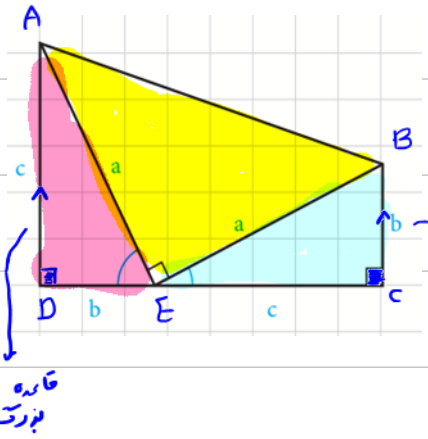
۵ــ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



قاعدهٔ کوچک

قاعدهٔ بزرگ

$$S_{ABCD} = S_{ADE} + S_{AEB} + S_{BCE}$$

مجموع دو قاعده ↓ ارتفاع

$$\frac{(b+c)}{2} \times \frac{(b+c)}{1} = \frac{b\times c}{2} + \frac{a\times a}{2} + \frac{b\times c}{2}$$

$$\frac{(b+c)^2}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{2} \quad \times 2$$

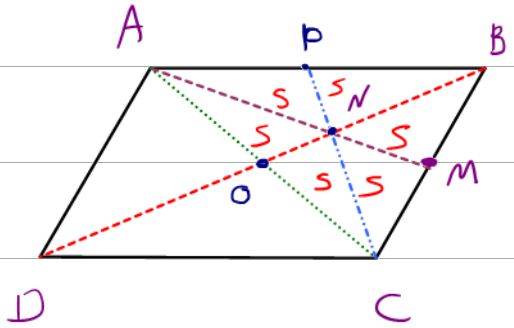
$$(b+c)^2 = 2bc + a^2 \rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 2bc + a^2$$

رابطهٔ فیثاغورس $b^2 + c^2 = a^2$

$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{\text{مجموع دو قاعده}}{2} \times \text{ارتفاع}$

۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید :

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$



اولاً M وسط BC ، پس AM میانه

دوماً چون قطرها منصف‌اند پس O وسط AC پس OB میانه $\triangle ABC$:

پس میانه سوم (CP) از M عبور می‌کند.

هر سه میانه مثلث را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

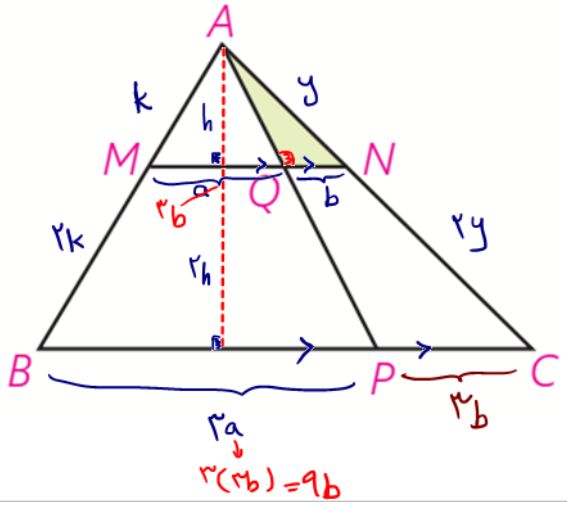
$$S_{MNB} = \frac{1}{6} S_{ABC}$$

از طرفی $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

$$S_{MNB} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} S_{ABCD}\right) = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$

اگر $S_{MNB} = S$ ، $S_{ABCD} = 12S$

۷ــ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



ذوزنقه MNCB

$\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}$

$\hat{APC}: \frac{y}{۳y}=\frac{b}{PC} \rightarrow PC=۳b$

$\hat{APB}: \frac{k}{۳k}=\frac{a}{PB} \rightarrow PB=۳a$

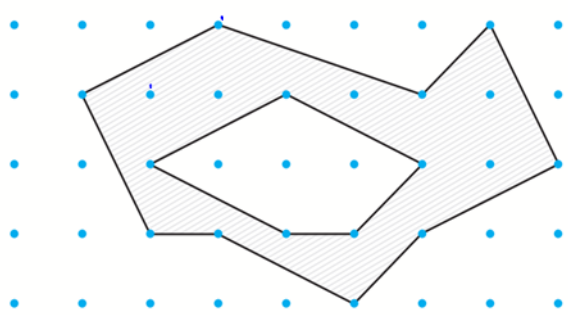
$\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳} \rightarrow \frac{۳b}{۳a}=\frac{۱}{۳} \rightarrow a=۳b$

$\frac{S_{AQN}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times h\times b}{\frac{۱}{۲}\times ۳h\times ۱۲b}=\frac{۱}{۳\times ۱۲}=\frac{۱}{۳۶}$

$\frac{S_{MQPB}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{(۳b+۹b)\times ۲h}{۲}}{\frac{۱}{۲}\times ۳h\times ۱۲b}=\frac{۱۲b\times ۲h}{۳h\times ۱۲b}=\frac{۲}{۳}$

$\frac{S_{MNCB}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{(۴b+۱۲b)\times ۲h}{۲}}{\frac{۱}{۲}\times ۳h\times ۱۲b}=\frac{۱۶b\times ۲h}{۳h\times ۱۲b}=\frac{۳۲}{۳۶}=\frac{۸}{۹}$

۸ــ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (راهنمایی: مساحت چند ضلعی داخلی را از مساحت چند ضلعی بیرونی کم کنید.)



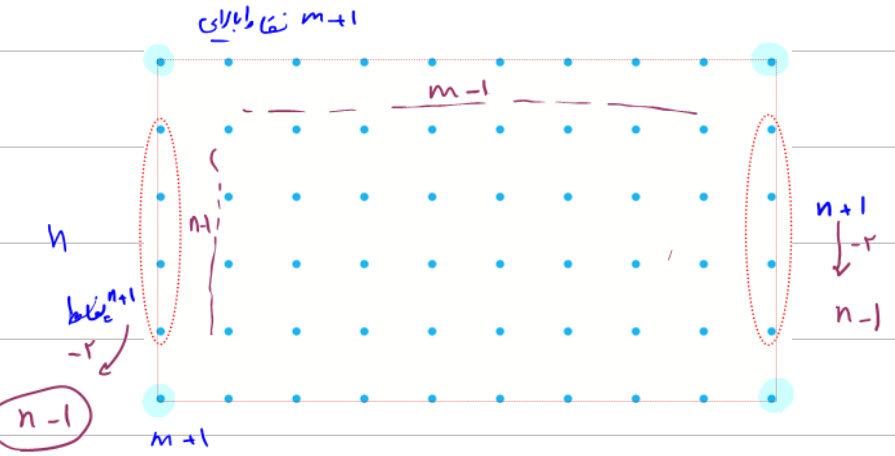
$S_{\text{بیرونی}}$ $\begin{cases} b=۹ \\ i=۱۳ \end{cases} \rightarrow S=\frac{b}{۲}-۱+i$

$=\frac{۹}{۲}-۱+۱۳=۱۴,۵$

$S_{\text{توخالی}}$ $\begin{cases} b=۵ \\ i=۳ \end{cases} \rightarrow S=\underbrace{\frac{۵}{۲}}_{۲,۵}-۱+۳=۴,۵$

$S_{\text{هاشور}}=۱۴,۵-۴,۵=۱۰$

۹ــ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.



$S = mn$

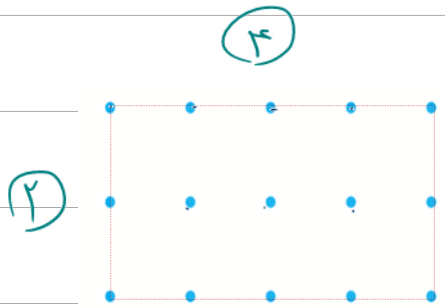
$b = 2(m+1) + 2(n-1) = 2m+2 + 2n-2 = 2m+2n$

$i = (m-1)(n-1)$

$S = \frac{b}{2} - 1 + i = \frac{2m+2n}{2} - 1 + ((m-1)(n-1))$

$\frac{2(m+n)}{2} - 1 + (mn - m - n + 1)$

$m+n-1+mn-m-n+1 = mn$



$S = \frac{b}{2} - 1 + i$

$S = \frac{12}{2} - 1 + 3 = 8$

$b = 2m+2n$

$= 2(4)+2(2) = 12$

$b = 12$

$i = (m-1)(n-1)$

$(4-1)(2-1) = 3 \times 1$

$S = 3+4+1$

۱۰ــ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

$S = 3 \rightarrow \frac{b}{2} - 1 + i = 3 \rightarrow \frac{b}{2} + i = 4$

b	i	S
۴	۲	۳
۶	۱	۳
۸	۰	۳

$\frac{3}{2} + i = 4 \quad i \neq 2.5$ ✗

$\frac{4}{2} + i = 4 \rightarrow i = 2$

$\frac{5}{2} + i = 4$ ✗

$\frac{6}{2} + i = 4 \rightarrow i = 1$

$\frac{7}{2} + i = 4 \rightarrow$ ✗

$\frac{8}{2} + i = 4 \rightarrow i = 0$