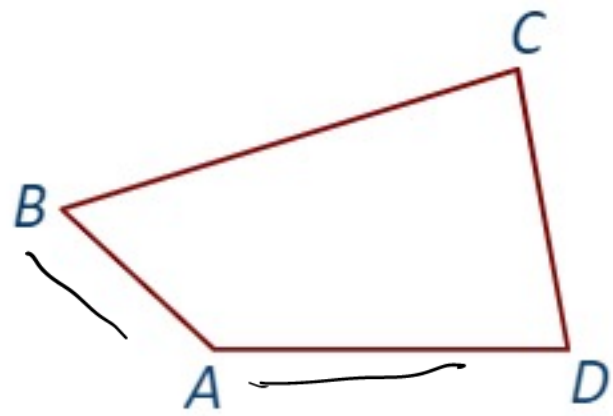




۲ چهار ضلعی‌های مهم



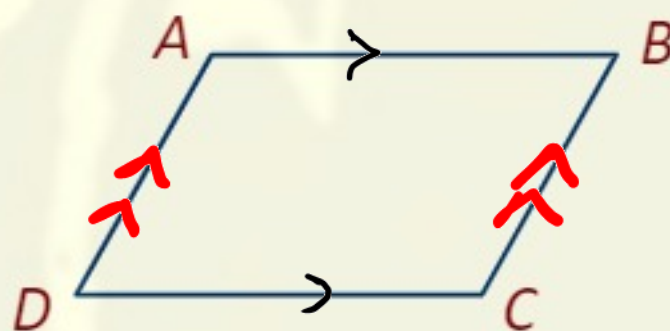
در این بخش چند چهارضلعی اصلی و خواص هر یک را به صورت دقیق مورد بررسی قرار می‌دهیم. در چهارضلعی $ABCD$ مقابل، به مفاهیم ساده‌ای توجه کنید:

- زوایایی که یک ضلع مشترک دارند؛ مانند $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و همچنین $\hat{C}$ و $\hat{D}$ را دو زاویه‌ی مجاور (کنار هم) گوئیم.
- زوایای دیگر مانند $\hat{A}$ و $\hat{C}$ مقابل (روبه‌روی) هم محسوب می‌شوند.
- اضلاعی که در یک رأس مشترک هستند، مانند AB و BC دو ضلع مجاور و اضلاعی چون AD و BC مقابل هم می‌باشند.

اکنون به معرفی یکی از مهم‌ترین چهارضلعی‌ها توجه کنید.

متوازی الاضلاع:

یک چهارضلعی که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی باشند، «متوازی الاضلاع» نامیده می‌شود. بنابراین در متوازی الاضلاع $ABCD$ داریم:



$$AD \parallel BC \quad \text{و} \quad AB \parallel DC$$

بیان و بررسی ویژگی‌هایی از متوازی الاضلاع:

👉 قضیه ۱:

در متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل برابرند. یعنی:

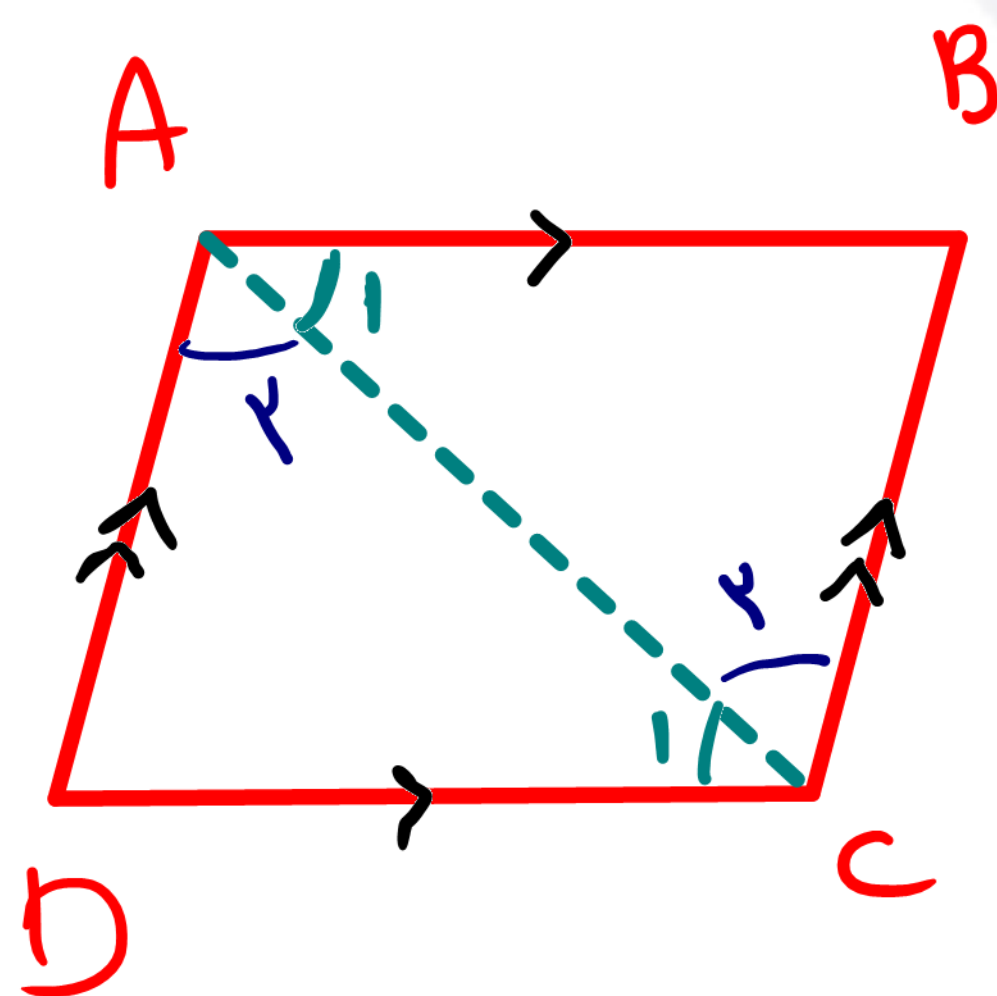
$$ABCD \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

$ABCD$ متوازی الاضلاع

الف	$AB = CD$, $AD = BC$
ب	

برهان ✓

خط AC را رسم می‌کنیم!



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AD \parallel BC, \text{ مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \\ AC = AC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{زنیاز} \\ \text{امریای} \\ \text{مستقرا} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \triangle ACD \cong \triangle ABC \\ AD = BC \\ AB = CD \end{array}$$

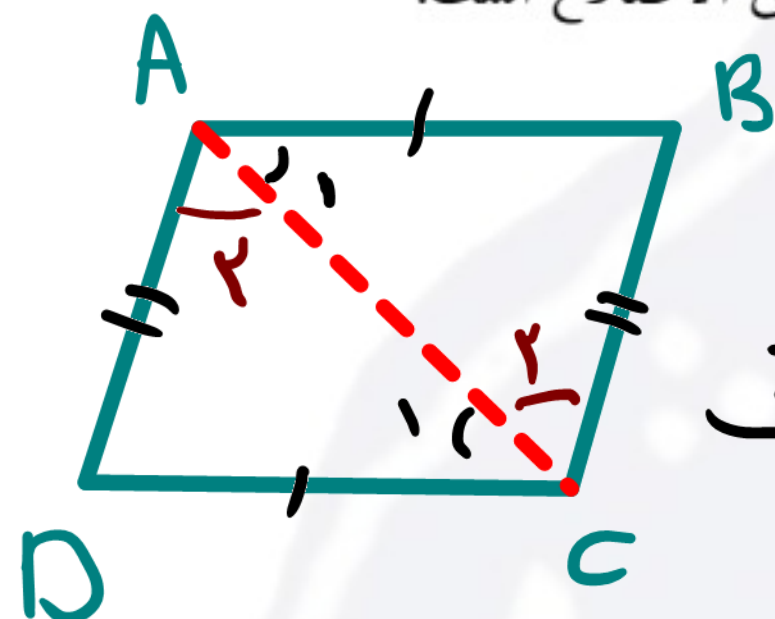


$$\begin{array}{c|c} \text{ف} & AB=CD \text{ و } AD=BC \\ \hline \text{ح} & \text{متوازی الاضلاع } ABCD \end{array}$$

عکس قضیه ی قبل نیز صحیح است:

پای تخته!

۲. نشان دهید: اگر در یک چهارضلعی، ضلع های مقابل دو به دو برابر باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



$$\left. \begin{array}{l} AB=CD \\ BC=AD \\ AC=AC \end{array} \right\} \text{مضامین}$$

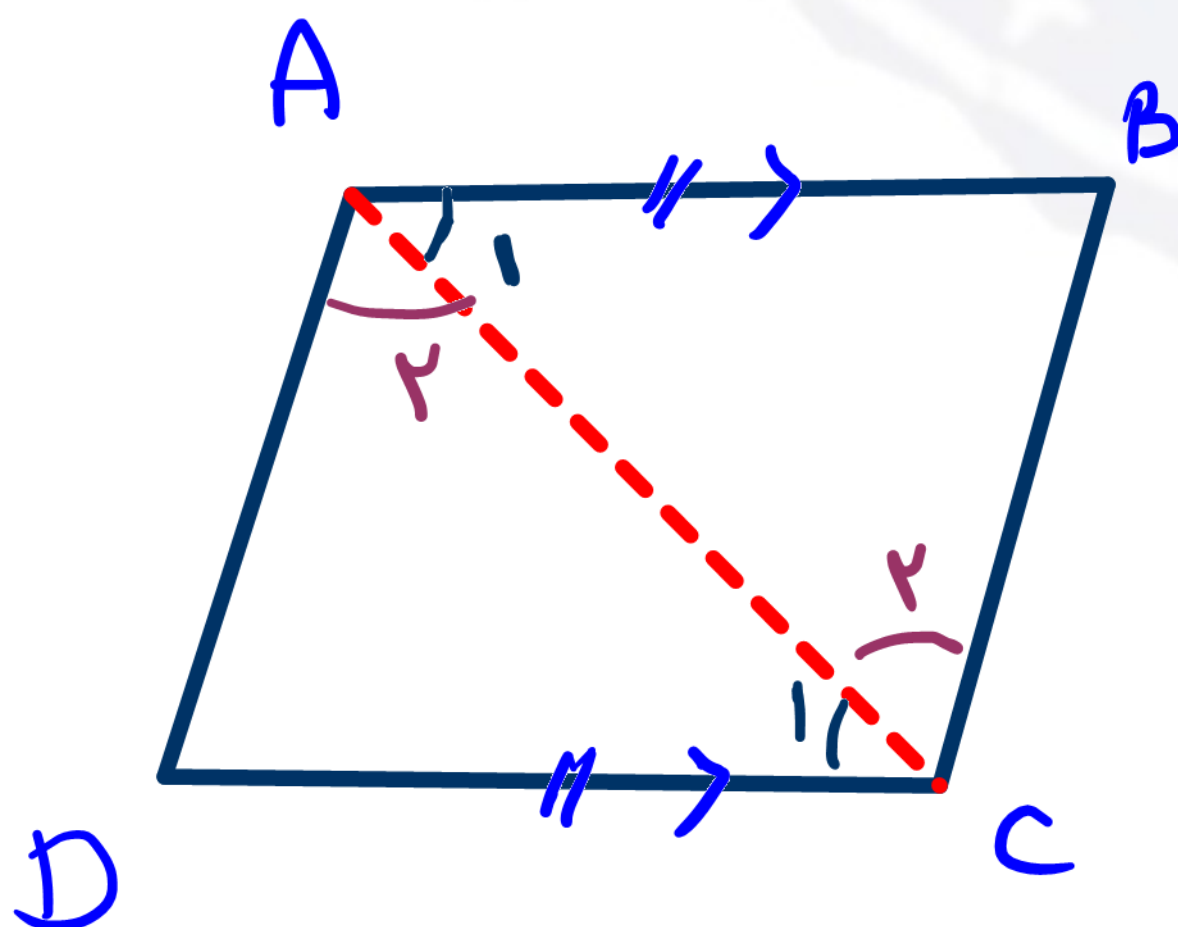
$$\begin{array}{l} \text{بسیار مهم می بینیم!} \\ \triangle ABE \cong \triangle CDE \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{array} \right. \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } ABCD \end{array}$$

نتیجه:

با توجه به دو مورد بالا، قضیه ی دو شرطی زیر صحیح می باشد:

چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و فقط اگر اضلاع مقابل آن دو به دو برابر باشند.

مثال: نشان دهید اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه رو هم مساوی و هم موازی باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



$$\begin{array}{c|c} \text{ف} & AB \parallel CD \\ \hline \text{ح} & \text{متوازی الاضلاع } ABCD \end{array}$$

پاسخ

متر AC را رسم می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, AC=CD \\ \triangle ABC \cong \triangle CDA \end{array} \right\} \text{فرضی}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA \rightarrow \hat{C}_2 = \hat{A}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } ABCD$$



قضیه ۲: فرض

در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، هر دو زاویه ی مجاور مکمل اند؛ یعنی:

حکم: $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ و $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ و ...

$AB \parallel CD$ و $B \leftarrow \hat{B}_1 = \hat{C}$ *

برهان

از فرض: $\hat{B} + \hat{B}_1 = 180^\circ \rightarrow B + C = 180^\circ$

نتیجه ی مشابه: $A + B = 180^\circ$ و ...

توجه!

اثبات قضیه (۲) بالا، یک سؤال (نهایی- فرداد ۱۴۰۳) بوده است.

قضیه ۳: فرض

در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، زوایای مقابل برابرند؛ یعنی:

حکم: $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$

می دانیم $\begin{cases} A + B = 180^\circ \\ A + D = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow$

برهان

$A + B = A + D \rightarrow \hat{B} = \hat{D}$

و به سبب مشابه: $\hat{A} = \hat{C}$

عکس هر یک از دو قضیه ی قبل نیز برقرار است:

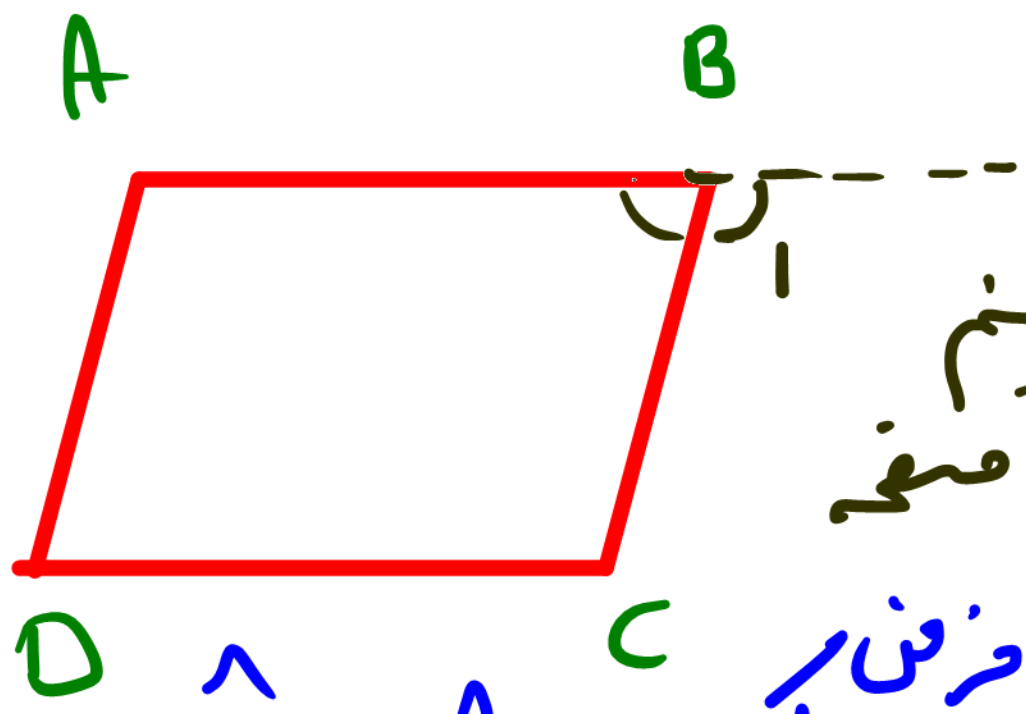
پای تخته!



۳. نشان دهید هر یک از دو مورد زیر صحیح هستند:

- الف) اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی برابر باشند، آن متوازی الاضلاع است.
- ب) اگر زوایای مجاور یک چهارضلعی مکمل باشند، آن متوازی الاضلاع است.

فرض: $B + C = 180^\circ$
برای حکم: $AB \parallel CD$

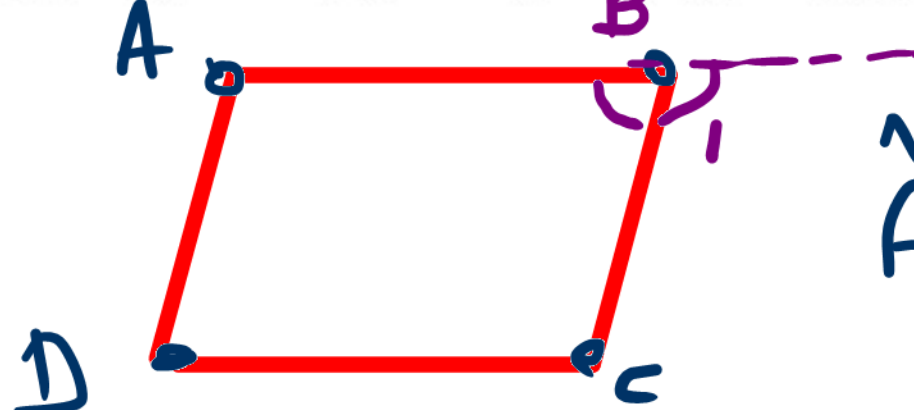


از فرض: $\hat{B} + \hat{B}_1 = 180^\circ$

فرض: $B + C = 180^\circ$
عکس: $AB \parallel CD$

خطوط متوازی و صورت

$AD \parallel BC$ به سبب



عکس ق ۲
عکس ق ۳
الف) $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D} \rightarrow ABCD$
متوازی الاضلاع

مجموع زوایا: $A + B + C + D = 360^\circ$
 $\rightarrow 2B + 2C = 360^\circ$
 $\rightarrow B + C = 180^\circ$
نتیجه ی مشابه: $B + B_1 = 180^\circ$

عکس: $AB \parallel CD$
خطوط متوازی

$AD \parallel BC$ به سبب

$AB \parallel CD$ متوازی الاضلاع

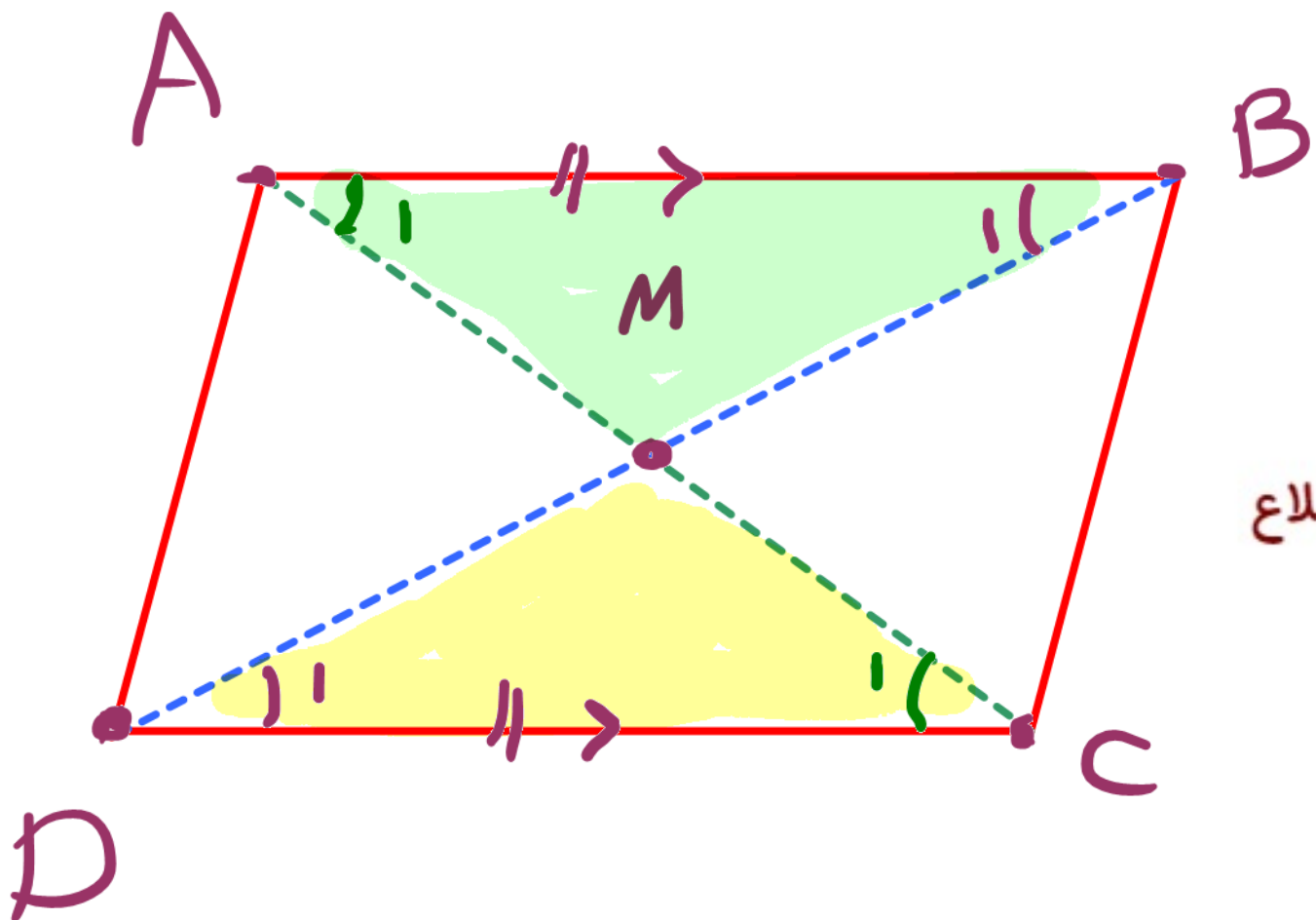


خاصیت مهم دیگری از متوازی‌الاضلاع:

قضیه ۴:

در متوازی‌الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند:

فرض $ABCD$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow$ **حکم** $\begin{cases} MA = MC \\ MB = MD \end{cases}$



$AB \parallel CD, BD \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (مقابل)

$AB = CD$

$AB \parallel CD, AC \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (مقابل)

برهان

فرض ز

$\triangle MAB \cong \triangle MCD$

$MA = MC$

$MB = MD$

درستی عکس قضیه‌ی قبل را نشان دهید:

پای تخته!

۴. اگر در یک چهارضلعی قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آن متوازی‌الاضلاع است.

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (مقابل)

فرض $MA = MC$

$MD = MB$

$\triangle MAB \cong \triangle MCD$

$\hat{B}_1 = \hat{D}_1$

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$

$AB = CD$

$AB \parallel CD$

نتیجه:

$AB \parallel CD$ متوازی‌الاضلاع

$AB \parallel CD$

با توجه به دو مورد بالا، قضیه‌ی دو شرطی زیر صحیح خواهد بود:

یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و فقط اگر قطرهای آن منصف یکدیگر باشند.

قضیه دو شرطی
برای رسم متوازی‌الاضلاع
فصل ۱ کتاب ریاضیات