



هندسه ۱



چند ضلعی

صفحه	فهرست مطالب
۵۷	■ چند ضلعی
۶۰	■ چهار ضلعی‌های مهم
۷۴	■ مساحت و کاربرد
۸۳	■ نقاط شبکه‌ای و مساحت





چند ضلعی

در این بخش به معرفی چندضلعی و برخی مفاهیم مربوط به آن پرداخته شده است. در بخش‌های بعدی، چند ضلعی‌های مهم به صورت دقیق معرفی شده و برخی محاسبات مربوط به آن‌ها را خواهیم دید.

چند ضلعی: هر چندضلعی شکلی است متشکل از لایه‌ها سه پاره‌خط با این شرایط که:

- هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خود قطع می‌کند.
- هر دو پاره‌خطی که نقطه‌ی مشترک دارند، در یک امتداد نباشند.

نمونه‌هایی ببینید:

توجه کنید: در هر چند ضلعی:

- به پاره خط‌هایی که آن را تشکیل داده‌اند، «ضلع» گفته می‌شود.
- هر دو ضلع کناری، در یک نقطه مشترک هستند که به آن «رأس» گویند.
- اگر تعداد ضلع‌ها برابر n باشد، به آن شکل n ضلعی گوئیم.

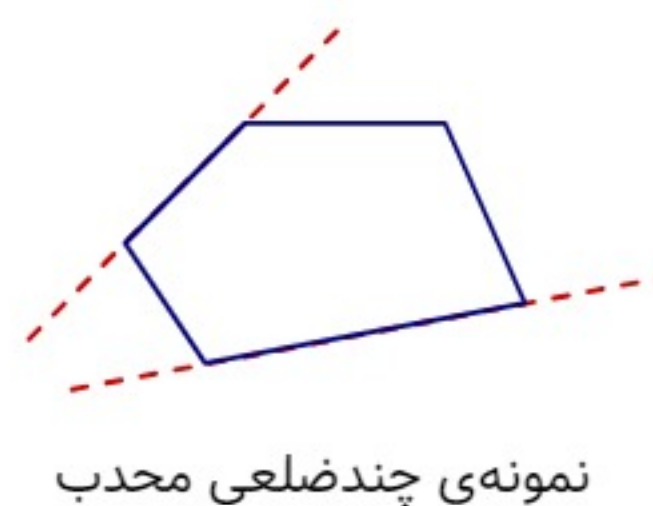
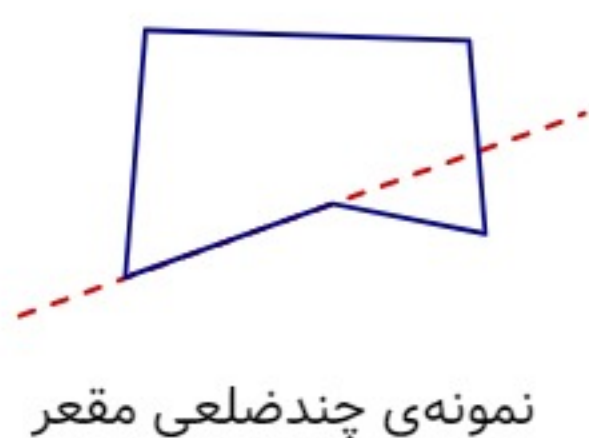
چند ضلعی‌ها را بر حسب یک خاصیت مهم می‌توان به دو نوع کلی تقسیم کرد:

چند ضلعی محدب:

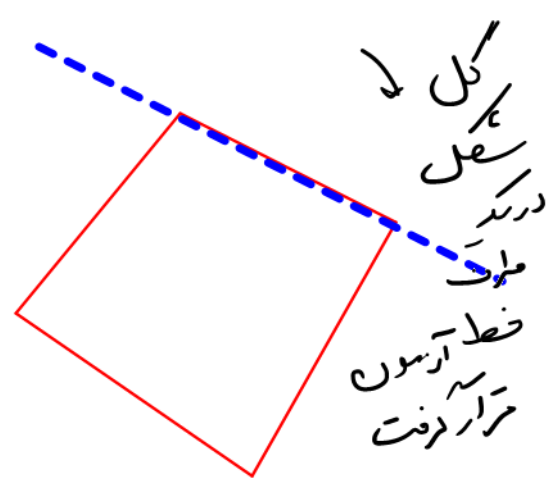
یک چندضلعی را «محدب» گوئیم، هرگاه:

اگر از هر ضلع آن خطی عبور دهیم، سایر نقاط شکل در یک سمت آن خط واقع شوند!

در غیر این صورت، به آن «مقعّر» گفته می‌شود.

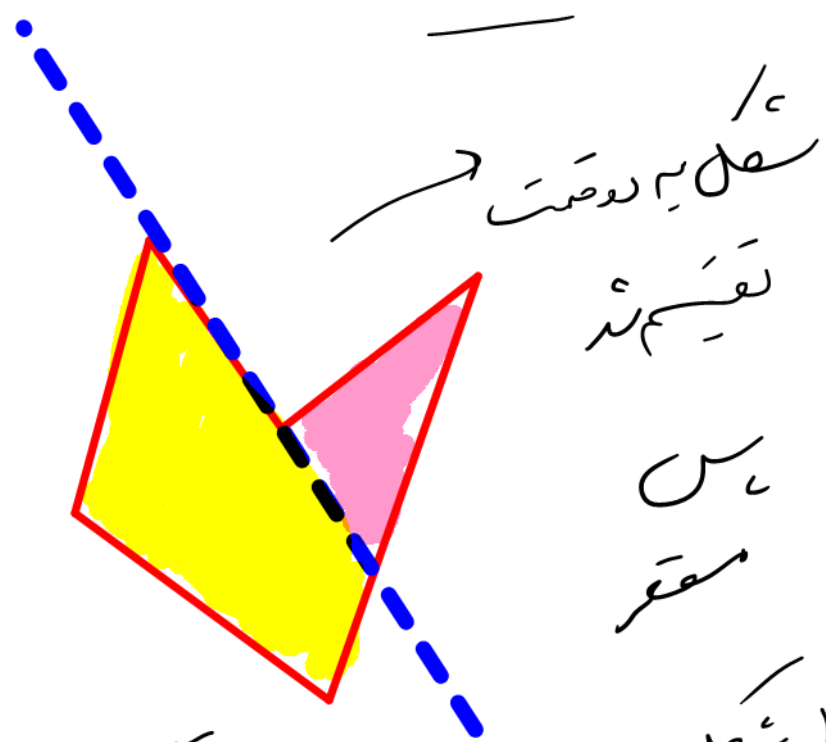


محدب
مقعّر
مختلط



محدب:
خط آزمون

محدب

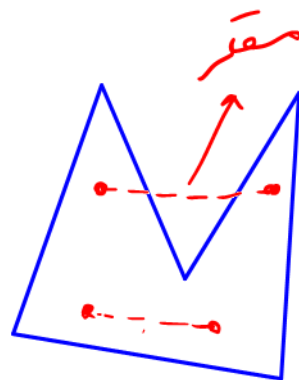
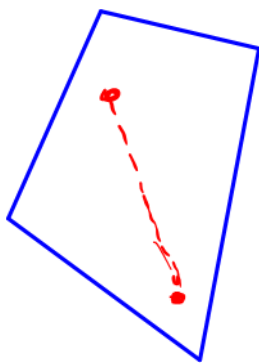
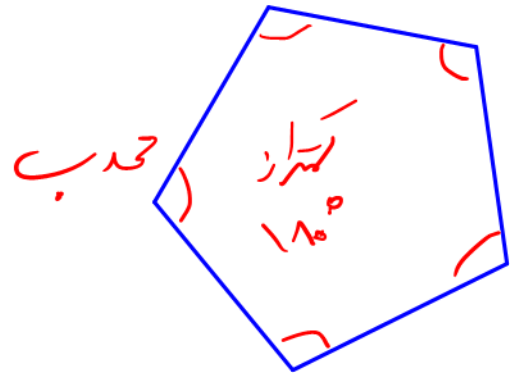
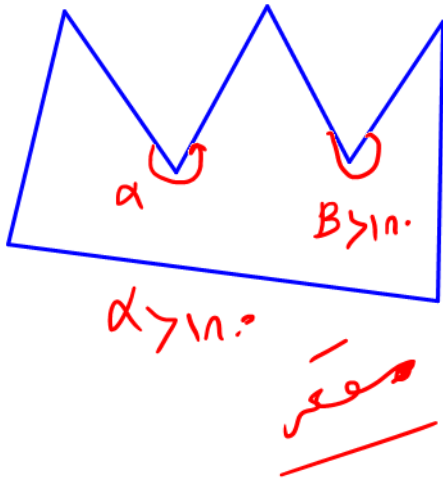


(شکل دو دایره خط آزمون را گرفته است)

راه شناخت هم :

زاویه سبتر از 180° ← مقعر

و کمتر از 180° ← محدب



راه هم :

دو نقطه روی سطح

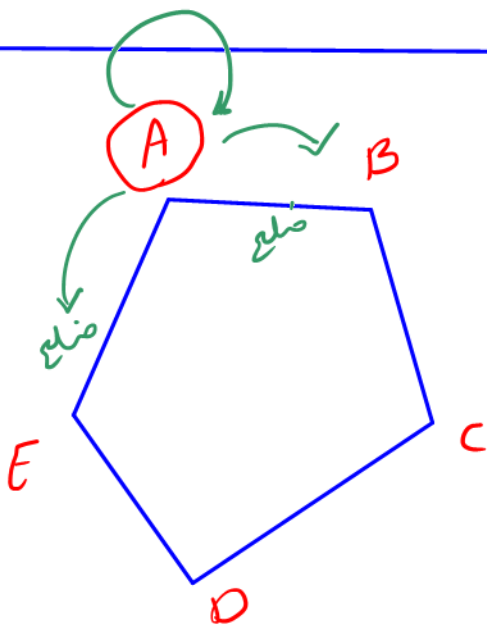
خطی منتهی الیه

مکمل و آن خط داخل

(داخل کننده) تماماً درون

سطح قرار بگیرد، آن محدب است

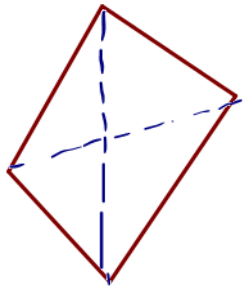
در غیر این صورت مقعر است.



از محل رأس ها
۳ تا کم می شه
- ۲ }
- ۱

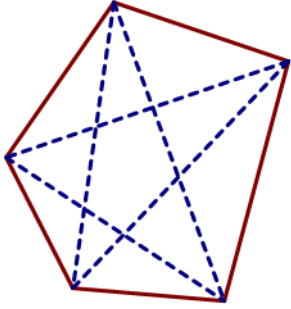
$(n - 3)$

اثبات استقراس:



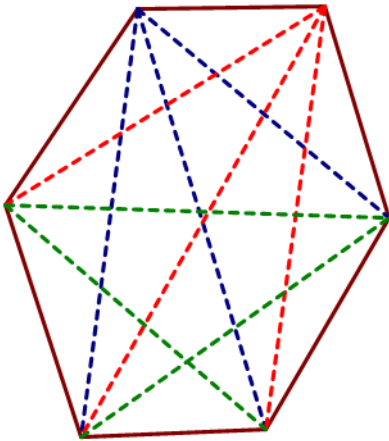
۴ ضلعی

$$\rightarrow ۲ \text{ قطر} = \frac{۴(۴-۳)}{۲} = ۲$$



۵ ضلعی

$$\rightarrow ۵ \text{ قطر} = \frac{۵(۵-۳)}{۲} = ۵$$



۶ ضلعی

$$\rightarrow ۹ \text{ قطر} \rightarrow \frac{۶(۶-۳)}{۲} = ۹$$

$$\rightarrow ۱۱ \text{ ضلعی} \rightarrow \frac{n(n-۳)}{۲}$$



حادث

توجه کنید:

ساخت

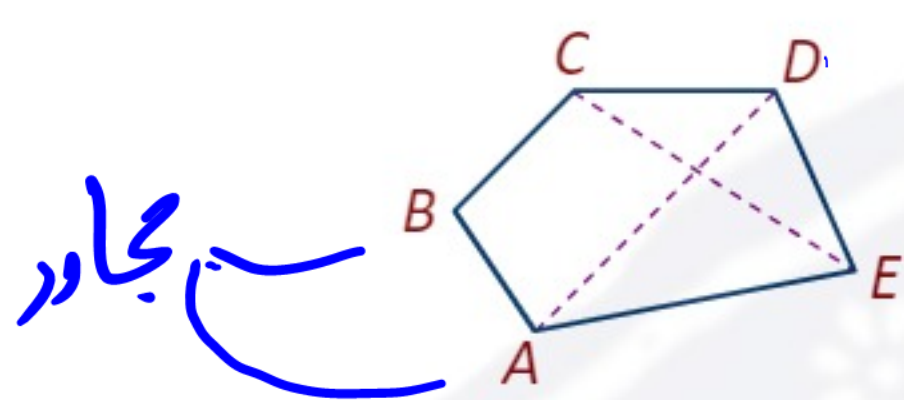
در چندضلعی محدب، تمام زوایای داخلی کوچک‌تر از 180° هستند؛ ولی در چندضلعی مقعر، لاقط یک زاویه‌ی بزرگ‌تر از 180° وجود دارد. بعلاوه:

تقریباً تمام مباحث ما از این پس مربوط به چند ضلعی‌های محدب خواهد بود.

بیان دقیق چند مفهوم ساده‌ی دیگر در مورد چندضلعی‌ها:

توجه کنید:

با توضیح روی نمونه‌ی مقابل، به مواردی ساده اشاره می‌شود:



- به هر دو رأسی که دو سر یک ضلع هستند، رأس‌های مجاور گوئیم. مانند C و D و همچنین E و A . سایر رأس‌ها غیر مجاور هستند؛ مانند B و E . بنابراین:

تعریف ضلع → هر ضلع دو رأس مجاور را به هم متصل کرده است.

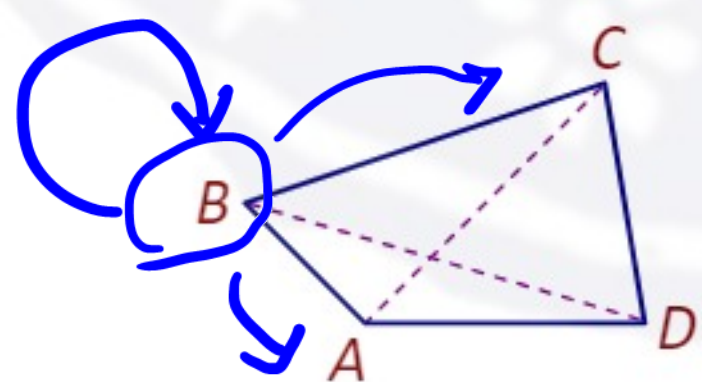
قطر:

- پاره‌خطی که دو رأس غیر مجاور را به هم متصل کند، یک قطر از چندضلعی است. مانند قطرها AD و CE که در شکل رسم شده است.

چون رأسی مشترک ندارند

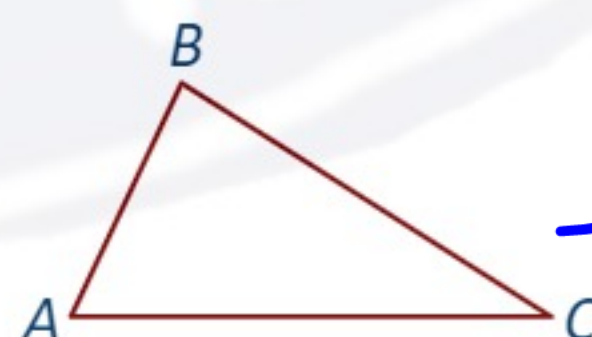
بعلاوه:

- مثلث یک سه‌ضلعی است که رأس‌های آن همگی مجاورند و بنابراین قطر ندارد.
- در چهارضلعی $ABCD$ فقط A و C و همچنین B و D رئوس غیر مجاورند و بنابراین این شکل تنها دو قطر AC و BD را دارد.



چهارضلعی دو قطر دارد.

BD
 DB



مثلث قطر ندارد.

رأس مجاور →

استثنای استثنای

مثال: با استدلال مناسب، فرمولی برای تعداد قطرها n ضلعی محدب به دست آورید.

پاسخ

استدلال استثنای: n ضلعی $\leftarrow n$ رأس

ستاره‌ها
مجاور
ستاره
خوشه

$\rightarrow -3$

$(n-3)$

س

از هر رأس $n-3$ تا قطر عبوری کند $\rightarrow$ پس: $(n-3)$



از هر رأس چند قطر عبور می کند: $n-3$

$$\frac{n(n-3)}{2} = \text{تعداد کل قطر ها}$$

دو بار قطر ها را
نیمه کنیم

نوبت شماست ...

پای تخته!



۱. در یک n ضلعی محدب، از هر رأس $n-3$ قطر عبور می کند. تعداد کل قطر ها را به دست آورید.

$$2n-11 = n-3 \rightarrow n = 11-3 \rightarrow n = 8$$

$$\text{تعداد کل قطر ها} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8 \times 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

جواب آخر: ۲۰

پاسخ دهید (۱)



۱- تعداد قطر های یک چند ضلعی محدب از تعداد اضلاع آن ۴۲ عدد بیشتر است. تعداد اضلاع و قطر ها را حساب کنید.

۲- در یک n ضلعی محدب، از هر رأس $4n-24$ قطر می گذرد. تعداد قطر های گذرنده از سه رأس مجاور را حساب کنید.

۳- تعداد قطر های گذرنده از دو رأس مجاور یک k ضلعی برابر ۳۸ است. تعداد قطر های چند ضلعی را بیابید.

منتخب کتاب:

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطر ها و ضلع ها برابر است؟