پاسخ‌نامه تشریحی

۱

$$A=B\to\begin{bmatrix}۲x & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳x & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{cases}۲x=۳\\ ۲x+y=۵\\ z=-۲\end{cases}\to\begin{cases}x=\dfrac{۳}{۲}\\ y=۲\end{cases}\to x+۲y+۳z=\dfrac{-۱}{۲}$$

۲

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۳\to x=\frac{۳}{۲}\\ ۲x+y=۵\to y=۲\to x+y+z=\frac{۳}{۲}\\ z=-۲\end{cases}$$

۳ ماتریس A به‌صورت روبه‌رو می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۴ & ۱\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۴ & ۸ & ۲\\ ۶ & ۱۲ & ۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & -۲\\ ۴ & ۵ & ۲\\ ۶ & ۱۲ & ۱۵\end{bmatrix}$$

۴

الف

$$a_{ij}=\frac{۲i}{j-۱}\Rightarrow a_{۳۲}=\frac{۲\times ۳}{۲-۱}=۶$$

۵

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

۶ الف) $۲x-۱=۵\to x=۳$

ب) ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$\begin{cases}m+۱=۰\\ ۲n+۴=۰\end{cases}\to\begin{cases}m=-۱\\ n=-۲\end{cases}$$

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$$

۷

$$a_{۳۳}=۲, a_{۳۱}=۳+۱=۴, a_{۱۲}=۱-۲=-۱$$

۸

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}x-۱=y+۱\\ x-۲=۸\\ z+۱=۴\end{cases}\to x=۱۰\ ,\ y=۸\ ,\ z=۳\ \Rightarrow x+y+z=۲۱$$

۹ .

الف

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۴ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۶\end{bmatrix}$$

۱۰

الف ماتریس

۱۱

الف ماتریس اسکالر

ب ندارد

۱۲

$$m-۲=۰ \to m=۲ \quad n=m=۲$$

۱۳ ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۲a-۸=۰ \Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰ \Rightarrow b=۳\end{cases}$$

۱۴

الف درست

۱۵

الف اسکالر

۱۶

برای آنکه ماتریس قطری باشد، باید:

الف

$$m-۱=۰\Rightarrow m=۱$$

۱۷ .

ماتریس همانی یک ماتریس مربعی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر با ۱ و بقیه درایه‌ها همگی صفر هستند.

الف

$$\begin{cases}r=۱\\ m-۱=۰\to m=۱\end{cases}\to m+r=۱+۱=۲$$

۱۸

الف قطری

۱۹

الف اسکالر

۲۰

$$x=۲\ ,\ y=-۱$$

۲۱

الف خیر ـ زیرا دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند.

۲۲

درست

الف

$$(A+I)^۲=A^۲+۲A+I\xlongequal{A^۲=A}I+۳A$$

۲۳ ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیرند، پس:

$$\begin{bmatrix}x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۴x+۳y & ۳x+۴y\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴x+۶ & ۴y-۳\\ ۳x+۸ & ۳y-۴\end{bmatrix}$$

$$۳x+۸=۵\to x=-۱ \quad , \quad ۳y-۴=۲\to y=۲$$

$$\begin{bmatrix}x & ۲ & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۲\\ -x\end{bmatrix}\xlongequal{x=-۱\ ,\ y=۲}\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=-۲+۴-۲=۰$$

۲۴ ضرب ماتریسی را از سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}۳x-۶ & -۶x+۱۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}=۰\to\begin{bmatrix}-۳x+۶-۶x+۱۲\end{bmatrix}=۰\to -۹x+۱۸=۰\to x=۲$$

۲۵

$$AB=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -۸+۲a=۰\to a=۴ \\ b-۳=۰\to b=۳ \end{cases}$$

۲۶

الف

نادرست زیرا:

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۲ & ۷ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۵ \\ ۱۶ & ۱۰ \end{bmatrix} \\ AC=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۷ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۵ \\ ۱۶ & ۱۰ \end{bmatrix} \end{array}\right\}\to AB=AC\ ,\ B\neq C$$

۲۷

الف

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۱۲ \\ ۱ & ۱۰ & ۱۱ \\ ۱۹ & ۵ & ۴۲ \end{bmatrix}\ ,A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}$$

۲۸

الف

نادرست

در حالت کلی ماتریس خاصیت جابه‌جایی ندارد. برای مثال $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{l} AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ BA=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}\right\}\Rightarrow AB\neq BA$$

ب

$|۲A|=(۲)^۳|A|\xlongequal{|A|=۲}۸\times ۲=۱۶$ درست

می‌دانیم: اگرماتریس A به‌صورت $n\times n$ باشد، داریم:

$$|kA|=k^n|A|$$

۲۹

$$\begin{bmatrix} x-۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases} x=-۱ \\ x=۳ \end{cases}$$

۳۰

$$(B^۲+۲I)=\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۶ \\ ۶ & ۱۰ & ۸ \\ ۷ & ۷ & ۱۸ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۶ \\ ۶ & ۱۲ & ۸ \\ ۷ & ۷ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

۳۱ دو ماتریس A و B را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه $AB=BA$.

$$(A-B)^۲=(A-B)(A-B)=A^۲-AB-BA+B^۲\overset{AB=BA}{=}A^۲-۲AB+B^۲$$

۳۲ الف)

$$A=\begin{bmatrix} ۳(۱)-۲(۱) & ۳(۱)-۲(۲) & ۳(۱)-۲(۳) \\ ۳(۲)-۲(۱) & ۳(۲)-۲(۲) & ۳(۲)-۲(۳) \\ ۳(۳)-۲(۱) & ۳(۳)-۲(۲) & ۳(۳)-۲(۳) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب)

$$B^۲=B\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱\times ۱+۲\times ۰+۰\times(-۱) & ۱\times ۲+۲\times ۱+۰\times ۲ & ۱\times ۰+۲\times ۳+۰\times ۱ \\ ۰\times ۱+۱\times ۰+۳\times(-۱) & ۰\times ۲+۱\times ۱+۳\times ۲ & ۰\times ۰+۱\times ۳+۳\times ۱ \\ -۱\times ۱+۲\times ۰+۱\times(-۱) & -۱\times ۲+۲\times ۱+۱\times ۲ & -۱\times ۰+۲\times ۳+۱\times ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

۳۳

$$\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases} \to \begin{cases} m=۲ \\ n=-۱ \end{cases}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

۳۴

$$\begin{bmatrix} ۲x & ۴x-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & y-۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \\ ۴x-۲=y-۲ \Rightarrow y=۸ \end{cases}$$

۳۵

$$\left.\begin{array}{l} A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۴ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix} \\ mA+nI=\begin{bmatrix} ۰ & ۴m \\ ۲m & m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n & ۰ \\ ۰ & n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & ۴m \\ ۲m & m+n \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow n=۸\ ,\ \ m=۱$$

۳۶

$$\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=۰=\begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x-۲۱ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow x=۷$$

۳۷

$$\begin{bmatrix} ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰ \to \begin{bmatrix} ۲+x & ۴+۲x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۲x+۴+۲x \end{bmatrix}=۰ \to x=-۲$$

۳۸ طبق فرض $A^{۲}-B=\overline{O}$ داریم:

$$A^{۲}=B \to \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=۵ \\ ۴a+b=۵ \end{cases} \to a=۰\ ,\ b=۵$$

۳۹

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}=-۲I$$

$$A^{۷}=(A^{۲})^{۳}\cdot A=(-۲I)^{۳}\cdot A=-۸\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴۰

الف ندارد

۴۱

نادرست

الف

مثال نقض : $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\overline{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$