث رسم کنیم حتماً $b \neq c$ است و $h_a < b$ و $h_a < c$ است پس داریم:

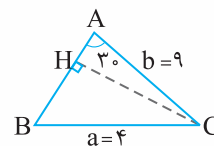
$$\left. \begin{aligned} h_a &< 8 \\ h_a &< 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_a < 8$$

با توجه به گزینه ها $h_a = 7$

دشوار

۱۵-۵ گزینه «۱»

ارتفاع CH را رسم می کنیم حتماً باید $CH \leq AC$ و $CH \leq BC$ باشد (کم ترین فاصله نقطه C تا پاره خط AB، طول عمودی است که به آن رسم می شود)



$$\left. \begin{aligned} CH &< 9 \\ CH &< 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CH < 4$$

می دانیم در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبه رو به زاویه 30° نصف وتر است پس در مثلث ACH داریم:

$$CH = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow CH = 4.5$$

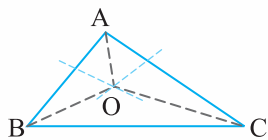
که $CH > 4$ است و یک تناقض است پس مثلث قابل رسم نیست.

توضیح: بعداً در ریاضیات با مبحث مثلثات آشنا خواهید شد که به کمک قضیه سینوس ها هم می توانید این مسئله را حل کنید.

دشوار

-۷

یادآوری قضیه عمودمنصف: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس. عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند، باید ثابت کنیم عمودمنصف ضلع BC از O می‌گذرد، برای این منظور O را به ۳ رأس مثلث وصل می‌کنیم.



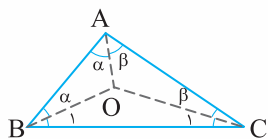
$$\left. \begin{array}{l} \text{قضیه عمودمنصف} \rightarrow OA = OB \\ \text{قضیه عمودمنصف} \rightarrow OA = OC \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow OB = OC \xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}} O \text{ روی عمودمنصف } BC$$

متوسط

-۸

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس $OA = OB = OC$



چون BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است پس $\hat{A}$ بزرگ‌ترین زاویه مثلث است یعنی هر سه زاویه مثلث حاده هستند پس O داخل مثلث است.

$$\triangle AOB: OA = OB \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{OAB} = \hat{ABO} = \alpha$$

$$\triangle AOC: OA = OC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{OAC} = \hat{OCA} = \beta$$

$$\hat{A} = 76^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 76^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 76^\circ + \alpha + \hat{B}_1 + \beta + \hat{C}_1 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ - 76^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 104^\circ$$

$$\triangle BOC: \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{BOC} = 180^\circ \Rightarrow 104^\circ + \hat{BOC} = 180^\circ \Rightarrow \hat{BOC} = 76^\circ$$

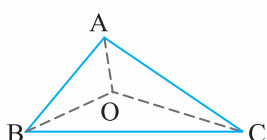
آسان

-۹

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است پس $OA = OB = OC$

$$OA = OC \Rightarrow 3x + 1 = x + y + 2 \Rightarrow 2x - y = 1$$

$$OB = OC \Rightarrow 3y - 2 = x + y + 2 \Rightarrow -x + 2y = 4$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -2x + 4y = 8 \end{array} \right. \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$$

$$2x - 3 = 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

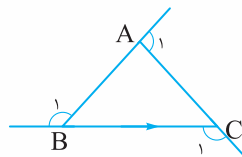
آسان

-۴

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ: \text{فرض}$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 360^\circ: \text{حکم}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C} \\ \hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C} \\ \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 2(180^\circ) = 360^\circ$$



متوسط

-۵

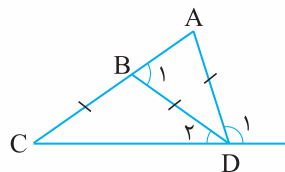
$$\triangle BCD: BC = BD \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{C} = \hat{D}_2$$

$$\triangle BCD: \hat{B}_1 = \hat{C} + \hat{D}_2 = \hat{C} + \hat{C} \Rightarrow \hat{B}_1 = 2\hat{C}$$

$$\triangle ADB: BD = AD \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A} = \hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 2\hat{C}$$

$$\triangle ADC: \hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{C} = 2\hat{C} + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_1 = 3\hat{C}$$



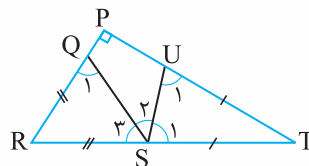
دشوار

-۶

$$\hat{P} = 90^\circ: \text{فرض} \quad \hat{S}_2 = 45^\circ: \text{حکم}$$

$$\triangle TUS: UT = TS \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{U}_1 = \hat{S}_1$$

$$\triangle QRS: RQ = RS \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{Q}_1 = \hat{S}_3$$



$$\triangle UST: \hat{S}_1 + \hat{U}_1 + \hat{T} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{U}_1 = \hat{S}_1} \hat{T} = 180^\circ - 2\hat{S}_1 \quad (1)$$

$$\triangle RQS: \hat{R} + \hat{Q}_1 + \hat{S}_3 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{Q}_1 = \hat{S}_3} \hat{R} = 180^\circ - 2\hat{S}_3 \quad (2)$$

$$\triangle PRT: \hat{P} + \hat{R} + \hat{T} = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{P} = 90^\circ} 90^\circ + 180^\circ - 2\hat{S}_1 + 180^\circ - 2\hat{S}_3 = 180^\circ$$

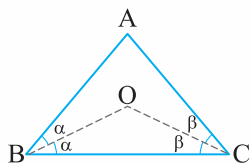
$$\Rightarrow 270^\circ = 2(\hat{S}_1 + \hat{S}_3) \xrightarrow{\div 2} \hat{S}_1 + \hat{S}_3 = 135^\circ$$

$$\hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{S}_1 + \hat{S}_3 = 135^\circ} 135^\circ + \hat{S}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{S}_2 = 45^\circ$$

متوسط

-۱۲

اگر $B = 2\alpha$ و $C = 2\beta$ و OB و OC نیمساز زوایا B و C باشند، داریم:



$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \quad (1)$$

$$\triangle OBC: \alpha + \beta + \hat{O} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ - \hat{O} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ - \hat{O} \Rightarrow \hat{O} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

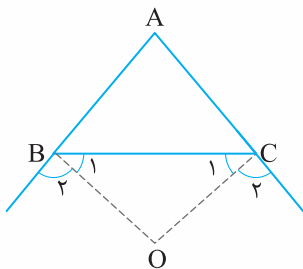
متوسط

-۱۳

$$\hat{B} + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}_2} 2\hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{B}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \quad (1)$$

$$\hat{C} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}_1 = \hat{C}_2} 2\hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{C} \Rightarrow \hat{C}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} \quad (2)$$

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \quad (3)$$



$$\triangle BOC: \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{O} = 180^\circ \xrightarrow{(2), (1)} 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} + 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} + \hat{O} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \xrightarrow{(3)} \hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

متوسط

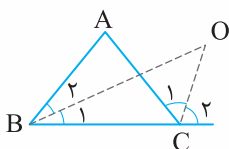
-۱۴

$$\hat{C} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}_1 = \hat{C}_2} \hat{C} + 2\hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} \quad (1)$$

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \quad (2)$$

$$\triangle BOC: \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{O} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}} \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}_1 + 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} + \hat{O} = 180^\circ$$

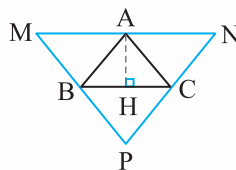
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) + \hat{O} = 90^\circ \xrightarrow{(2)} 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} + \hat{O} = 90^\circ \Rightarrow \hat{O} = \frac{\hat{A}}{2}$$



دشوار

-۱۵

از A موازی BC و از B موازی AC و از C موازی AB رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقاط M و N و P قطع کنند.



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CN, AN \parallel BC \Rightarrow \text{چهارضلعی متوازی الاضلاع } ANCB \Rightarrow AN = BC \\ AC \parallel MB, AM \parallel BC \Rightarrow \text{چهارضلعی متوازی الاضلاع } AMBC \Rightarrow AM = BC \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow AN = AM$$

ارتفاع AH در مثلث ABC را در نظر می‌گیریم:

$$AH \perp BC, MN \parallel BC \Rightarrow AH \perp MN$$

AH بر MN عمود شده است و MN را نصف کرده است ($AM = AN$)

پس عمودمنصف MN است به همین ترتیب هر ارتفاع دیگر مثلث ABC

عمودمنصف مثلث MNP است (یعنی در هر مثلث، هر ارتفاع یک مثلث،

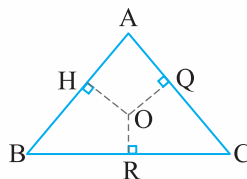
عمودمنصف مثلث دیگری است که رؤس مثلث اول، وسط اضلاع مثلث دوم

است) و می‌دانیم عمودمنصف‌ها همرسند، پس ارتفاع‌ها نیز همرسند.

دشوار

-۱۱

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله هستند و برعکس



نیمساز دو زاویه A و B همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند، باید ثابت کنیم

O روی نیمساز زاویه C هم قرار دارد، برای این منظور از O به ۳ ضلع مثلث

عمود رسم می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} O \text{ روی نیمساز زاویه } A \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} OH = OQ \\ O \text{ روی نیمساز زاویه } B \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} OH = OR \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow OQ = OR \xrightarrow{\text{عکس قضیه نیمساز}} O \text{ روی نیمساز زاویه } C \text{ است}$$

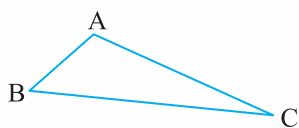
پس ۳ نیمساز داخلی هر مثلث همرس هستند.

متوسط

-۱۸

فرض $\hat{A} > \hat{C}$ حکم: $BC > AB$

اثبات به کمک برهان خلف:

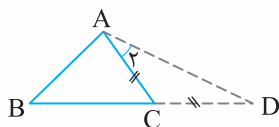
اگر $BC > AB$ نباشد، ۲ حالت داریم:مغایر با فرض $\hat{A} = \hat{C} \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} BC = AB$: حالت اولمغایر با فرض $\hat{C} > \hat{A} \xrightarrow{\text{قضیه ضلع برتر}} AB > BC$: حالت دومبنابراین فرض خلف باطل و $BC > AB$ است.

دشوار

-۱۹

$$\text{حکم} \begin{cases} AB + BC > AC \\ AB + AC > BC \\ AC + BC > AB \end{cases}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $AC + BC > AB$ است. دو مورد دیگر هم به همین ترتیب ثابت می‌شوند.



ضلع BC را از سمت C امتداد می‌دهیم DC را برابر AC جدا می‌کنیم و D را به A وصل می‌کنیم.

$$\triangle ACD : AC = CD \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A}_2 = \hat{D} \Rightarrow \hat{BAD} > \hat{D}$$

$$\triangle BAD : \hat{BAD} > \hat{D} \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} BD > AB \Rightarrow BC + CD > AB$$

$$\xrightarrow{AC=CD} BC + AC > AB$$

دشوار

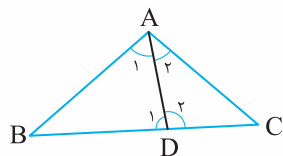
-۲۰

فرض $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ حکم: $\begin{cases} AB > BD \\ AC > CD \end{cases}$

$$\triangle ABD : \hat{D}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B} \Rightarrow \hat{D}_2 > \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{D}_2 > \hat{A}_2$$

فرض $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\triangle ADC : \hat{D}_2 > \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{قضیه زاویه برتر}} AC > DC$$



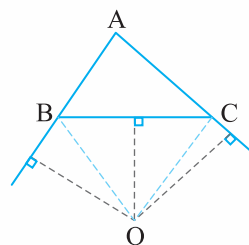
$$\triangle ADC : \hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_1$$

$$\triangle ABD : \hat{D}_1 > \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{قضیه زاویه برتر}} AB > BD$$

دشوار

-۱۵

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس، نیمسازهای زاویه خارجی B و C همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند، باید ثابت کنیم نیمساز زاویه داخلی A هم از O می‌گذرد، برای این منظور از O به ۳ ضلع (یا امتداد آن‌ها) عمود می‌کنیم.



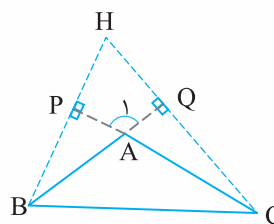
$$\begin{cases} O \text{ روی نیمساز خارجی } B \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} OH = OP \\ O \text{ روی نیمساز خارجی } C \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} OQ = OP \end{cases}$$

$$\Rightarrow OH = OQ \xrightarrow{\text{عکس قضیه نیمساز}} O \text{ روی نیمساز } A$$

متوسط

-۱۶

می‌دانیم اگر در مثلثی زاویه منفرجه (بزرگ‌تر از 90° درجه) وجود داشته باشد، نقطه هم‌رسمی ارتفاع‌ها خارج مثلث است (H خارج مثلث ABC است) و می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° است.



$$\hat{H} + \hat{P} + \hat{A}_1 + \hat{Q} = 360^\circ \xrightarrow[\hat{A} = \hat{A}_1]{\hat{P} = \hat{Q} = 90^\circ} \hat{H} + \hat{A} + 180^\circ = 360^\circ$$

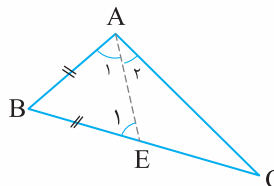
$$\Rightarrow \hat{H} = 180^\circ - \hat{A}$$

دشوار

-۱۷

فرض: $BC > AB$ حکم: $\hat{A} > \hat{C}$

روی ضلع BC به اندازه AB جدا می‌کنیم ($BE = AB$) و E را به A وصل می‌کنیم.



$$\begin{cases} \triangle ABE : AB = BE \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \\ \triangle AEC : \hat{E}_1 = \hat{A}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{E}_1 > \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 > \hat{C} \Rightarrow \hat{A} > \hat{C}$$



$$\triangle ABC : AC > AB \xrightarrow{\text{ضلع برتر}} \widehat{B} > \widehat{C} \xrightarrow{(2), (1)} \begin{cases} \widehat{\alpha} > \widehat{C} \\ B > \beta \end{cases}$$

$$\triangle MBD : B > \beta \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} DM > MB \Rightarrow DM + x > MB + x$$

$$\Rightarrow DM + DN > MB + AM \Rightarrow DM + DN > AB \quad (3)$$

$$\triangle DNC : \alpha > C \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} NC > DN \Rightarrow NC + y > DN + y$$

$$\Rightarrow NC + AN > DN + DM \Rightarrow AC > DM + DN \quad (4)$$

از رابطه (۳) و (۴) داریم:

$$AB < DM + DN < AC$$

دشوار

-۲۴

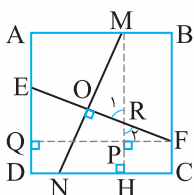
از M بر DC عمود می‌کنیم و از F بر AD عمود می‌کنیم این دو پاره‌خط

همدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند چون R_1 و R_2 متقابل به رأس هستند با

هم برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OMR : \widehat{M} + 90^\circ + \widehat{R}_1 = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{R}_1 = \widehat{R}_2} \widehat{M} = 90^\circ - \widehat{R}_2 \\ \triangle PRF : \widehat{F} + 90^\circ + \widehat{R}_2 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{F} = 90^\circ - \widehat{R}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{F}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M} = \widehat{F} \text{ اثبات بالا} \\ MH = FQ \text{ برابر اضلاع مربع} \\ \widehat{H} = \widehat{Q} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز}} \triangle MHN \cong \triangle FEQ \xrightarrow{\text{م}} EF = MN$$



آسان

-۲۵

(آ) عدد $-2 \in \mathbb{Z}$ است ولی مثبت نیست.

(ب) لوزی چهارضلعی است که ۴ ضلع برابر دارد ولی مربع نیست.

(پ) اگر $n = 41$ باشد داریم:

$$n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \times 43 \text{ غیر اول}$$

آسان

-۲۶

(آ) جمله خبری است پس گزاره است.

(ب) جمله خبری است پس گزاره است.

(پ) جمله پرسشی است پس گزاره نیست.

(ت) جمله احساسی است پس گزاره نیست.

(ث) جمله امری است پس گزاره نیست

متوسط

-۲۱

فرض: $AM = MC = MB$ حکم: $\widehat{A} = 90^\circ$

$$\triangle AMB : AM = MB \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{A}_1 = \widehat{B}$$

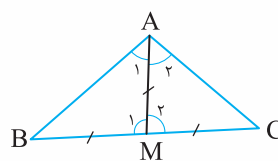
$$\triangle AMB : \widehat{M}_2 \text{ خارجی} : \widehat{M}_2 = \widehat{A}_1 + \widehat{B} \Rightarrow \widehat{M} = 2\widehat{B} \quad (1)$$

$$\triangle AMC : AM = MC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{A}_2 = \widehat{C}$$

$$\triangle AMC : \widehat{M}_1 \text{ خارجی} : \widehat{M}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{M}_1 = 2\widehat{C} \quad (2)$$

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ \xrightarrow{(1), (2)} 2\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$$

$$\widehat{A} + \underbrace{\widehat{B} + \widehat{C}}_{90^\circ} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$$

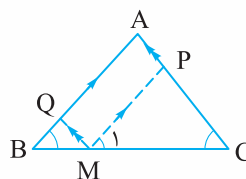


دشوار

-۲۲

فرض: $AB = AC = a$ حکم: $MP + MQ = a$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel MP, BC \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \widehat{B} = \widehat{M}_1 \\ \triangle ABC : AB = AC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{B} = \widehat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{C}$$



$$\triangle PMC : \widehat{M}_1 = \widehat{B} \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} MP = PC \quad (1)$$

چهارضلعی APMQ متوازی الاضلاع است. $QA \parallel MP, MQ \parallel AP \Rightarrow$

$$\Rightarrow MQ = AP \quad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم:

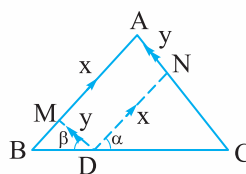
$$MP + MQ = PC + AP = AC = a$$

دشوار

-۲۳

$$DN \parallel AB, BC \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \widehat{B} = \alpha \quad (1)$$

$$DM \parallel AC, BC \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \widehat{C} = \beta \quad (2)$$



چهارضلعی ANDM متوازی الاضلاع است. $AN \parallel DM, DN \parallel AM \Rightarrow$

$$\Rightarrow AM = DN = x, AN = MD = y$$



آسان

۱- گزینه «۳»

استدلالی که بر پایه مجموعه محدودی از مشاهدات انجام شود، استدلال استقرایی است.

آسان

۲- گزینه «۴»

چون قبلاً ثابت کرده‌ایم که مجموع زوایای هر مثلث 180° است بنابراین اثبات بر اساس حقایق انجام شده که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، پس نوع استدلال استنتاجی است.

آسان

۳- گزینه «۲»

نتایج مهم و پر کاربردی که از استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

آسان

۴- گزینه «۳»

لوزی چهار ضلعی است که ۴ ضلع برابر دارد ولی مربع نیست.

آسان

۵- گزینه «۴»

اگر به جای n عدد ۱۷ قرار دهیم داریم:

$$n^2 + n + 17 = 17^2 + 17 + 17 = 17(17 + 1 + 1) = 17 \times 19$$

غیر اول

آسان

۶- گزینه «۱»

چون فرض کرده‌ایم که حکم مسئله نادرست است از برهان خلف استفاده کرده‌ایم.

آسان

۷- گزینه «۱»

در برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله ($BC > AC$) درست نباشد یعنی $BC \leq AC$ بوده است.

آسان

۸- گزینه «۳»

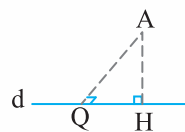
گزاره یک جمله خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد و جملات پرسشی و امری و احساسی گزاره نیستند.

متوسط

۲۷-

برهان خلف: فرض کنیم از نقطه A خارج خط d ، دو خط بر d عمود شده‌اند

یعنی $\hat{H} = \hat{Q} = 90^\circ$ در این صورت داریم:



$$\left. \begin{aligned} \hat{H} + \hat{Q} &= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \\ \hat{A} > 0^\circ &\Rightarrow \hat{A} + 180^\circ > 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{H} + \hat{Q} > 180^\circ \quad (1)$$

$$\hat{A} + \hat{H} + \hat{Q} = 180^\circ \quad (2) \text{ در مثلث } AHQ$$

رابطه (۱) با رابطه (۲) در تناقض است پس فرض خلف باطل و از نقطه A فقط یک خط می‌توان بر خط d عمود کرد.

آسان

۲۸-

آ) اگر در یک چهار ضلعی قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آن گاه آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن گاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

آسان

۲۹-

آ) عکس قضیه: در هر مثلث، اگر دو زاویه برابر باشند، دو ضلع روبه‌رو به آن دو زاویه نیز برابرند.

قضیه دو شرطی: دو ضلع یک مثلث با هم برابرند اگر و تنها اگر دو زاویه روبه‌رو به آن دو ضلع نیز با هم برابر باشند.

ب) عکس قضیه: اگر در یک چهار ضلعی قطرهای عمودمنصف هم باشند، آن چهار ضلعی لوزی است.

قضیه دو شرطی: یک چهار ضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهای آن عمودمنصف هم باشند.

آسان

۳۰-

آ) وجود دارد لوزی که مربع نباشد.

ب) همه مستطیل‌ها مربع هستند.

پ) مثلثی وجود دارد که دو زاویه قائمه داشته باشد.

ت) فلزی وجود دارد که جامد نیست.

متوسط

۱۴- گزینه «۲»

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است پس O که محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع BC و AC است

نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها نیز می‌باشد پس $OA = OB = OC$

$$OA = OC \Rightarrow 2x + 1 = x + 4 \Rightarrow x = 3$$

$$OA = OB \Rightarrow 2x + 1 = 3y + 1 \xrightarrow{x=3} 7 = 3y + 1 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$$

$$x + y = 3 + 2 = 5$$

متوسط

۱۵- گزینه «۳»

ضلع AB در این مثلث بزرگ‌ترین ضلع است پس زاویه C ، بزرگ‌ترین زاویه مثلث است پس دو زاویه دیگر مثلث حتماً حاده هستند ($B < 90^\circ, A < 90^\circ$)

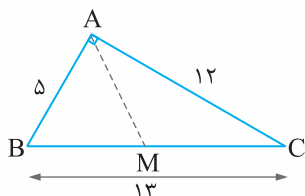
$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = 81 \\ BC^2 + AC^2 = 25 + 49 = 74 \end{array} \right\} \Rightarrow AB^2 > BC^2 + AC^2 \Rightarrow C > 90^\circ$$

متوسط

۱۶- گزینه «۴»

چون $13^2 = 5^2 + 12^2$ است پس مثلث قائم‌الزاویه است و در مثلث قائم‌الزاویه محل هم‌رسی ارتفاع‌ها رأس قائمه (A) و محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها وسط وتر است (نقطه M) و می‌خواهیم اندازه پاره‌خط AM را به دست آوریم که می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس داریم:

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$



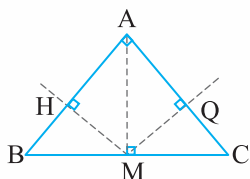
دشوار

۱۷- گزینه «۳»

چون در چهار ضلعی $AQMH$ ، سه رأس H و M و Q قائمه هستند پس $\hat{A} = 90^\circ$ است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه محل هم‌رسی عمودمنصف وسط وتر است پس فاصله M از ضلع BC صفر است. M را به A وصل می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMC} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = \frac{1}{2} \times MH \times 8 + \frac{1}{2} \times MQ \times 8$$

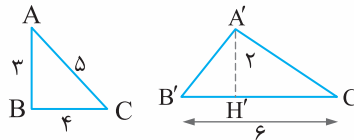
$$\Rightarrow 32 = 4(MH + MQ) \Rightarrow MH + MQ = 8$$



آسان

۹- گزینه «۳»

عکس قضیه گزینه ۳ به صورت «اگر مساحت‌های دو مثلث با هم برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند» می‌باشد که دو مثلث شکل زیر که هر دو دارای مساحت ۶ هستند ولی همنهشت نیستند به عنوان مثال نقض، می‌توان نادرستی را نشان داد.



آسان

۱۰- گزینه «۳»

نقیض گزاره «هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد» به صورت «مثلثی وجود دارد که حداقل ۲ زاویه قائمه دارد» می‌باشد.

متوسط

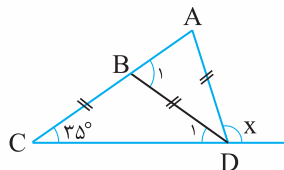
۱۱- گزینه «۳»

$$\triangle BCD : BC = BD \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{C} = \hat{D}_1 = 35^\circ$$

$$\triangle BCD : \hat{B}_1 = \hat{C} + \hat{D} = 35 + 35 \Rightarrow \hat{B}_1 = 70^\circ$$

$$\triangle ADB : DB = AD \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A} = \hat{B}_1 = 70^\circ$$

$$\triangle ADC : \hat{x} = \hat{A} + \hat{C} = 70 + 35 \Rightarrow x = 105^\circ$$



متوسط

۱۲- گزینه «۲»

اگر نقطه O محل هم‌رسی نیمسازهای داخلی باشد، فاصله این نقطه تا ۳ ضلع مثلث با هم برابر است یعنی $OH = OQ = OR$ پس داریم:

$$OH = OQ \Rightarrow 4x - 1 = 2x + 2 \Rightarrow x = 3$$

$$OH = OR \Rightarrow 4x - 1 = 2y + 1 \xrightarrow{x=3} 11 = 2y + 1 \Rightarrow 2y = 10$$

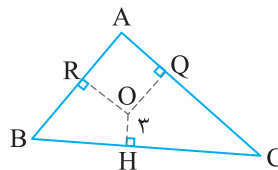
$$\Rightarrow y = 5 \Rightarrow x + y = 8$$

آسان

۱۳- گزینه «۱»

اگر فرض کنیم O محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث ABC باشد، فاصله این نقطه از ۳ ضلع مثلث با هم برابر است یعنی:

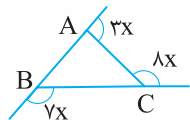
$$\left. \begin{array}{l} OH = OQ = OR \\ OH = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow OQ = OR = 3 \Rightarrow OQ + OR = 6$$



دشوار

۲۲- گزینه ۴

چون ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است پس زاویه روبه‌رو به آن یعنی $\hat{A}$ بزرگ‌ترین زاویه داخلی مثلث است و کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث می‌باشد.



مجموع زوایا خارجی هر مثلث 360° است پس داریم:

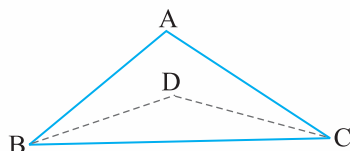
$$3x + 7x + 8x = 360 \Rightarrow 18x = 360 \Rightarrow x = 20$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 3(20) = 60$$

پس زاویه داخلی رأس A برابر $180 - 60 = 120^\circ$ است.

چون نقطه D از همه اضلاع یک مثلث به یک فاصله است پس این نقطه محل هم‌رسمی نیمسازها است و داریم:

$$\hat{D} = 90 + \frac{\hat{A}}{2} = 90 + 60 = 150^\circ$$

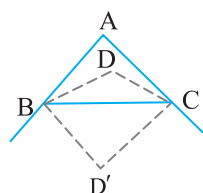


متوسط

۲۳- گزینه ۳

$$\hat{BDC} = 2\hat{BDC} \Rightarrow 90 + \frac{\hat{A}}{2} = 2(90 - \frac{\hat{A}}{2}) \Rightarrow 90 + \frac{\hat{A}}{2} = 180 - \hat{A}$$

$$\Rightarrow \frac{3\hat{A}}{2} = 90 \Rightarrow \hat{A} = 60$$

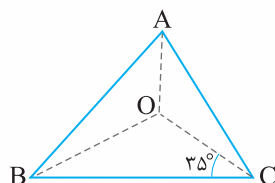


آسان

۲۴- گزینه ۱

می‌دانیم نیمسازهای داخلی هر مثلث هم‌رسمند پس اگر نقطه O روی نیمسازهای زوایا A و B باشند، این نقطه روی نیمساز زاویه C هم می‌باشد

پس:



$$\hat{C} = 2(35) = 70^\circ$$

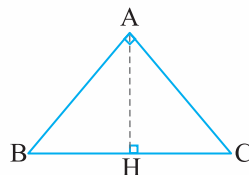
زاویه بین دو نیمساز داخلی A و B از رابطه $90 + \frac{\hat{C}}{2}$ به دست می‌آید پس داریم:

$$\hat{AOB} = 90 + \frac{\hat{C}}{2} = 90 + 35 = 125^\circ$$

آسان

۱۸- گزینه ۲

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع میانه هم می‌باشد پس نقطه H وسط وتر است. هر دو مثلث AHC و AHB در رأس H قائمه هستند پس محل هم‌رسمی ارتفاع‌های هر دو مثلث رأس قائمه یعنی فقط نقطه H است و نقطه H وسط وتر مثلث ABC است که این نقطه محل هم‌رسمی عمودمنصف‌های مثلث ABC است.



دشوار

۱۹- گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} 2b^2 > b^2 &\Rightarrow 2b^2 + c^2 > b^2 + c^2 \\ 6 > 0 &\Rightarrow 2b^2 + c^2 + 6 > 2b^2 + c^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{a^2 = 2b^2 + c^2 + 6} a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90$$

پس محل هم‌رسمی ارتفاع‌های خارج مثلث است.

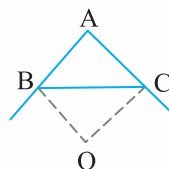
متوسط

۲۰- گزینه ۱

می‌دانیم زاویه بین دو نیمساز خارجی B و C از مثلث ABC برابر $(90 - \frac{\hat{A}}{2})$ است و هر چقدر $\hat{A}$ زاویه بزرگ‌تری باشد، O زاویه کوچک‌تری است و چون

$$\hat{A} = 138 \text{ منفرجه است پس حتماً } \hat{A} \text{ بزرگ‌ترین زاویه مثلث است.}$$

$$\hat{O} = 90 - \frac{138}{2} = 21^\circ$$



دشوار

۲۱- گزینه ۱

می‌دانیم زاویه بین نیمساز داخلی B و نیمساز خارجی C برابر $\frac{\hat{A}}{2}$ است پس

داریم:

$$\frac{\hat{A}}{2} = 40 \Rightarrow \hat{A} = 80^\circ$$

زاویه بین نیمساز خارجی A و نیمساز خارجی B برابر $(90 - \frac{\hat{C}}{2})$ است پس

داریم:

$$90 - \frac{\hat{C}}{2} = 80 \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} = 10 \Rightarrow \hat{C} = 20^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 80 + \hat{B} + 20 = 180 \Rightarrow \hat{B} = 80^\circ$$

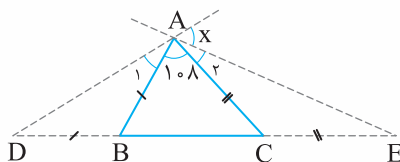
چون هر سه زاویه مثلث حاده هستند پس نقطه هم‌رسمی ارتفاع درون مثلث است.

متوسط

۲۸- گزینه «۳»

$$\triangle ABC: 108 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 72^\circ$$

از تکنیک زاویه‌های آزاد استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\hat{B} = 52^\circ$ و $\hat{C} = 20^\circ$ بوده‌اند تا $\hat{B} + \hat{C} = 72^\circ$ شود.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD: BD = AB \xrightarrow{\text{مستوی الساقین}} \hat{D} = \hat{A}_1 \\ \triangle ABD: \text{خارجی } \hat{ABC} = \hat{D} + \hat{A}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow 52 = 2\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = 26$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ACE: AC = CE \xrightarrow{\text{مستوی الساقین}} \hat{A}_2 = \hat{E} \\ \triangle ACE: \text{خارجی } \hat{ACB} = \hat{A}_2 + \hat{E} \end{array} \right\} \Rightarrow 20 = 2\hat{E} \Rightarrow \hat{E} = 10$$

$$\triangle ADE: \text{خارجی } \hat{x} = \hat{D} + \hat{E} = 26 + 10 = 36$$

آسان

۲۹- گزینه «۴»

$$\hat{A} + \hat{B} = 90 \Rightarrow \hat{B} = 90 - \hat{A} \quad (1)$$

$$\hat{A} = \frac{4}{9}(180 - \hat{B}) \Rightarrow 9\hat{A} = 720 - 4\hat{B} \Rightarrow 9\hat{A} = 720 - 4(90 - \hat{A})$$

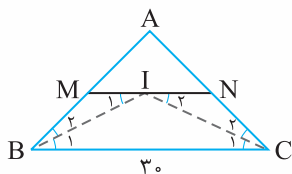
$$\xrightarrow{(1)} 9\hat{A} = 720 - 360 + 4\hat{A} \Rightarrow 5\hat{A} = 360 \Rightarrow \hat{A} = 72^\circ$$

دشوار

۳۰- گزینه «۲»

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC, \text{ مورب } BI \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{B}_1 = \hat{I}_1 \\ BI \text{ نیمساز} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{I}_1 \Rightarrow IM = MB$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC, \text{ مورب } CI \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{C}_1 = \hat{I}_2 \\ CI \text{ نیمساز} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{I}_2 \Rightarrow IN = NC$$



$$\text{محیط } AMN: AM + MN + AN = AM + MI + IN + AN$$

$$= AM + MB + NC + AN = AB + AC$$

$$\Rightarrow \text{محیط } AMN = 16 + 21 = 37$$

آسان

۳۱- گزینه «۱»

می‌دانیم در هر مثلث اگر اندازه اضلاع نامساوی باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

$$BC < AB < AC \Rightarrow \hat{A} < \hat{C} < \hat{B}$$

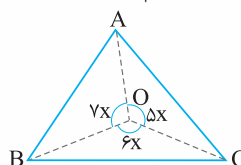
متوسط

۲۵- گزینه «۳»

$$5x + 6x + 7x = 360 \Rightarrow 18x = 360 \Rightarrow x = 20$$

چون زاویه $\hat{AOB}$ بزرگ‌ترین زاویه بین نیمسازهای داخلی است پس در این مثلث زاویه $\hat{C}$ از همه بزرگ‌تر است.

$$\hat{AOB} = 90 + \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow 7(20) = 90 + \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow 50 = \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 100$$

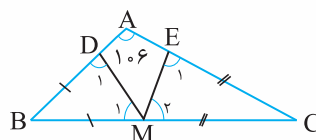


متوسط

۲۶- گزینه «۱»

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 106 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 74$$

از تکنیک زاویه‌های آزاد استفاده می‌کنیم فرض می‌کنیم $\hat{B} = 34$ و $\hat{C} = 40$ باشد تا $\hat{B} + \hat{C} = 74$ شود.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle BDM: BD = DM \xrightarrow{\text{مستوی الساقین}} \hat{D}_1 = \hat{M}_1 \\ \triangle BDM: 34 + \hat{D}_1 + \hat{M}_1 = 180 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 2\hat{M}_1 + 34 = 180 \Rightarrow 2\hat{M}_1 = 146 \Rightarrow \hat{M}_1 = 73^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle MEC: CE = CM \xrightarrow{\text{مستوی الساقین}} \hat{E}_1 = \hat{M}_2 \\ \triangle EMC: 40 + \hat{M}_2 + \hat{E}_1 = 180 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 2\hat{M}_2 + 40 = 180 \Rightarrow 2\hat{M}_2 = 140 \Rightarrow \hat{M}_2 = 70^\circ$$

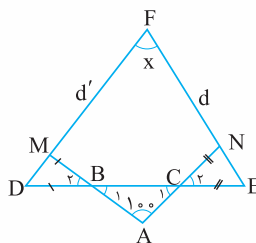
$$\hat{M}_1 + \hat{M} + \hat{M}_2 = 180 \Rightarrow 73 + \hat{M} + 70 = 180 \Rightarrow \hat{M} = 37$$

متوسط

۲۷- گزینه «۴»

$$\triangle ABC: 100 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 80$$

از تکنیک زاویه‌های آزاد استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\hat{B}_1 = 60$ و $\hat{C}_1 = 20$ بوده‌اند.



$$\triangle DMB: \hat{B}_2 + \hat{D} + \hat{M} = 180 \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 60, \hat{D} = \hat{M}} 2\hat{D} + 60 = 180 \Rightarrow \hat{D} = 60^\circ$$

$$\triangle CNE: \hat{C}_2 + \hat{N} + \hat{E} = 180 \xrightarrow{\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 20, \hat{E} = \hat{N}} 2\hat{E} + 20 = 180 \Rightarrow \hat{E} = 80^\circ$$

$$\triangle FDE: \hat{D} + \hat{F} + \hat{E} = 180 \Rightarrow 60 + \hat{x} + 80 = 180 \Rightarrow \hat{x} = 40^\circ$$

متوسط

۳۷- گزینه ۲»

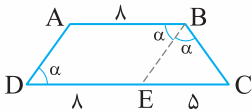
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABE: \hat{A} > \hat{B} > \hat{E} \Rightarrow BE > AE > AB \\ \triangle BCE: \hat{B} > \hat{C} > \hat{E} \Rightarrow EC > BE > BC \\ \triangle ECD: \hat{E} > \hat{D} > \hat{C} \Rightarrow CD > CE > ED \end{array} \right\} \Rightarrow CD \text{ بزرگ ترین پاره خط است.}$$

دشوار

۳۸- گزینه ۲»

نیمساز زاویه B را رسم می‌کنیم تا ضلع DC را در نقطه E قطع کند در چهار ضلعی ABED، $\hat{ABE} = \hat{D} = \alpha$ و چون $AB \parallel DE$ است چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است پس $DE = 8$ و $EC = 13 - 8 = 5$ است و داریم:

$$\hat{BED} + \alpha = 180 \Rightarrow \hat{BED} = 180 - \alpha$$



$$\hat{BEC} = \alpha \text{ بنابراین}$$

$$\triangle BEC: \hat{BEC} = \hat{CBE} = \alpha \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} BC = EC = 5$$

دشوار

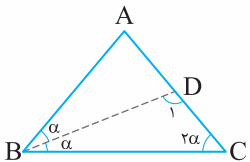
۳۹- گزینه ۳»

$$\triangle ABC: AB = AC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{B} = \hat{C} = 2\alpha$$

$$\triangle DBC: BD = BC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{D}_1 = \hat{C} = 2\alpha$$

$$\triangle BDC: \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180 \Rightarrow 5\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 36$$

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{A} + 2\alpha + 2\alpha = 180 \xrightarrow{\alpha=36} \hat{A} = 36^\circ$$



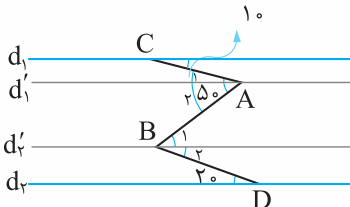
متوسط

۴۰- گزینه ۳»

از A و B دو خط موازی d_1 و d_2 رسم می‌کنیم.

$$d_1 \parallel d'_1, AC \text{ مورب} \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A}_1 = \hat{C} = 10^\circ$$

$$\hat{A}_2 = 50 - \hat{A}_1 = 50 - 10 = 40^\circ$$



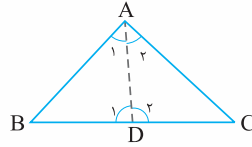
$$\left. \begin{array}{l} d'_1 \parallel d'_2, AB \text{ مورب} \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{B}_1 = \hat{A}_2 = 40^\circ \\ d_2 \parallel d'_2, BD \text{ مورب} \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{B}_2 = \hat{D} = 20^\circ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 40 + 20 \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

متوسط

۳۳- گزینه ۱»

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADC: \hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \\ AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \triangle ADB: \hat{D}_1 > \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} AB > BD \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_1$$



آسان

۳۳- گزینه ۲»

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 2x + x + 20 + 70 = 180 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30$$

$$\hat{C} = 30 + 20 = 50$$

$$\hat{A} = 2(30) = 60$$

$$\hat{B} > \hat{A} > \hat{C} \Rightarrow b > a > c$$

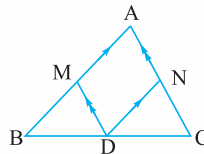
دشوار

۳۴- گزینه ۳»

قبلاً ثابت کردیم (تمرین ۲۳ سوالات تشریحی) اگر از نقطه‌ای روی یک ضلع

مثلث موازی دو ضلع دیگر رسم کنیم مجموع طول پاره‌خط‌های به وجود آمده از ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است و از ضلع بزرگ‌تر کوچک‌تر است یعنی:

$$AC < DN + DM < AB \Rightarrow 7 < DN + DM < 11$$



دشوار

۳۵- گزینه ۱»

با توجه به نکته بیان شده در سوال قبل داریم:

$$AC < DE + DF < BC \Rightarrow$$

$$11 < \frac{12 \times 2}{2} < 12$$

$$24 < \text{محیط متوازی‌الاضلاع} < 22$$

چون محیط متوازی‌الاضلاع طبق گفته صورت مسئله یک عدد طبیعی است پس فقط ۲۳ می‌تواند باشد.

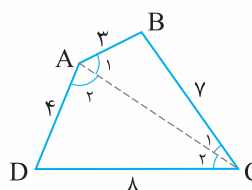
متوسط

۳۶- گزینه ۱»

قطر AC را رسم می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: BC > AB \xrightarrow{\text{ضلع برتر}} \hat{A}_1 > \hat{C}_1 \\ \triangle ADC: DC > AD \xrightarrow{\text{ضلع برتر}} \hat{A}_2 > \hat{C}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} \hat{A} > \hat{C}$$

حال قطر BD را رسم می‌کنیم و به همین روش ثابت می‌کنیم $\hat{B} > \hat{D}$



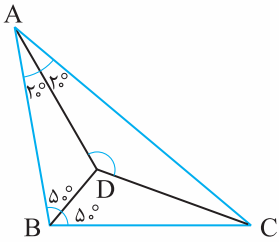
آسان

۱۴۴- گزینۀ «۴»

چون نیمسازهای هر مثلث هم‌رسند اگر نقطه D روی نیمساز زوایا A و B باشد، حتماً روی نیمساز زاویه C هم می‌باشد.

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 40 + 100 + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$$

$$\triangle ADC: \frac{\hat{A}}{2} + \hat{D} + \frac{\hat{C}}{2} = 180 \Rightarrow 20 + \hat{D} + 20 = 180 \Rightarrow \hat{D} = 140^\circ$$



متوسط

۱۴۵- گزینۀ «۲»

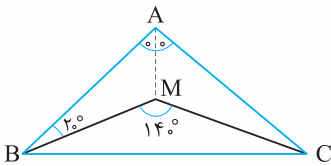
اگر نقطه M روی نیمساز زوایا A و C باشد چون نیمسازهای هر مثلث هم‌رسند حتماً M روی نیمساز B هم می‌باشد پس در مثلث ABC داریم:

$$\hat{B} = 40^\circ$$

$$\triangle MBC: \frac{\hat{B}}{2} + \angle BMC + \frac{\hat{C}}{2} = 180 \Rightarrow 20 + 140 + \frac{\hat{C}}{2} = 180$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} = 20 \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$$

$$\angle AMB = 90 + \frac{\hat{C}}{2} = 90 + 20 = 110^\circ$$



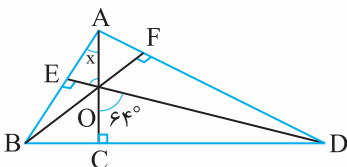
متوسط

۱۴۶- گزینۀ «۲»

می‌دانیم ارتفاع‌ها در هر مثلث هم‌رسند و اگر O روی ارتفاع‌های AC و BF از مثلث ABC باشد روی ارتفاع سوم مثلث نیز هست پس DO را امتداد می‌دهیم تا در E ضلع AB را قطع کند. $\hat{E} = 90^\circ$

$$\angle AOE = \angle COD = 64^\circ \text{ متقابل به رأس}$$

$$\triangle AOE: x + 90 + 64 = 180 \Rightarrow x = 26^\circ$$



دشواری

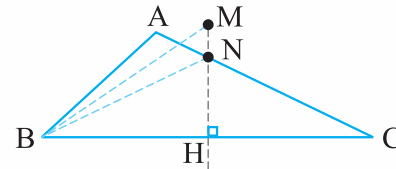
۱۴۷- گزینۀ «۳»

اگر عمود منصف BC را در N قطع کند، B را به N وصل می‌کنیم.

$$N \text{ روی عمود منصف } BC \Rightarrow BN = NC \Rightarrow \angle NBH = \hat{C} \quad (1)$$

$$\angle MBH > \angle NBH \xrightarrow{(1)} \angle MBH > \hat{C} \Rightarrow 2\angle MBH > 2\hat{C} \quad (2)$$

$$BM \text{ نیمساز } \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 2\angle MBH \xrightarrow{(2)} \hat{B} > 2\hat{C}$$



دشواری

۱۴۸- گزینۀ «۱»

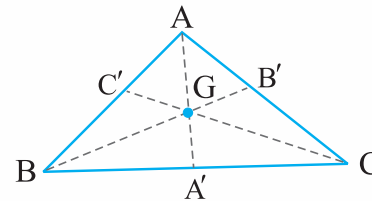
اگر G نقطه هم‌رسی میانه‌ها باشد داریم:

$$BG = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3} \times 18 = 12$$

$$CG = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

در مثلث BGC داریم:

$$|BG - GC| < BC < BG + GC \Rightarrow 4 < a < 20 \Rightarrow \text{پس } a \text{ می‌تواند } 19 \text{ باشد.}$$



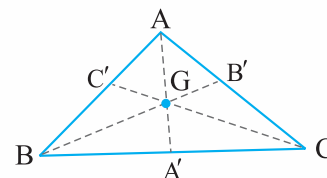
دشواری

۱۴۹- گزینۀ «۴»

اگر G محل هم‌رسی میانه‌ها باشد و $m_c = x$ داریم:

$$BG = \frac{2}{3}m_b = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

$$CG = \frac{2}{3}m_c = \frac{2}{3}x$$



در مثلث BGC داریم:

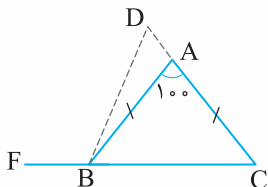
$$|BC - BG| < CG < BC + BG \Rightarrow 6 < \frac{2}{3}x < 18 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} 9 < x < 27$$

متوسط

۵-گزینه «۳»

چون در هر مثلث فقط یک زاویه منفرجه داریم و دو زاویه مثلث متساوی الساقین با هم برابر هستند پس این زاویه رأس مثلث است.

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180 - \hat{A}}{2} = \frac{180 - 100}{2} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 40^\circ$$



$$\hat{ABE} = 180 - 40 = 140^\circ$$

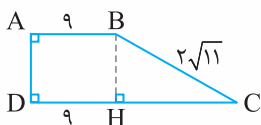
چون BD نیمساز زاویه $\hat{ABE}$ است پس $\hat{ABD} = 70^\circ$

$$\triangle ABD: \hat{A} = \hat{ABD} + \hat{D} \Rightarrow 100 = 70 + \hat{D} \Rightarrow \hat{D} = 30^\circ$$

متوسط

۵۱-گزینه «۳»

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم چهار ضلعی $ABHD$ به دلیل داشتن ۴ زاویه قائمه مستطیل هستند پس $AB = DH = 9$ است پس $HC = 14 - 9 = 5$



$$\triangle BHC: BC^2 = HC^2 + BH^2 \Rightarrow 44 = 25 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = 19 \Rightarrow BH = \sqrt{19}$$

$$\triangle DBH: DB^2 = DH^2 + BH^2 = 81 + 19 = 100 \Rightarrow DB = 10$$

دشوار

۵۲-گزینه «۱»

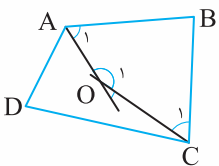
$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{12} = 5x \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 15x & \hat{B} = 20x \\ \hat{C} = 25x & \hat{D} = 12x \end{cases}$$

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر ۴ ضلعی 360° است پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 15x + 20x + 25x + 12x = 360 \Rightarrow 72x = 360 \Rightarrow x = 5^\circ$$

$$\triangle ABCD: \frac{\hat{A}}{2} + \hat{B} + \frac{\hat{C}}{2} + \hat{O}_1 = 360^\circ$$



$$\Rightarrow 7/5x + 20x + 12/5x + \hat{O}_1 = 360 \Rightarrow 200 + \hat{O}_1 = 360$$

$$\Rightarrow \hat{O}_1 = 160^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 = 20^\circ$$

دشوار

۴۷-گزینه «۳»

AH و BH و CH را امتداد می‌دهیم تا اضلاع مثلث را در P و Q و R قطع کنند.

$$\triangle AQP: \hat{A} + 90 + \hat{QHP} + 90 = 360 \xrightarrow{\hat{A}=40} \hat{QHP} = 140^\circ$$

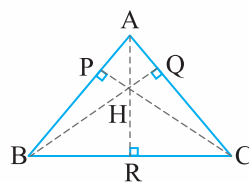
$$\hat{BHC} = \hat{QHP} = 140^\circ \text{ متقابل به رأس}$$

$$\triangle BPH: \hat{B} + 90 + \hat{PHR} + 90 = 360 \xrightarrow{\hat{B}=60} \hat{PHR} = 120^\circ$$

$$\hat{PHR} = \hat{AHC} = 120^\circ \text{ متقابل به رأس}$$

$$\frac{\hat{AHC}}{\hat{BHC}} = \frac{120}{140} = \frac{6}{7}$$

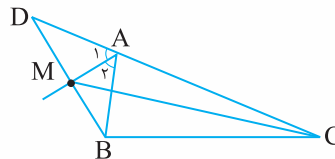
نکته: زاویه بین دو ارتفاع یک مثلث برابر رأس سوم یا مکمل آن است.



دشوار

۴۸-گزینه «۱»

در امتداد ضلع AC نقطه D را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = AB$ شود.



$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AD = AB \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_1 \text{ نیمساز} \\ AM = AM \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض.}} \triangle AMD \cong \triangle AMB \xrightarrow{\text{م.ا.}} MD = MB$$

$$\triangle CMD: CD < MD + MC \Rightarrow CA + AD < MD + MC$$

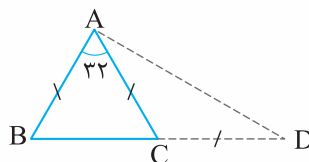
$$\xrightarrow{\substack{AD=AB \\ MD=MB}} CA + AB < MB + MC \Rightarrow \frac{MB + MC}{CA + AB} > 1$$

متوسط

۴۹-گزینه «۳»

$$\triangle ABC: AB = AC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{B} = \hat{C} \quad (1)$$

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \xrightarrow{(1)} 32 + 2\hat{C} = 180 \Rightarrow 2\hat{C} = 148 \Rightarrow \hat{C} = 74^\circ$$



$$\triangle ACD: AC = CD \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{D} = \hat{CAD} \quad (2)$$

$$\triangle ACD: \hat{C} = \hat{CAD} + \hat{D} \xrightarrow{(2)} 74 = 2\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = 37^\circ$$



آسان

-۱

(آ) نادرست؛ گزاره یک جمله خبری است که ارزش آن می‌تواند درست یا نادرست باشد.

(ب) نادرست؛ در مثلثی که زاویه منفرجه داشته باشد، محل تلاقی ارتفاع‌ها خارج مثلث است.

(پ) درست؛ محل برخورد عمودمنصف‌های دو وتر، مرکز دایره است.

(ت) نادرست؛ به ازای $n = 51$ عبارت $n^2 + n + 51$ یک عدد مرکب می‌شود.

آسان

-۲

(آ) دو نقطه
(ب) عمودمنصف
(پ) روی رأس قائمه
(ت) بی‌شمار

آسان

-۳

روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایه حقایق که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

آسان

-۴

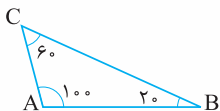
عکس قضیه: در هر مثلث اگر سه زاویه برابر باشند، آن‌گاه ۳ ضلع نیز برابر هستند.

قضیه دو شرطی: ۳ ضلع هر مثلث برابرند، اگر و تنها اگر سه زاویه مثلث با هم برابر باشند.

آسان

-۵

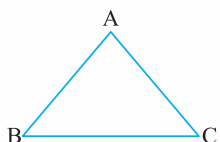
در مثلث شکل مقابل **A** بزرگ‌ترین زاویه و **B** کوچک‌ترین زاویه است ولی $\hat{A} > 4\hat{B}$



متوسط

-۶

فرض $AB \neq AC$ حکم $\hat{B} \neq \hat{C}$
 برهان خلف: اگر $\hat{B} = \hat{C}$ باشد داریم:
 خلاف فرض $\xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} AB = AC$
 پس فرض باطل و $\hat{B} \neq \hat{C}$ است.



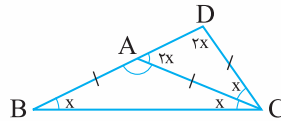
دشوار

۵۳- گزینه «۳»

$$\triangle ABC: AB = AC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{B} = \hat{C} = x$$

$$\triangle ABC: \hat{C}AD = \hat{B} + \hat{C} = 2x \text{ خارجی}$$

$$\triangle ADC: AC = CD \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{C}AD = \hat{D} = 2x$$



$$\triangle BCD: BD = BC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{D} = \hat{BCD} = 2x \Rightarrow \hat{ACD} = x$$

$$\triangle ADC: 2x + 2x + x = 180 \Rightarrow x = 36$$

$$\triangle ADC: \hat{A} = 2x + x = 3x = 3(36) \Rightarrow \hat{A} = 108$$

متوسط

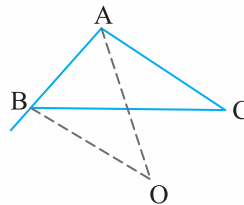
۵۴- گزینه «۲»

اگر $\hat{A} = x$ و $\hat{B} = 4x$ و $\hat{C} = 7x$ باشد، داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow x + 4x + 7x = 180 \Rightarrow 12x = 180 \Rightarrow x = 15$$

زاویه بین نیمساز داخلی **A** و خارجی **B** برابر $\frac{C}{2}$ است.

$$\hat{O} = \frac{\hat{C}}{2} = \frac{7x}{2} = \frac{7 \times 15}{2} \Rightarrow \hat{O} = 52.5^\circ$$



متوسط

۵۵- گزینه «۲»

$$\hat{C} = 2x, \hat{B} = 3x, \hat{A} = 7x$$

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 7x + 3x + 2x = 180$$

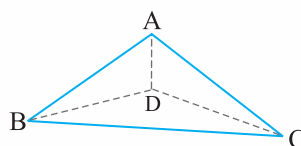
$$\Rightarrow 12x = 180 \Rightarrow x = 15^\circ$$

$$\hat{ADB} = 90 + \frac{\hat{C}}{2} = 90 + x = 105^\circ$$

$$\hat{ADC} = 90 + \frac{\hat{B}}{2} = 90 + \frac{3}{2}x = 112.5^\circ$$

$$\hat{BDC} = 90 + \frac{\hat{A}}{2} = 90 + \frac{7}{2}x = 142.5^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{ADB} + \hat{ADC} - \hat{BDC} = 105 + 112.5 - 142.5 = 75^\circ$$



-۷

متوسط

می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

$$AB \text{ روی عمودمنصف } M \Rightarrow MA = MB \Rightarrow 3x + 1 = y + 6 \Rightarrow 3x - y = 5$$

$$AH = HB \Rightarrow 2x = y + 2 \Rightarrow 2x - y = 2$$

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

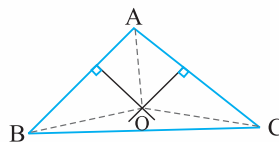
$$9 - y = 5 \Rightarrow y = 4$$

-۸

دشوار

یادآوری قضیه عمودمنصف: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس.

عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. باید ثابت کنیم عمودمنصف ضلع BC هم از O می‌گذرد. برای این منظور O را به رأس مثلث وصل می‌کنیم.



$$\left. \begin{array}{l} \text{قضیه عمودمنصف} \rightarrow OA = OB \\ \text{قضیه عمودمنصف} \rightarrow OA = OC \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow OB = OC \xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}} \text{روی } O \text{ عمود منصف } BC$$

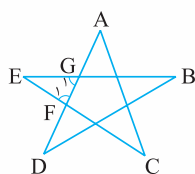
-۹

متوسط

$$\Delta FAC: \hat{F}_1 = \hat{A} + \hat{C} \quad (1)$$

$$\Delta GDB: \hat{G}_1 = \hat{B} + \hat{D} \quad (2)$$

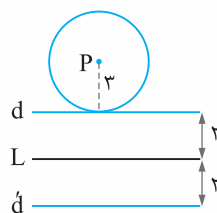
$$\Delta EFG: \hat{E} + \hat{F}_1 + \hat{G}_1 = 180^\circ \xrightarrow{(1), (2)} \hat{E} + \hat{A} + \hat{C} + \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$



-۱۰

دشوار

مکان هندسی نقاطی که از نقطه P به فاصله ۳ باشد، دایره‌ای است به مرکز P و شعاع ۳ و مکان هندسی نقاطی که از خط L به فاصله ۲ باشد، دو خط d و d' است که موازی L بوده و L وسط آن‌ها است و فاصله هر خط از L برابر ۲ است. نقاط برخورد دایره با دو خط d و d' جواب مسئله است که مسئله ۱ جواب دارد.



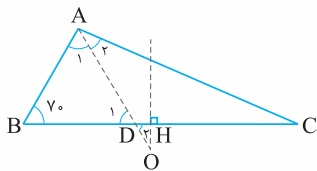
-۱۱

دشوار

$$\Delta ABD: \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 = 180^\circ \Rightarrow 25 + 70 + \hat{D}_1 = 180 \Rightarrow \hat{D}_1 = 85$$

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 85 \text{ :متقابل به رأس}$$

$$\Delta DOH: \hat{D}_2 + \hat{H} + \hat{O} = 180 \Rightarrow 85 + 90 + \hat{O} = 180 \Rightarrow \hat{O} = 5^\circ$$



-۱۲

دشوار

از نقطه D به اضلاع AB و AC عمود رسم می‌کنیم چون نقطه D روی نیمساز زاویه A است پس $DH = DQ = x$

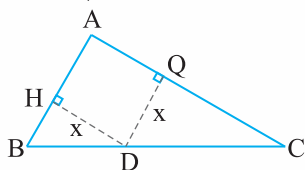
$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} DH \times AB + \frac{1}{2} DQ \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times 7 = \frac{1}{2} \times x \times 3 + \frac{1}{2} \times x \times 7$$

$$\frac{21}{2} = 5x \Rightarrow x = 2.1$$

چهار ضلعی $AQDH$ چون ۴ زاویه قائمه دارد و طول و عرض آن با هم برابر است مربع است و AD قطر این مربع است.

$$AD = 2.1\sqrt{2}$$



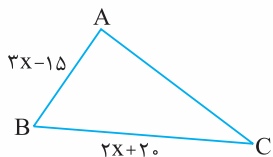
-۱۳

متوسط

$$AB > 0 \Rightarrow 3x - 15 > 0 \Rightarrow x > 5$$

$$BC > 0 \Rightarrow 2x + 20 > 0 \Rightarrow x > -10$$

$$\hat{A} > \hat{C} \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} 2x + 20 > 3x - 15 \Rightarrow -x > -35 \Rightarrow x < 35$$



$$\text{پس } 5 < x < 35$$

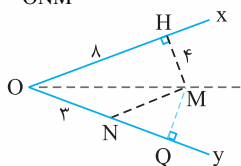
-۱۴

متوسط

از نقطه M بر Oy عمود می‌کنیم. چون M روی نیمساز زاویه O است پس

$$OH = OQ = 4$$

$$S_{\Delta ONM} = \frac{1}{2} ON \times MQ = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

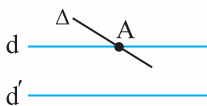


متوسط

-۶

نکته: از هر نقطه خارج یک خط، فقط یک خط به موازات آن خط می‌توان رسم کرد.

برهان خلف: فرض کنیم که خط Δ در نقطه A خط d را قطع کند ولی خط d' که با d موازی است را قطع نکند یعنی $(\Delta \parallel d')$

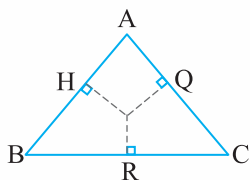


در این حالت از نقطه A خارج خط d' دو خط d و Δ را موازی d' رسم کرده‌ایم که این نشدنی است پس فرض خلف باطل و خط Δ حتماً d' را قطع می‌کند.

دشوار

-۷

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله هستند و برعکس.



نیمساز دو زاویه A و B همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. باید ثابت کنیم O روی نیمساز زاویه C قرار دارد، برای این منظور از O به ۳ ضلع مثلث عمود رسم می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{قضیه نیمساز} \rightarrow OH = OQ \\ \text{قضیه نیمساز} \rightarrow OH = OR \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow OQ = OR \xrightarrow{\text{عکس قضیه نیمساز}} O \text{ روی نیمساز زاویه } C \text{ است}$$

پس ۳ نیمساز داخلی هر مثلث هم‌مرس هستند.

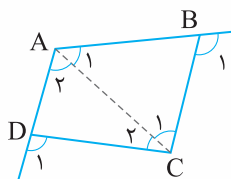
متوسط

-۸

قطر AC را رسم می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 \\ \triangle ADC: \widehat{D}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{C}_2 \end{array} \right\}$$

$$\oplus \rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = \widehat{A} + \widehat{C}$$



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

آسان

-۱

(آ) استقرایی

(ب) گزاره

(پ) روی وتر

(ت) با هم برابر و بزرگ‌تر از نصف طول پاره‌خط

آسان

-۲

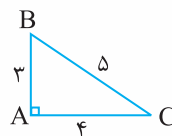
(ب) درست

(آ) نادرست

آسان

-۳

(آ) در مثلث قائم‌الزاویه ABC شکل روبه‌رو یک ارتفاع مثلث $AC = 4$ است که از ضلع AB بزرگ‌تر است.



(ب) اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ باشد نه $A \subseteq B$ و نه $B \subseteq A$ است.

آسان

-۴

عکس قضیه: اگر مساحت‌های دو دایره با هم برابر باشند، آن‌گاه شعاع‌های آن‌ها نیز با هم برابرند.

قضیه دو شرطی: دو دایره شعاع‌های برابر دارند، اگر و تنها اگر مساحت‌های آنها نیز با هم برابر باشند.

متوسط

-۵

$$A \text{ روی نیمساز } O \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} AH = AQ$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = y + 3 \Rightarrow 3x - y = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA \text{ مشترک (وتر)} \\ \triangle OAH \cong \triangle OAQ \text{ (وتر یک زاویه)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر یک زاویه}} \triangle OAH \cong \triangle OAQ$$

$$\xrightarrow{\text{م.}} OH = OQ$$

$$\Rightarrow 5x + 1 = 3y - 1 \Rightarrow 5x - 3y = -2$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 5x - 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x + 3y = -6 \\ 5x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4x = -8 \Rightarrow x = 2$$

$$6 - y = 2 \Rightarrow y = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{3}{2} y$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} CH \times AD = 3y$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CAD} \Rightarrow 18 = \frac{3}{2} y + 3y \Rightarrow \frac{9}{2} y = 18 \Rightarrow y = 4$$

$$\triangle HCD: CD^2 = CH^2 + HD^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow x = 5$$

$$ABCD \text{ محیط} = AB + BC + CD + AD = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

متوسط

-۱۳

می‌دانیم در هر مثلث اندازه هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

$$|12 - 10| < 2x - 4 < 12 + 10 \Rightarrow 2 < 2x - 4 < 22 \xrightarrow{+4} 6 < 2x < 26$$

$$\Rightarrow 3 < x < 13$$



آسان

گزینه «۴»

همواره اگر مثلثی یک زاویه منفرجه داشته باشد، ارتفاع‌های این مثلث در خارج مثلث هم‌رس می‌شوند.

دشوار

گزینه «۳»

$x > 4$ است تا اندازه هر دو ضلع AC و BC مثبت باشد با توجه به این‌که

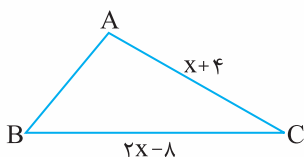
$$4 < x < 12$$

$$AC > 0 \Rightarrow x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$$

$$BC > 0 \Rightarrow 2x - 8 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$AC > BC \Rightarrow x + 4 > 2x - 8 \Rightarrow -x > -12 \Rightarrow x < 12$$

پس $AC > BC$ است و با توجه به قضیه ضلع برتر داریم:



$$\hat{B} > \hat{A}$$

دشوار

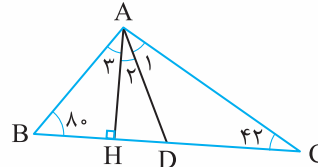
-۹

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 80 + 42 = 180 \Rightarrow \hat{A} = 58^\circ$$

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = 29$$

$$\triangle ABH: \hat{B} + \hat{H} + \hat{A}_1 = 180^\circ \Rightarrow 80 + 90 + \hat{A}_1 = 180 \Rightarrow \hat{A}_1 = 10$$

$$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 \Rightarrow 58 = 29 + \hat{A}_2 + 10 \Rightarrow \hat{A}_2 = 19^\circ$$



نکته: همواره زاویه بین ارتفاع و نیمساز رأس A در مثلث ABC برابر

$$\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2} \text{ است.}$$

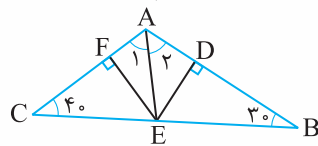
دشوار

-۱۰

$$ED = EF \xrightarrow{\text{عکس قضیه نیمساز}} \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 30 + 40 = 180 \Rightarrow \hat{A} = 110$$

$$\angle CAE = \hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = 55^\circ$$



متوسط

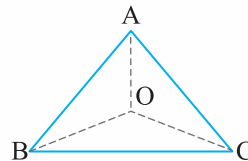
-۱۱

اگر O نقطه تلاقی عمودمنصف‌ها باشد آن‌گاه:

$$OA = OB = OC$$

$$OA = OB \Rightarrow 2x + 1 = 3x - 4 \Rightarrow x = 5$$

$$OA = OC \Rightarrow 2x + 1 = y + 3 \xrightarrow{x=5} 11 = y + 3 \Rightarrow y = 8$$



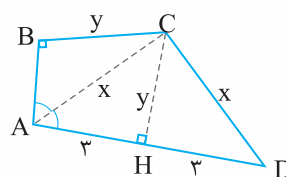
دشوار

-۱۲

$$AD \text{ روی عمودمنصف } C \xrightarrow{\text{قضیه عمودمنصف}} CD = CA = x$$

$$A \text{ روی نیمساز } C \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} CH = CB = y$$

$$\left. \begin{array}{l} AC = AC \text{ (مشتک وتر)} \\ CH = CB \text{ (اثبات بالا)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle ACB \cong \triangle ACH \xrightarrow{\text{م.ا}} AB = AH = 3$$



آسان

۶- گزینه «۳»

در هر مثلث طول هر میانه از نصف قدر مطلق تفاضل دو ضلع مجاور بزرگ‌تر و از نصف مجموع دو ضلع مجاور کوچک‌تر است.

$$\frac{|AC - AB|}{2} < AM < \frac{AC + AB}{2} \Rightarrow 2 < AM < 9$$

$$\Rightarrow AM \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

۶ مقدار صحیح برابر **AM** وجود دارد.

متوسط

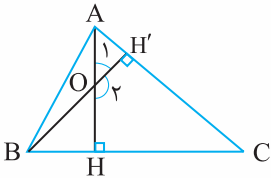
۷- گزینه «۱»

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 70 + 80 + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{C} = 30$$

$$HCH'O : \hat{C} + \hat{H}' + \hat{O}_2 + \hat{H} = 360$$

$$\Rightarrow 30 + 90 + \hat{O}_2 + 90 = 360 \Rightarrow \hat{O}_2 = 150^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 30^\circ$$

نکته: همواره زاویه بین ارتفاع **AH** و **BH'** برابر **C** یا **180 - C** است.



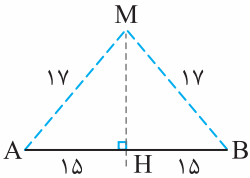
آسان

۸- گزینه «۲»

چون نقطه **M** از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است پس **M** روی عمودمنصف پاره‌خط **AB** قرار دارد.

$$\Delta AMH : AM^2 = MH^2 + AH^2 \Rightarrow 289 = MH^2 + 225$$

$$\Rightarrow MH^2 = 64 \Rightarrow MH = 8$$



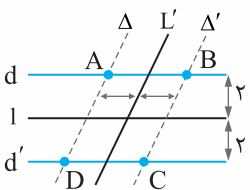
دشواری

۹- گزینه «۴»

مکان هندسی نقاطی که از خط **L** به فاصله ۲ باشد، ۲ خط موازی **L** و به فاصله ۲ از آن است (d', d)

مکان هندسی نقاطی که از خط **L'** به فاصله ۱ باشد ۲ خط موازی **L'** و به فاصله ۱ از آن است (Δ', Δ)

این خطوط در ۴ نقطه همدیگر را قطع می‌کنند، پس مسئله ۴ جواب دارد.



دشواری

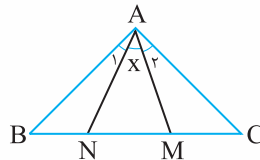
۳- گزینه «۲»

$$\Delta ABM : AB = BM \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{M} = \hat{A}_1 + x \quad (1)$$

$$\Delta ACN : AC = CN \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{N} = \hat{A}_2 + x \quad (2)$$

$$\Delta AMN : \hat{N} + \hat{M} + x = 180 \xrightarrow{(1), (2)} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + x + 2x = 180$$

$$\Rightarrow 2x = 80 \Rightarrow x = 40^\circ$$



متوسط

۴- گزینه «۱»

روش اول:

$$\Delta ABC : AB = AC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{B} = \hat{C} = \alpha$$

$$\Delta DAC : AD = AC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{D} = \hat{ACD} = \beta$$

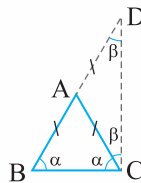
$$\Delta ABC : \hat{CAD} = \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{CAD} = \alpha + \beta$$

$$\Delta BDC : \alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

مثلث **BDC** در رأس **C** قائم‌الزاویه است.

روش دوم: در مثلث **BDC** چون **BA = AD** است پس **CA** میانه است و

چون $CA = \frac{BD}{2}$ است، مثلث قائم‌الزاویه است.



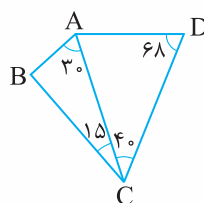
متوسط

۵- گزینه «۳»

$$\Delta ABC : 30 + 15 + \hat{B} = 180 \Rightarrow \hat{B} = 135^\circ$$

$$\Delta ADC : 68 + 40 + \hat{DAC} = 180 \Rightarrow \hat{DAC} = 72^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC : \hat{B} > \hat{A} > \hat{C} \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} AC > BC > AB \\ \Delta ADC : \hat{DAC} > \hat{D} > \hat{C} \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} CD > AC > AD \end{array} \right\} \Rightarrow \text{CD بزرگ‌ترین ضلع}$$

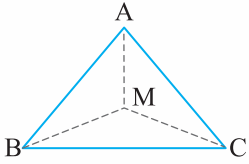


متوسط

۱۴- گزینه «۲»

می‌دانیم اگر محیط یک مثلث $2P$ باشد و نقطه M درون این مثلث باشد، مجموع فاصله این نقطه از ۳ رأس از نصف محیط بزرگ‌تر و از اندازه محیط مثلث کوچک‌تر است.

$$2P = AB + AC + BC = 17 + 13 + 16 = 46 \Rightarrow P = 23$$



$$P < AM + BM + MC < 2P \Rightarrow 23 < AM + BM + MC < 46$$

$$\Rightarrow AM + BM + MC \in \{24, 25, \dots, 45\}$$

پس $AM + BM + MC$ می‌تواند $(45 - 24 + 1 = 22)$ عدد طبیعی متفاوت باشد.

متوسط

۱۵- گزینه «۲»

می‌دانیم همواره طول مجموع ۳ نیمساز داخلی از نصف محیط بزرگ‌تر و از محیط مثلث کوچک‌تر است پس داریم:

$$P < d_a + d_b + d_c < 2P \Rightarrow 5 < d_a + d_b + d_c < 10$$

متوسط

۱۶- گزینه «۲»

می‌دانیم هرگاه دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم مثلث را داشته باشیم و دو ضلع با هم برابر نباشند و ارتفاع وارد بر ضلع سوم از دو ضلع کوچک‌تر باشد، ۲ مثلث می‌توان رسم کرد.

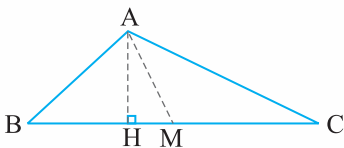
دشوار

۱۷- گزینه «۱»

فرض کنیم $AH \leq AM$ ارتفاع مثلث باشد می‌دانیم $AH \leq AM$ است.

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow 30 = \frac{1}{2} AH \times 10 \Rightarrow AH = 6$$

چون $AH > AM$ است پس نمی‌توان مثلثی رسم کرد.



دشوار

۱۸- گزینه «۱»

می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه برابر است پس داریم:

$$A \text{ روی } D \Rightarrow DH = DH' \Rightarrow x^2 - 2 = x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

اگر $x = -2$ باشد $AB = -3$ می‌شود پس $x = 3$ است.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{x + 4}{2x + 1} = \frac{3 + 4}{2(3) + 1} = \frac{7}{7} = 1$$

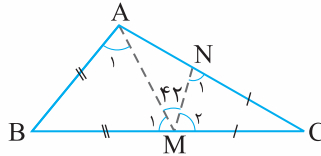
متوسط

۱۰- گزینه «۱»

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M} + \widehat{M}_2 = 180 \Rightarrow \widehat{M}_1 + 42 + \widehat{M}_2 = 180$$

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 138$$

از تکنیک زاویه‌های آزاد استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\widehat{M}_1 = 68$ و $\widehat{M}_2 = 70$ است.



$$\triangle ABM : BM = BA \xrightarrow{\text{مساوی الساقین}} \widehat{M}_1 = \widehat{A}_1 = 68^\circ$$

$$\widehat{M}_1 + \widehat{A}_1 + \widehat{B} = 180 \Rightarrow 68 + 68 + \widehat{B} = 180 \Rightarrow \widehat{B} = 44$$

$$\triangle MNC : MC = NC \xrightarrow{\text{مساوی الساقین}} \widehat{N}_1 = \widehat{M}_2 = 70$$

$$\widehat{M}_2 + \widehat{N}_1 + \widehat{C} = 180 \Rightarrow 70 + 70 + \widehat{C} = 180 \Rightarrow \widehat{C} = 40$$

$$\triangle ABC : \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180 \Rightarrow \widehat{A} + 44 + 40 = 180 \Rightarrow \widehat{A} = 96$$

نکته: در این اشکال همواره $\widehat{A} + 2\widehat{M} = 180$ است.

$$\widehat{A} + 2(42) = 180 \Rightarrow \widehat{A} = 180 - 84 = 96$$

آسان

۱۱- گزینه «۲»

اگر اندازه محیط مثلثی به اضلاع $a \geq b \geq c$ برابر $2P$ باشد اندازه ضلع بزرگ آن $a < P \leq \frac{2P}{3}$ است.

$$\frac{2P}{3} \leq a < P \Rightarrow \frac{17}{3} \leq a < \frac{17}{2} \Rightarrow 5.66 \leq a < 8.5$$

آسان

۱۲- گزینه «۳»

همواره اندازه هر میانه از قدرمطلق تفاضل طول دو میانه دیگر بزرگ‌تر و از مجموع دو میانه دیگر کوچک‌تر است.

$$|m_c - m_b| < m_a < m_c + m_b \Rightarrow 4 < m_a < 16$$

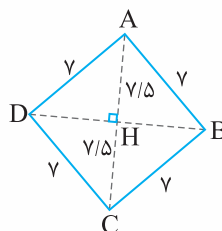
آسان

۱۳- گزینه «۱»

می‌دانیم قطرهای لوزی عمودمتصف هم هستند پس در صورت وجود لوزی

$$ABCD, \text{ در مثلث قائم‌الزاویه } AHD, AH = HC = \frac{AC}{2} = 7/5$$

وتر مثلث است پس باید بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد ولی $AH > AD$ است و این نشدنی است. بنابراین چنین لوزی وجود ندارد.



۳- گزینه «۱»

می‌دانیم طول هر ضلع حتماً بزرگ‌تر از صفر است و در مثلث، مجموع هر دو ضلع حتماً از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

$$6x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7 \quad 4x - 4 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$6x + x + 7 > 4x - 4 \Rightarrow 3x > -11 \Rightarrow x > -\frac{11}{3}$$

$$6x + 4x - 4 > x + 7 \Rightarrow 9x > 11 \Rightarrow x > \frac{11}{9}$$

$$4x - 4 + x + 7 > 6x \Rightarrow -x > -3 \Rightarrow x < 3$$

$$\frac{11}{9} < x < 3 \quad \text{پس:}$$

۴- گزینه «۲»

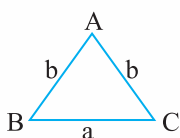
فرض کنیم اندازه قاعده مثلث a و اندازه ساق‌ها b باشد، a می‌تواند تا هر چقدر می‌خواهد کوچک شود و هیچ کران پایینی تا صفر ندارد پس $a > 0$

$$2P = 60 \Rightarrow a + b + b = 60 \Rightarrow 2b = 60 - a$$

می‌دانیم مجموع هر دو ضلع در مثلث از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

$$b + b > a \Rightarrow 2b > a \Rightarrow 60 - a > a \Rightarrow -2a > -60 \Rightarrow a < 30$$

پس $0 < a < 30$ یعنی قاعده مثلث‌های متساوی‌الساقین بین صفر و نصف محیط هستند.



۵- گزینه «۴»

A را به M وصل می‌کنیم

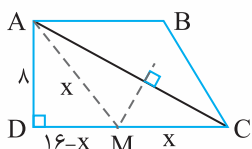
$$AC \text{ روی عمودمنصف } M \Rightarrow MA = MC = x$$

$$\Rightarrow DM = 16 - x$$

$$\triangle ADM: AM^2 = AD^2 + DM^2 \Rightarrow x^2 = 64 + (16 - x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 64 + 256 - 32x + x^2$$

$$\Rightarrow 32x = 320 \Rightarrow x = 10$$



۶- گزینه «۳»

M را به A وصل می‌کنیم.

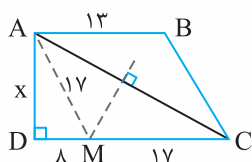
$$AC \text{ روی عمودمنصف } M \Rightarrow MA = MC = 17$$

$$\triangle ADM: AM^2 = DM^2 + AD^2 \Rightarrow 289 = 64 + AD^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 225 \Rightarrow AD = 15$$

$$S = \frac{AB + DC}{2} \times AD = \frac{12 + 25}{2} \times 15$$

$$= 19 \times 15 = 285$$



مکوسط

۱۹- گزینه «۳»

$CB = CD$ $\xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}}$ BD است روی عمودمنصف

دشوار

۲۰- گزینه «۳»

$\hat{A} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ زاویه بین نیمساز داخلی B و C

$$\Rightarrow 130^\circ = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \hat{A} = 80^\circ$$

$\hat{B} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$ زاویه بین نیمساز خارجی A و B

$$\Rightarrow 70^\circ = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 80^\circ + \hat{B} + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$



۱- گزینه «۲»

باید دایره‌ها به مراکز A و B و شعاع‌های گفته شده در مسئله مماس داخل یا مماس خارج باشند.

$$AB = R_A + R_B \Rightarrow 4a + 1 = 2a - 1 + a + 3 \Rightarrow a = 1$$

$$AB = |R_A - R_B| \Rightarrow 4a + 1 = |2a - 1 - a - 3| \Rightarrow 4a + 1 = |a - 4|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 1 = a - 4 \Rightarrow a = -\frac{5}{3} \text{ غلط} \\ 4a + 1 = -a + 4 \Rightarrow a = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

۲- گزینه «۳»

باید دایره‌ها به مراکز A و B و شعاع‌های گفته شده در مسئله متخارج یا متداخل باشند.

$$AB > R_A + R_B \Rightarrow 5a + 1 > 3a + a + 3 \Rightarrow a > 2$$

$$AB < |R_A - R_B| \Rightarrow 5a + 1 < |3a - a - 3|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a + 1 < 2a - 3 \Rightarrow 3a < -4 \Rightarrow a < -\frac{4}{3} \\ 5a + 1 > -2a + 3 \Rightarrow 7a > 2 \Rightarrow a > \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$AB > 0 \Rightarrow 5a + 1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{5}$$

$$R_B > 0 \Rightarrow a + 3 > 0 \Rightarrow a > -3$$

$$R_A > 0 \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow a > 0$$

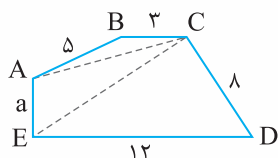
پس باید $a > 2$ و $a \in \mathbb{N}$ باشد پس عدد a دو مقدار طبیعی ۱ و ۲ نمی‌تواند باشد.

۱۱- گزینه «۳»

قطرهای AC و CE را رسم می‌کنیم

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: |AB - BC| < AC < AB + BC \Rightarrow 2 < AC < 8 \\ \triangle CED: |ED - DC| < EC < ED + DC \Rightarrow 4 < CE < 20 \end{array} \right\}$$

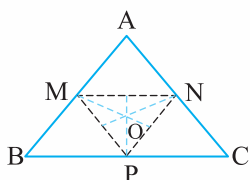
$$\xrightarrow{\oplus} 6 < AC + CE < 28$$



۱۲- گزینه «۱»

اگر M و N و P وسط اضلاع باشند حتماً $MN \parallel BC, NP \parallel AB, MP \parallel AC$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC, OP \perp MN \Rightarrow OP \perp BC \\ BP = PC \end{array} \right\} \Rightarrow OP \text{ عمودمنصف } BC$$



به طریق مشابهی ثابت می‌شود OM عمودمنصف AB و ON عمودمنصف AC

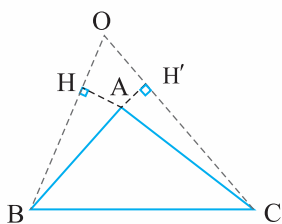
AC است پس نقطه O محل هم‌رسی عمودمنصف‌های ABC است.

۱۳- گزینه «۳»

همان‌طور که در شکل مشخص است ارتفاع‌های CH و BH' در مثلث

OBC در نقطه A همدیگر را قطع کرده‌اند پس A محل تلاقی ارتفاع‌ها در

مثلث OBC است.



۱۴- گزینه «۱»

$$\left. \begin{array}{l} AC > AB \xrightarrow{\text{ضلع برتر}} \widehat{B} > \widehat{C} \\ 2\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه برتر}} AC > BC > AB \Rightarrow 10 > a > 8$$

پس چون $a \in \mathbb{Z}$ است فقط می‌تواند عدد ۹ باشد.

۷- گزینه «۱»

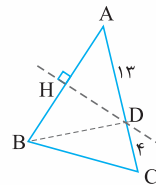
D را به B وصل می‌کنیم

$$AB \text{ روی عمودمنصف } AD \Rightarrow AD = BD = 13$$

$$BD - DC < BC < BD + DC \Rightarrow 9 < BC < 17$$

$$\Rightarrow 9 + \frac{DC + BD}{17} < BC + DC + BD < 17 + \frac{DC + BD}{17} \Rightarrow 26 < \text{محیط}$$

برای محیط $(1 + 27 + 33)$ حالت (۷) وجود دارد.



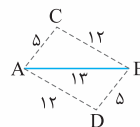
۸- گزینه «۱»

در هر دو مثلث ABD و ACB داریم:

$$13^2 = 5^2 + 12^2$$

پس رئوس C و D قائمه هستند بنابراین چهارضلعی ACBD مستطیل است و

در مستطیل قطرها با هم برابرند پس $DC = AB = 13$



۹- گزینه «۲»

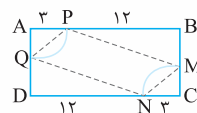
$$\triangle APQ: PQ^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow PQ = 3\sqrt{2}$$

به طریق مشابه در مثلث MNC داریم $MN = 3\sqrt{2}$

$$\triangle PBM: PM^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow PM = 13$$

به طریق مشابه در مثلث DQN داریم $QN = 13$ پس اضلاع روبه‌رو

چهارضلعی PMNQ دایره‌دو با هم برابر هستند پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



۱۰- گزینه «۲»

از A به C وصل می‌کنیم.

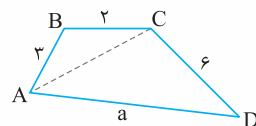
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: AC < AB + BC \\ \triangle ACD: a < AC + DC \end{array} \right\} \Rightarrow a < AB + BC + DC \Rightarrow a < 3 + 2 + 6 \Rightarrow a < 11$$

$$\triangle ACD: a > |AC - DC| \Rightarrow a > |AC - 6| \quad (1)$$

$$\triangle ABC: |AB - BC| < AC < AB + BC \Rightarrow 1 < AC < 5 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1), (2), AC = 1 \Rightarrow a > 5 \\ (1), (2), AC = 5 \Rightarrow a > 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} a > 5$$

پس $5 < a < 11$



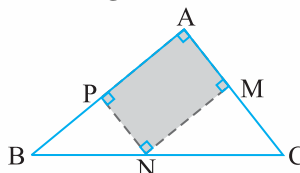
۱۵- گزینه «۲»

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 625 = 576 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 49 \Rightarrow AC = 7$
چون $NM \parallel AB$ و $NP \parallel AC$ است و N روی ضلع BC است پس:

(ضلع بزرگتر) $AC < MN + NP < AB$ (ضلع کوچکتر)

$$\Rightarrow 7 < MN + NP < 24 \xrightarrow{\times 2} 14 < \text{محیط مستطیل} < 48$$

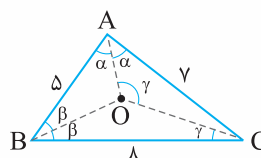
$$35 = 47 - 13 + 1 = \text{تعداد اعداد صحیح برای محیط}$$



۱۶- گزینه «۲»

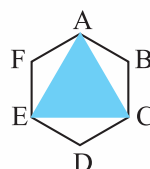
$$BC > AC > AB \xrightarrow{\text{ضلع برتر}} \hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow 2\alpha > 2\beta > 2\gamma \Rightarrow \alpha > \beta > \gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAB: \alpha > \beta \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} OB > OA \\ \triangle OBC: \beta > \gamma \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} OC > OB \end{array} \right\} \Rightarrow OC > OB > OA$$

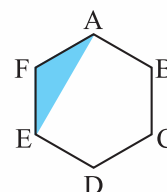


نکته: هر چه یک ضلع کوچکتر باشد، پاره‌خطی که از محل تلاقی نیمسازها به رأس مقابل آن وصل می‌شود، بزرگتر است.

۱۷- گزینه «۲»



AEC - BDF



FAE - AFB - BAC - CBD - DCE - EDF

۱۸- گزینه «۳»

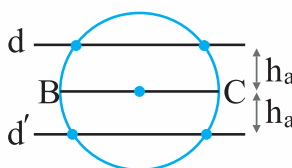
به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

(آ) می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس به مرکز O (وسط وتر BC)

و به شعاع $\frac{BC}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مکان هندسی نقاطی که از پاره‌خط BC

به فاصله $h_a = AH$ باشد دو خط d و d' موازی BC و به فاصله h_a است.

محل برخورد این خطوط با دایره رأس سوم مثلث است.



(ب) ارتفاع BH' همان ضلع AB است و چون دو ضلع AB و BC را در

مثلث قائم‌الزاویه داریم بنا به فیثاغورس $(BC^2 = AB^2 + AC^2)$ ضلع سوم

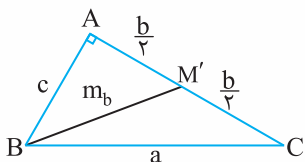
مثلث هم مشخص می‌شود و با داشتن ۳ ضلع مثلث قابل رسم است.

(پ) مثلث قابل رسم نیست.

(ت) فرض کنیم مثلث شکل مقابل جواب مسئله باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 \text{ معلوم} \\ \triangle ABM': c^2 + \frac{b^2}{4} = m_b^2 \Rightarrow c^2 + \frac{b^2}{4} \text{ معلوم} \end{array} \right\} \Rightarrow b, c \text{ معلوم}$$

پس مثلث با داشتن ۳ ضلع قابل رسم است.



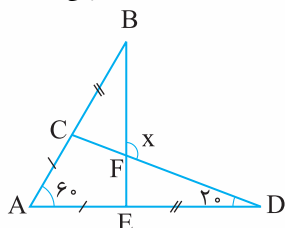
۱۹- گزینه «۱»

$$\left. \begin{array}{l} AE = AC \\ ED = CB \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} AE + ED = AC + CB \Rightarrow AD = AB$$

$$\left. \begin{array}{l} AD = AB \text{ اثبات بالا} \\ \hat{A} = \hat{A} \text{ مشترک} \\ AC = AE \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \triangle ACD \cong \triangle AEB \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} = 20^\circ$$

$$\triangle ABE: \hat{FED} = \hat{A} + \hat{B} = 60 + 20 = 80$$

$$\triangle FED: \hat{x} = \hat{FED} + \hat{D} = 80 + 20 = 100$$



۲۰- گزینه «۲»

از D به اضلاع AB و AC عمود رسم می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} D \text{ روی نیمساز } A \Rightarrow DQ = DP \\ D \text{ روی نیمساز } C \Rightarrow DP = DH \end{array} \right\} \Rightarrow DQ = DP = DH$$

می‌دانیم نیمساز داخلی B با نیمسازهای خارجی A و C هم‌رس هستند پس D روی نیمساز B هم می‌باشد.

$$\left. \begin{array}{l} BD = BD \text{ مشترک (وتر)} \\ DQ = DH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle BDQ \cong \triangle BDH \xrightarrow{\text{م.ا}} DQ = DH$$

$$BQ = BH \Rightarrow AB + AQ = BC + CH \Rightarrow 9 + AQ = 8 + 4 \Rightarrow AQ = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} DA = DA \text{ مشترک (وتر)} \\ DP = DQ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle QAD \cong \triangle DAP \xrightarrow{\text{م.ا}} AQ = AP = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} DC = DC \text{ مشترک (وتر)} \\ DP = DH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle DPC \cong \triangle DCH \xrightarrow{\text{م.ا}} PC = CH = 4$$

$$AC = AP + PC = 3 + 4 = 7$$

