پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴ کمیت‌های مقدار ماده و شدت روشنایی، کمیت‌هایی اصلی هستند که یکای آنها در SI به ترتیب عبارتند از : مول و کندلا (شمع).

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ ابعاد استوانهٔ B (یعنی شعاع مقطع و ارتفاع)، نصف ابعاد استوانه A است، پس سطح مقطع B، $\frac{۱}{۴}$ سطح مقطع A بوده و داریم: (فشار وارد بر کف ظرف به شکل ظرف و سطح مقطع آن بستگی ندارد.)

$$h_B = \frac{h_A}{۲}$$

$$r_B = \frac{r_A}{۲} \xrightarrow{A=\pi r^۲} A_B = \frac{A_A}{۴}$$

$$P = \rho g h \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho g\, h_A}{\rho g h_B} = \frac{h_A}{\frac{h_A}{۲}} = ۲$$

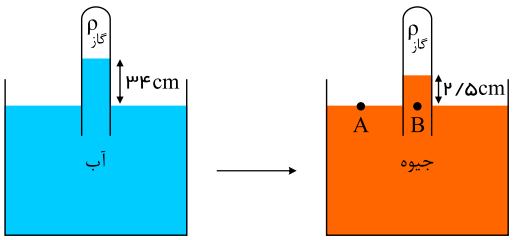
$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = PA \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{P_A A_A}{P_B A_B} = \frac{P_A}{P_B} \times \frac{A_A}{\frac{A_A}{۴}} = ۲ \times ۴ = ۸$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ در ابتدا ارتفاع ستون جیوه‌ای که فشاری معادل ستون ۳۴ سانتی‌متری آب ایجاد می‌کند را می‌یابیم.

$$h_{cmHg} = \frac{\rho h}{۱۳٫۶}$$

$$h_{cmHg} = \frac{۳۴}{۱۳٫۶} = ۲٫۵ cmHg$$

حال با توجه به نقاط هم‌تراز A و B داریم:



$$P_A = P_B \rightarrow P_{\circ} = h_{CmHg} + P_{\text{گاز}} \rightarrow P_{\circ} = ۲٫۵ + ۷۲ \rightarrow P_{\circ} = ۷۴٫۵ CmHg$$

$$P_{\text{گاز}} = P_{\text{هوا}\circ} + h_{CmHg}$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴ دو نقطهٔ هم‌تراز M و N در یک مایع (جیوه) را مشخص می‌کنیم و می‌دانیم، $P_M = P_N$، بنابراین داریم:

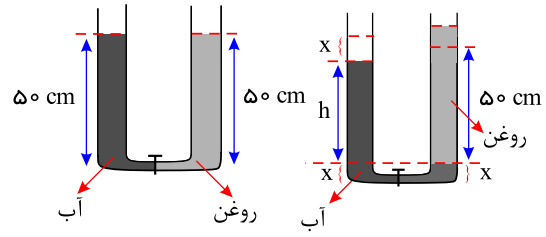
$$P_M = P_N \Rightarrow P_A + (\rho g h)_{\text{آب}} = (\rho g h)_{\text{جیوه}} + P_{\circ} \Rightarrow P_A + ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۰٫۲ = ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۰٫۵ + ۱۰^۵$$

$$\Rightarrow P_A + ۲ \times ۱۰^۳ = ۶۸ \times ۱۰^۳ + ۱۰^۵ \Rightarrow P_A + ۲ \times ۱۰^۳ = ۱۶۸ \times ۱۰^۳$$

$$\Rightarrow P_A = ۱۶۶ \times ۱۰^۳ \Rightarrow P_A = ۱۶۶ kPa$$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴ با باز شدن شیر ارتباط به دلیل اینکه چگالی آب بیشتر از چگالی نفت است، سطح آب در لولهٔ سمت چپ پایین‌تر از سطح نفت در لولهٔ سمت راست قرار می‌گیرد.

لذا با انتخاب سطح ترازی مناسب و با استفاده از اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، ارتفاع h را محاسبه می‌کنیم:

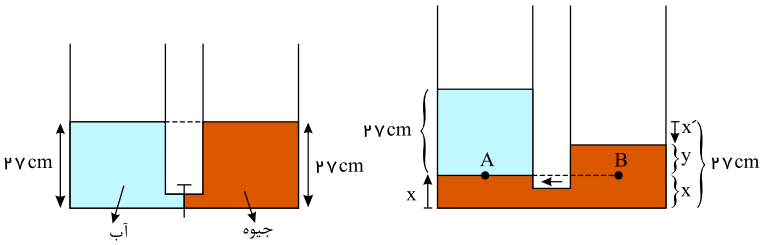


$$P_{\text{آب}} = P_{\text{روغن}}$$

$$\rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}} g h_{\text{روغن}} \rightarrow \rho_{\text{آب}} h_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}} h_{\text{روغن}}$$
$$\rightarrow ۱۰۰۰ \times h_{\text{آب}} = ۸۰۰ \times ۵۰ \rightarrow h_{\text{آب}} = ۴۰cm$$
$$h_{\text{آب}} + ۲x = ۵۰ \rightarrow ۴۰ + ۲x = ۵۰ \rightarrow x = ۵cm$$

بنابراین سطح آب در لولهٔ سمت چپ $۵cm$ پایین می‌آید.

۶ ۱ ۲ **۳** ۴ هنگامی که شیر رابط را باز کنیم، چون جیوه دارای چگالی بیشتری از آب است، جیوه جابه‌جا شده و مطابق شکل در زیر آب قرار می‌گیرد. حال اگر نقاط هم‌تراز با فشار یکسان A و B را معلوم کنیم، برای تعیین جابه‌جایی سطح جیوه یعنی x' داریم:



$$P_A = P_B \rightarrow (\rho h)_{\text{آب}} = (\rho y)_{\text{جیوه}} \rightarrow ۱ \times ۲۷cm = ۱۳٫۵y \rightarrow y = ۲cm$$

حال می‌دانیم که چون قطر لولهٔ رابط ناچیز فرض شده، مجموع ارتفاع ستون‌های آب و جیوه، باید برابر $۵۴cm$ باشد. بنابراین داریم:

$$۲۷ + x + x + y = ۵۴ \xrightarrow{y=۲cm} x = ۱۲٫۵cm$$

و درنهایت، در لولهٔ شامل ستون جیوه داریم:

$$x' = ۲۷ - (x + y) = ۲۷ - (۱۲٫۵ + ۲) \rightarrow x' = ۱۲٫۵cm$$

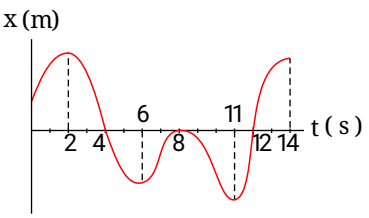
۷ **۱** ۲ ۳ ۴ با استفاده از معادلهٔ پیوستگی داریم: (D قطر مقطع لوله است)

$$v_A A_A = v_B A_B \xrightarrow{A=\frac{\pi D^۲}{۴}}$$
$$v_A D_A^۲ = v_B D_B^۲ \xrightarrow{D_A = ۲D_B} ۴v_A D_B^۲ = v_B D_B^۲ \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{۱}{۴}$$

۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{\text{تندی متوسط}}{\text{سرعت متوسط}} = \frac{\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان کل}}}{\frac{\text{اندازهٔ جابجایی کل}}{\text{زمان کل}}} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{اندازهٔ جابجایی کل}} = \frac{۳۰۰ + ۲۰۰}{۳۰۰ - ۲۰۰} = ۵$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴



باتوجه به نمودار مکان – زمان حرکت (شکل بالا)، جهت بردار مکان دو بار و در لحظه‌های $۴s$ و $۱۲s$ تغییر کرده است (x تغییر علامت داده است) و متحرک در بازه‌های زمانی $۲s < t < ۶s$ به مدت ۴ ثانیه و $۸s < t < ۱۱s$ به مدت ۳ ثانیه و در مجموع به مدت ۷ ثانیه در سوی منفی محور x حرکت کرده است.

پس پاسخ گزینهٔ ۱ است.

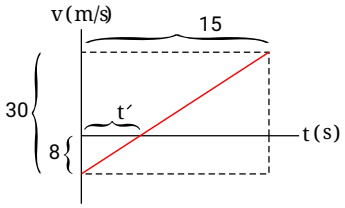
توجه: جهت بردار مکان در لحظه‌هایی تغییر می‌کند که متحرک از مبداء مکان عبور می‌کند و x تغییر علامت می‌دهد و در لحظه‌هایی که متحرک در مبداء مکان قرار می‌گیرد ولی از آن عبور نمی‌کند (مانند لحظهٔ $۸s$)، جهت بردار مکان تغییر نکرده است.

همچنین تغییر جهت بردار مکان مفهومی متفاوت نسبت به تغییر جهت حرکت است و نباید با آن اشتباه گرفته شود. در این حرکت جهت حرکت ۴ بار در لحظه‌های $۲s$، $۶s$، $۸s$ و $۱۱s$ تغییر کرده است.

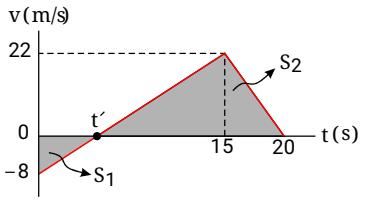
۱۰ ۱ ۲ ۳ **۴** در ابتدا لحظه تلاقی نمودار با محور زمان (t') که همان لحظهٔ تغییر جهت نیز هست را می‌یابیم.

توجه: برای یافتن t' چندین روش وجود دارد. مثلاً می‌توان از قضیهٔ تالس هم کمک گرفت (یا از شیب خط استفاده کرد.)

$$\frac{t'}{۱۵}=\frac{۸}{۳۰}\rightarrow \boxed{t'=۴s}$$



۷ قدرمطلق سطح زیر نمودار $v-t$، برابر مسافت پیموده شده است.



$$\frac{t'}{۸}=\frac{۱۵-t'}{۲۲}\Rightarrow t'=۴s$$

$$\left.\begin{array}{l}|S_۱|=\frac{۸\times۴}{۲}=۱۶\\ S_۲=\frac{۲۲\times(۲۰-۴)}{۲}=۱۷۶\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{مسافت کل}}۱۶+۱۷۶=۱۹۲m$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر سرعت اولیه را $v_۰$ و سرعت در نیمه مسیر را $v_۱$ و سرعت در انتهای مسیر را $v_۲$ فرض کنیم، می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(\frac{x}{۲})\Rightarrow v_۱^۲-۰=ax\\ v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(\frac{x}{۲})\Rightarrow ۱۲^۲-v_۱^۲=ax\end{array}\right\}\Rightarrow v_۱^۲=۱۲^۲-v_۱^۲$$

$$\Rightarrow ۲v_۱^۲=۱۲^۲\Rightarrow \sqrt{۲}v_۱=۱۲\Rightarrow v_۱=\frac{۱۲}{\sqrt{۲}}=۶\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ معادلهٔ مکان - زمان درجهٔ ۲ برحسب زمان است. بنابراین حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. (مشابه کتاب درسی از مشتق کمک نمی‌گیریم.)

$$\left.\begin{array}{l}x=۲t^۲+۴t-۸\\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{۲}=۲\rightarrow a=+۴\\ v_۰=+۴\end{array}\right.\rightarrow v=at+v_۰=۴t+۴$$

مشخص است که $v\neq ۰$ یعنی متحرک بر خط راست، بدون تغییر جهت است.

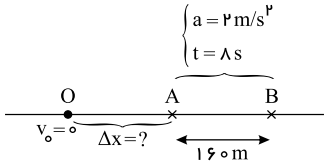
بنابراین: $\frac{L}{|\Delta x|}=۱$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

معادلهٔ مستقل از شتاب : $\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۰-۱۲=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۴\Rightarrow v_۰=-۶m/s$

با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t=۴$ است، سرعت در $t=۸s$، هم‌اندازهٔ سرعت در لحظهٔ صفر است، پس: $v=+۶m/s$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴ در ابتدا با توجه به معلوم بودن زمان جابه‌جایی، شتاب و مقدار جابه‌جایی AB، سرعت در نقطه A را می‌یابیم



$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_At\rightarrow ۱۶۰=(\frac{۱}{۲})(۲)(۸)^۲+V_A(۸)\rightarrow v_A=۱۲(\frac{m}{s})$$

حال با استفاده از معادلهٔ سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) بین دو نقطهٔ O و A داریم:

$$V_A^۲-V_۰^۲=۲a(\Delta x)\xrightarrow{V_۰=۰}(۱۲)^۲-۰=(۲)(۲)\Delta x\rightarrow \Delta x_{OA}=۳۶m$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ از روی ماتریس $A^۲$، ماتریس $A^۵$ را می‌یابیم:

$$A^۲=A-۲I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}A^۴=A^۲-۴A+۴I=(A-۲I)-۴A+۴I$$

$$\to A^۴ = -۳A + ۲I \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A} A^۵ = -۳A^۲ + ۲AI = -۳(A - ۲I) + ۲A$$

$$\to A^۵ = -۳A + ۶I + ۲A$$

$$\to A^۵ = -A + ۶I = \alpha A + \beta I \to \begin{cases} \alpha = -۱ \\ \beta = ۶ \end{cases} \to \alpha + \beta = ۵$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ دترمینان ماتریس $۲A$ را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|۲A| = \begin{vmatrix} |A| & -۲ \\ ۲ & |A| \end{vmatrix}$$

$$۲^۲ |A| = |A|^۲ + ۴ \to |A|^۲ - ۴|A| + ۴ = ۰ \to (|A| - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow |A| = ۲$$

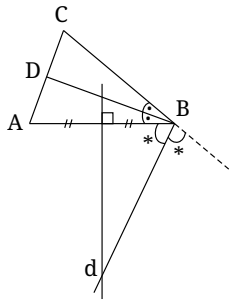
۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ (نکته) برای سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه P, N, M رابطهٔ $M^{-۱}N^{-۱}P^{-۱} = (PNM)^{-۱}$ برقرار است. طبق این نکته داریم:

$$A^{-۱}(B^{-۱} + A^{-۱})^{-۱}B^{-۱} = (B(B^{-۱} + A^{-۱})A)^{-۱}$$

$$= ((I + BA^{-۱})A)^{-۱} = (A + B)^{-۱} = \left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}\right)^{-۱}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱} = (۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۲}I$$

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴



نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمود منصف AB واقع‌اند.

همچنین نقاطی که از دو ضلع AB و BC و یا امتداد آنها به یک فاصله‌اند روی نیمساز داخلی یا خارجی زاویه‌ی B واقع‌اند.

محل تلاقی عمودمنصف AB و نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی B همواره دو نقطه است.

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی مثلث برابر ۱۸۰° است داریم:

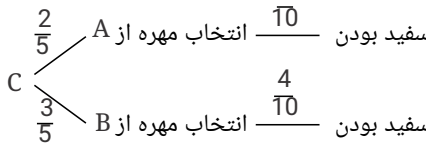
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \to ۲x + ۱۰^\circ + x + ۴۰^\circ + ۴x - ۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$
$$\to ۷x + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \to ۷x = ۱۴۰^\circ \to x = ۲۰^\circ$$
$$\to \hat{A} = ۵۰^\circ \text{ و } \hat{B} = ۶۰^\circ \text{ و } \hat{C} = ۷۰^\circ$$

چون $\hat{A} = ۵۰^\circ$ کوچک‌ترین زاویه است پس ضلع روبه‌رو به آن یعنی BC کوتاه‌ترین ضلع می‌باشد.

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

ظرف C شامل ۲ مهره از ظرف A و ۳ مهره از ظرف B است. پس مهرهٔ انتخابی از ظرف C، $\frac{۲}{۵}$ مربوط به ظرف A و $\frac{۳}{۵}$ مربوط به ظرف B است.

در این‌جور مسائل از آخر حل می‌کنیم:



$$P(\text{سفید}) = P(A) \times P(\text{سفید} \mid A) + P(B) \times P(\text{سفید} \mid B) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۵}{۱۰} + \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۱۰} = \frac{۱۱}{۲۵}$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g باهم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ دامنهٔ دو تابع داده شده برابر نیستند زیرا:

(گزینهٔ ۲) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g : x \geq ۰ \Rightarrow D_g = [۰, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

(گزینهٔ ۳) $D_f : x\,|x| \geq ۰ \xrightarrow{|x| \geq ۰} x \geq ۰ \Rightarrow D_f = [۰, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینهٔ ۴) $D_f : x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$, $D_g : x \geq ۰ \Rightarrow D_g = [۰, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

جواب گزینهٔ ۱ می‌باشد زیر:

$$f(x) = (\sqrt{x})^۲ \Rightarrow x \geq ۰ \Rightarrow D_f = [۰, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x\,|x|} \Rightarrow x\,|x| \geq ۰ \xrightarrow{|x| \geq ۰} x \geq ۰ \Rightarrow D_g = [۰, +\infty) \Rightarrow D_f = D_g = [۰, +\infty)$$

$$x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow g(x) = \sqrt{x\,|x|} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^۲} = (\sqrt{x})^۲ = f(x)$$

g و f برابرند.

۲۲) ۱ ۲ ۳ ۴ اگر نمودار تابع $y = f(۲x - ۱)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(۲(x + ۱) - ۱) = f(۲x + ۱)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(-۲x + ۱)$ به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم یعنی به جای x جملهٔ $\frac{۱}{۲}x$ قرار می‌دهیم. نمودار تابع $y = f(-x + ۱)$ به دست می‌آید.

۲۳) ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $y = f(x)$ را می‌یابیم:

$$-۱ \leq x \leq ۳ \rightarrow -۲ \leq ۲x \leq ۶ \rightarrow -۳ \leq ۲x - ۱ \leq ۵$$

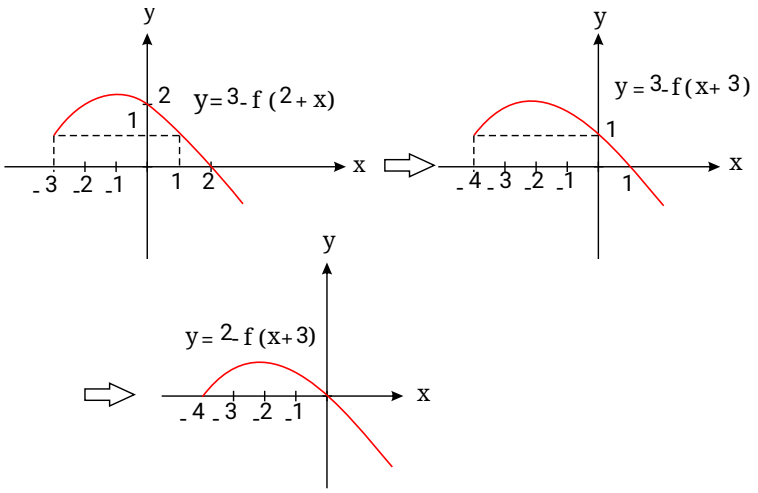
حال به کمک دامنهٔ تابع $y = f(x)$ به دامنهٔ $h(x) = f(۳x + ۲)$ می‌رسیم.

$$-۳ \leq ۳x + ۲ \leq ۵ \rightarrow -۵ \leq ۳x \leq ۳ \rightarrow -\frac{۵}{۳} \leq x \leq ۱$$

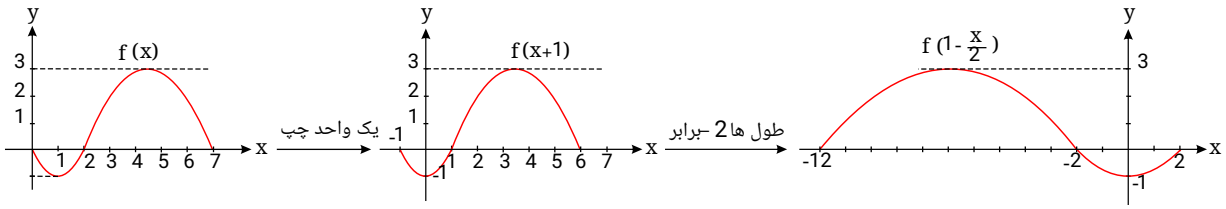
۲۴) ۱ ۲ ۳ ۴

$$y = ۳ - f(۲ - x) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y\text{ها}]{x \to -x} y = ۳ - f(۲ + x) \xrightarrow[۱ \text{ واحد انتقال به چپ}]{x \to x+۱} y = ۳ - f(۲ + x + ۱)$$

$$\Rightarrow y = ۳ - f(x + ۳) \xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}} y = ۲ - f(x + ۳)$$



۲۵) ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار $f(x + ۲)$ را دو واحد به راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



برای تعیین دامنهٔ $\sqrt{x f(۱ - \frac{x}{۲})}$ باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$x f(۱ - \frac{x}{۲}) \geq ۰$$

x	$-\infty$	-12	-2	0	2	$+\infty$
x		$-$	$-$	$+$		
$f(1-\frac{x}{2})$		$+$	$-$	$-$	$-$	
$xf(1-\frac{x}{2})$		$-$	$+$	$-$	$-$	

$\Rightarrow D_f=[-2,0]\cup\{-12,2\}$

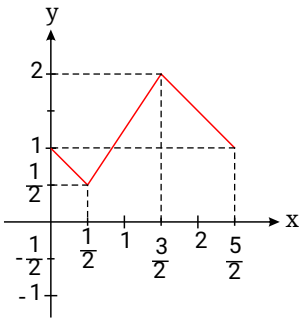
۲۶ ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به مراحل زیر داریم:

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{۳ واحد به چپ}]{x\to x+3}y_1=f(x+3)\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور }y\text{ها}]{x\to -x}y_2=f(-x+3)\xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب ۲}]{x\to 2x}y_3=f(-2x+3)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور }x\text{ ها}}y_4=-f(-2x+3)\xrightarrow[\text{انقباض عمودی با ضریب }\frac{1}{2}]{}y_5=-\frac{1}{2}f(-2x+3)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}}y_6=-\frac{1}{2}f(-2x+3)+1$$

با انجام مراحل بالا نمودار $y=-\frac{1}{2}f(-2x+3)+1$ به صورت زیر است.



۲۷ ۱ **۲** ۳ ۴

تابع $f(x)$ چهار واحد به راست برده شده، سپس طول نقاطش نصف شده است و سپس عرض‌ها -2 برابر شده است و درنهایت شکل سه واحد به بالا برده شده است.

$$A\begin{vmatrix}3\\-6\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{چهار واحد راست}}\begin{vmatrix}7\\-6\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{طول نصف}}\begin{vmatrix}\frac{7}{2}\\-6\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{عرض }-2\text{ برابر}}\begin{vmatrix}\frac{7}{2}\\12\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{سه واحد بالا}}\begin{vmatrix}\frac{7}{2}\\15\end{vmatrix}$$

۲۸ **۱** ۲ ۳ ۴ تابع $f(x)=x^2+2x+5$ را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم و داریم:

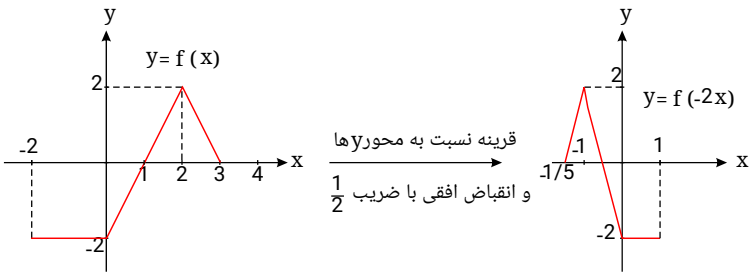
$$f(x)=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4$$

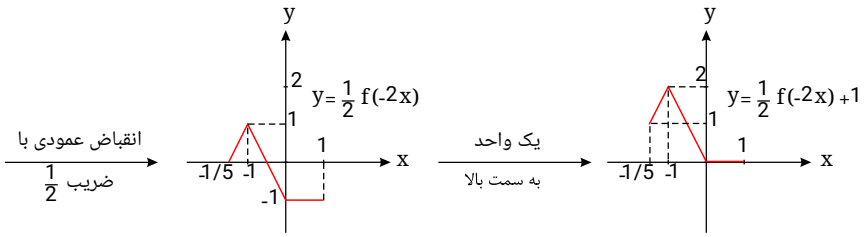
توجه کنید که باید از تابع $f(x)$ به $y=x^2$ برسیم، پس داریم:

$$f(x)=(x+1)^2+4\xrightarrow{x\to x-1}y=(x-1+1)^2+4=x^2+4\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۴ واحد به}}y=x^2+4-4=x^2$$

بنابراین باید f را یک واحد به راست و سپس ۴ واحد به پایین منتقل کنیم تا $y=x^2$ به دست آید.

۲۹ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید. سپس با انجام انتقال و انقباض، نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(-2x)+1$ را به دست می‌آوریم:





پس دامنهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$ برابر با $[-۱/۵, ۱]$ و برد آن $[۰, ۲]$ است که اشتراک آن‌ها بازهٔ $[۰, ۱]$ می‌شود.

۳۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}} g(x)=\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{دو واحد به طرف } x\text{های}} h(x)=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{-x+۲}$$

$$\begin{cases} h(x)=\sqrt{-x+۲} \\ \text{نیمساز ناحیه اول و سوم } y=x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+۲}=x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+۲=x^۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۲ & \text{غ‌ق‌ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x=۱ & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

نکته: در بعضی از موارد برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن بررسی شود. به این روش، اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالات می‌گوییم.

$$\begin{cases} n=\text{زوج}=۲k \Rightarrow n^۲+۹n+۵=(۲k)^۲+۹(۲k)+۵=۴k^۲+۱۸k+۴+۱ \\ =۲(\underbrace{۲k^۲+۹k+۲}_{k'})+۱=۲k'+۱=\text{فرد} \\ \text{یا} \\ n=\text{فرد}=۲k+۱ \Rightarrow n^۲+۹n+۵=(۲k+۱)^۲+۹(۲k+۱)+۵=۴k^۲+۴k+۱+۱۸k+۹+۵ \\ =۴k^۲+۲۲k+۱۴+۱=۲(\underbrace{۲k^۲+۱۱k+۷}_{k''})+۱=۲k''+۱=\text{فرد} \end{cases}$$

یعنی به‌ازای هر مقدار دلخواهی از n عدد موردنظر همواره فرد است.

۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴ به کمک برهان خلف می‌توان ثابت کرد حاصل‌ضرب عبارت‌های $(x_n-y_n),\cdots,(x_۲-y_۲),(x_۱-y_۱)$ همواره زوج است.

۳۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

تذکر: اگر $N=p_۱^{\alpha}\times p_۲^{\beta}\times p_۳^{\gamma}\cdots$ آنگاه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی و صحیح N از دستور زیر حاصل می‌شود:

تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی: $N=(\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)\cdots$

تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح: $N'=۲N$

$$۲۴\,|\,n \Rightarrow n=۲۴q\ ;\quad q\in\mathbb{Z}$$

$$n\,|\,۴۸۰۰ \Rightarrow ۲۴q\,|\,۴۸۰۰ \xrightarrow{\div ۲۴} q\,|\,۲۰۰$$

یعنی q مقسوم‌علیه‌های صحیح ۲۰۰ است، پس با تجزیه‌ی ۲۰۰، تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح آن را تعیین می‌کنیم:

$۲۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲$

تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح $= ۲(۳+۱)(۲+۱) = ۲۴$

۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

گزینهٔ ۱ : $a^۴|b^۳ \Rightarrow a \times a^۳|b^۳ \Rightarrow a^۳|b^۳ \Rightarrow a|b \Rightarrow a^۵|b^۵$

گزینهٔ ۳ : $a^۴|b^۳ \Rightarrow a^{۲۰}|b^{۱۵} \Rightarrow a \times a^{۱۹}|b^{۱۵} \Rightarrow a^{۱۹}|b^{۱۵}$

گزینهٔ ۴ : $a|b \Rightarrow a^۶|b^۶ \Rightarrow a^۶|b^۷$

اما رابطهٔ گزینهٔ ۲ درحالت کلی نادرست است مثلاً اگر $a = ۸$ و $b = ۱۶$ آنگاه $b^۳ = ۱۶^۳ = ۲^{۱۲}$ ، $a^۴ = ۸^۴ = ۲^{۱۲}$ است پس $a^۴|b^۳$ ولی $a^۳ = ۸^۳ = ۲^۹$ و $b^۲ = ۱۶^۲ = ۲^۸$ است پس $a^۳ \not| b^۲$

روش دوم: اگر $a^m|b^n$ و بخواهیم بررسی نمائیم $a^x|b^y$، اگر $\begin{vmatrix} m & n \\ x & y \end{vmatrix} \geq ۰$ رابطه $a^x|b^y$ صحیح است وگرنه نادرست می‌باشد.

$$a^۴|b^۳ \xrightarrow{\text{بررسی گزینه‌ها}} \begin{cases} \text{گزینهٔ ۱} : \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۵ & ۵ \end{vmatrix} = ۴ \times ۵ - ۵ \times ۳ > ۰ \quad ✓ \\ \text{گزینهٔ ۲} : \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ \times ۲ - ۳ \times ۳ = -۱ < ۰ \quad ✗ \\ \text{گزینهٔ ۳} : \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۱۹ & ۱۵ \end{vmatrix} = ۴ \times ۱۵ - ۱۹ \times ۳ = ۶۰ - ۵۷ > ۰ \quad ✓ \\ \text{گزینهٔ ۴} : \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۶ & ۷ \end{vmatrix} = ۴ \times ۷ - ۶ \times ۳ = ۲۸ - ۱۸ > ۰ \quad ✓ \end{cases}$$

۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴ بررسی موارد:

مورد «الف»: فرمول مولکولی اسیدچرب راست‌زنجیر به‌صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است.

مورد «ب»: چون تعداد کربن‌ها در یک مولکول گریس بیشتر از بنزین است، گریس کم‌فرارتر از بنزین است، ولی روغن زیتون نیز در آب نامحلول است.

مورد «پ»:

$$C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶ + ۸۰O_۲ \rightarrow ۵۷CO_۲ + ۵۲H_۲O$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع ضرایب فراورده}}{\text{مجموع ضرایب واکنش‌دهنده}} = \frac{۱۰۹}{۸۱}$$

مورد «ت»: واکنش سوختن وازلین به صورت زیر است:

$$C_{۲۵}H_{۵۲} + ۳۸O_۲ \rightarrow ۲۵CO_۲ + ۲۶H_۲O$$

$$?L \text{ هوا} = ۱mol \text{ وازلین} \times \frac{۳۸molO_۲}{۱mol \text{ وازلین}} \times \frac{۲۲/۴LO_۲}{۱molO_۲} \times \frac{۱۰۰L \text{ هوا}}{۲۰LO_۲} = ۴۲۵۶L \text{ هوا}$$

۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\underbrace{C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶}_{\text{استر سه عاملی}} + ۳H_۲O \rightarrow \underbrace{C_۳H_۸O_۳}_{\text{الکل سه عاملی}} + \underbrace{۳C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲}_{\text{اسید چرب}}$$

$$?g \text{ اسید چرب} = ۱۱۱/۲۵g \text{ استر ناخالص} \times \frac{۸۰g \text{ استر}}{۱۰۰g \text{ استر ناخالص}} \times \frac{۱mol \text{ استر}}{۸۹۰g \text{ استر}} \times \frac{۳mol \text{ اسید چرب}}{۱mol \text{ استر}} \times \frac{۲۸۴g \text{ اسید چرب}}{۱mol \text{ اسید چرب}} = ۸۵/۲g \text{ اسید چرب}$$

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ۰/۱ مول صابون با محلول منیزیم کلرید واکنش می‌دهد و ۳۰/۹g رسوب ایجاد می‌شود.

$$۲RCOONa + MgCl_۲ \rightarrow (RCOO)_۲Mg + ۲NaCl$$

جرم مولی رسوب برابر است با:

$$۰/۱mol \text{ صابون} \times \frac{۱mol \text{ رسوب}}{۲mol \text{ صابون}} \times \frac{xg \text{ رسوب}}{۱mol \text{ رسوب}} = ۳۰/۹g \text{ رسوب} \rightarrow x = ۶۱۸g \cdot mol^{-۱}$$

تعداد کربن در زنجیر آلکیل R را n درنظر می‌گیریم؛ بنابراین خواهیم داشت:

$(C_nH_{2n+1}COO)_2Mg$ جرم مولی $= 28n + 114 = 618 \rightarrow n = 18$

بر این اساس، فرمول شیمیایی صابون به‌صورت $C_{18}H_{37}COONa$ می‌باشد.

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

«الف»: ترکیب (۲) یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی و ترکیب (۱) یک پاک‌کنندهٔ صابونی است.

غیرصابونی > صابونی : قدرت پاک‌کنندگی

«ب»: حساب می‌کنیم:

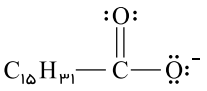
(۱) ترکیب : $C_{15}H_{31}COONa \rightarrow M = 278g \cdot mol^{-1}$

(۲) ترکیب : $C_{12}H_{25} - C_6H_4 - SO_3Na \rightarrow M = 348g \cdot mol^{-1}$

$\Rightarrow$ تفاوت جرم مولی $= 348 - 278 = 70g$

چهارمین عضو خانوادهٔ آلکین‌ها : $C_5H_8 \Rightarrow$ جرم مولی $= 68g \cdot mol^{-1}$

«پ»: ساختار آنیون ترکیب (۱) به‌صورت زیر است:



$$\begin{cases} \text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی} = 49 \\ \text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی} = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ نسبت مورد نظر $= \frac{49}{5} = 9/8$

«ت»: ترکیب (۳) یک استر سنگین، و سه عاملی است و از واکنش یک مول از آن با مقدار کافی سود، ۳ مول صابون تشکیل می‌شود.

۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴ کلوئید پایدارشده آب و روغن یک مخلوط ناهمگن و پایدار بوده و حاوی توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت (نه یکسان) است.

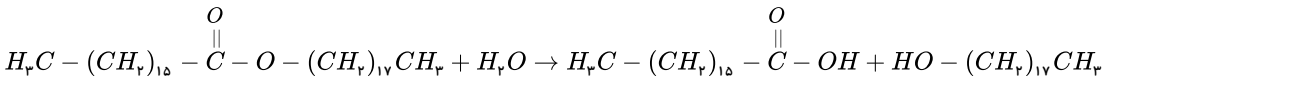
۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴ بررسی موارد:

مورد «آ»: نادرست. ظرف B محلول و ظرف A کلوئید است. ظرف A ناهمگن و پایدار است.

مورد «ب»: نادرست. ذرات سازندهٔ ظرف A از سوسپانسیون ریزترند. اما هر دو مسیر عبور نور را مشخص می‌کنند.

موارد «پ» و «ت» درست هستند.

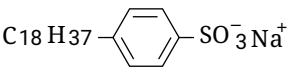
۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴ آبکافت استر A به‌صورت زیر می‌باشد:



شمار کربن‌های کربوکسیلیک‌اسید حاصل ۱۷ اتم بوده که برابر شمار اتم‌های کربن زنجیر هیدروکربنی صابون جامد می‌باشد.

فرمول صابون جامد : $C_{17}H_{35}COO^-Na^+$

تعداد اتم‌های کربن الکل حاصل، ۱۸ بوده که برابر تعداد اتم‌های کربن زنجیر هیدروکربنی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی می‌باشد.

فرمول پاک‌کنندهٔ غیرصابونی : 

جرم مولی صابون جامد $= 306g \cdot mol^{-1}$

جرم مولی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی $= 432g \cdot mol^{-1}$

$432 - 306 = 126g \cdot mol^{-1}$

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴ فقط عبارت (پ) صحیح است.

رابطهٔ درصد جرمی برای عنصرهای اکسیژن و گوگرد در این ترکیب به‌صورت زیر است:

$$\text{درصد جرمی اکسیژن} = \frac{3 \times 16}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100$$

$$\text{درصد جرمی گوگرد} = \frac{32}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100$$

نسبت درصد جرمی اکسیژن به گوگرد برابر است با:

$$\frac{3 \times 16}{32} = 1/5$$

بررسی سایر عبارت‌ها:

عبارت (آ): فرمول کلی این ترکیب، $C_{۱۸}H_{۲۹}SO_۳^-Na^+$ است.

عبارت (ب): در این مولکول فقط دو اتم کربن می‌توان یافت که به اتم هیدروژن متصل نیستند؛ دو اتم کربن از حلقهٔ بنزنی که یکی به گروه $SO_۳^-$ و دیگری به زنجیر هیدروکربنی متصل است.

عبارت (ت): پاک‌کننده‌های غیرصابونی برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی در آب‌های سخت نیز خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند و با یون‌های $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ رسوب نمی‌دهند.

۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴ $RC_۶H_۴SO_۳^-Na^+$ یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است.

۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴ عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

بررسی موارد:

مورد «پ»: نوع پارچه بر میزان چسبندگی لکه‌های چربی تأثیرگذار است.

مورد «ت»: تفاوت در ساختار شیمیایی پاک‌کننده‌های صابونی و پاک‌کننده‌های غیرصابونی هم در گروه ناقطبی و هم در گروه قطبی آن‌ها است.

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی:

پاک کنندهٔ صابونی : $R-COO^-Na^+$

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴ اغلب هسته‌هایی که نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌های آن‌ها برابر یا بیش از ۱٫۵ است رادیوایزوتوپ هستند. در همهٔ رادیوایزوتوپ‌ها، نسبت گفته شده برقرار نیست، مثلاً در عنصر ناپایدار تکنسیم $({}^{۹۹}_{۴۳}Tc)$، این نسبت کمتر از ۱٫۵ است.

۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴ فقط عبارت (پ) درست است.

بررسی موارد:

آ) از اتم ${}^{۹۹}_{۴۳}Tc$ برای تصویربرداری غدهٔ تیروئید استفاده می‌شود (جای عدد اتمی و عدد جرمی اشتباه نوشته شده است).

ب) هر دو نوع گلوکز معمولی و نشان‌دار، توسط یاخته‌های بدن جذب می‌شود.

پ) در ${}^{۲۳۵}_{۹۲}U$ نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها به‌صورت زیر است:

$$\frac{۲۳۵-۹۲}{۹۲}=۱٫۵۵$$

ت) یون یدید با یونی که حاوی تکنسیم است، اندازهٔ مشابهی دارد.

۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴ درصد فراوانی ایزوتوپ‌های $A^{۱۲۶}$ و $A^{۱۲۸}$ را به‌ترتیب برابر با x و $(۱۰۰-x)$ در نظر می‌گیریم:

$$۱۲۶٫۷=\frac{(۱۲۶\times x)+(۱۲۸\times(۱۰۰-x))}{۱۰۰}\Rightarrow x=۶۵$$

پس درصد فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر برابر با ۶۵٪ و درصد فراوانی ایزوتوپ سنگین‌تر برابر با ۳۵٪ است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{درصد فراوانی ایزوتوپ سنگین‌تر}}{\text{درصد فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر}}=\frac{۳۵}{۶۵}\simeq ۰٫۵۴$$

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴ عبارت‌های ب، پ، ت نادرست‌اند.

ب) خطوط رنگی در طیف نشری خطی اتم هیدروژن، از بازگشت الکترون از لایه‌های بالاتر به لایهٔ $n=۲$ تشکیل می‌شود.

پ) انرژی نور نشرشده حاصل از انتقال الکترون از لایهٔ $n=۵$ به $n=۳$، بیشتر از انرژی نور نشرشده حاصل از انتقال الکترون از لایهٔ $n=۶$ به $n=۴$ است. (با افزایش n، فاصلهٔ انرژی لایه‌های متوالی کاهش می‌یابد.)

ت) انرژی نیز همانند ماده در نگاه ماکروسکوپی، پیوسته اما در نگاه میکروسکوپی، گسسته یا کوانتومی است.

ث) در اتم هیدروژن نور حاصل از بازگشت الکترون از لایه‌های بالاتر بر لایهٔ سوم، در ناحیهٔ فروسرخ قرار می‌گیرد که طول موجی بلندتر از $۷۰۰nm$ دارد.

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴ به‌جز عبارت سوم، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

عبارت سوم: به‌طور مثال در لایهٔ سوم، ۳ زیرلایهٔ $۳s$، $۳p$ و $۳d$ وجود دارد که زیرلایه‌های $۳s$ و $۳p$ در دورهٔ سوم ولی زیرلایهٔ $۳d$ در دورهٔ چهارم اشغال می‌شود.

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴ آرایش الکترونی اتم A به‌صورت زیر است:

$$A: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۴$$

۱۴ الکترون موجود در زیرلایه‌های $۳d$ و $۴p$ دارای $n+l=۵$ هستند. پس عدد اتمی عنصر A برابر ۳۴ است. از آن‌جا که در همهٔ اتم‌ها به‌جز ${}^۱_۱H$ تعداد نوترون‌ها برابر یا بیشتر از تعداد پروتون‌ها است، می‌توان نتیجه گرفت که اتم A دارای ۳۹ نوترون است.

$$\text{عدد جرمی}=p+n=۳۴+۳۹=۷۳$$

۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴ پ)

$${}_{۲۴}Cr=[{}_{۱۸}Ar]۳d^{۵}\underline{۴s^{۱}}$$

$$۴s^{۱}:\begin{matrix}n=۴\\l=۰\end{matrix}\xrightarrow{\text{بیرونی‌ترین لایه}}n+l\text{ مجموع }=۱\times(۴+۰)=۴$$

ت) در بیرونی‌ترین زیرلایه اتم چهار عنصر زیر در دورهٔ چهارم، یک الکترون وجود دارد:

$${}_{۱۹}K=[{}_{۱۸}Ar]\underline{۴s^{۱}}$$

$${}_{۲۴}Cr=[{}_{۱۸}Ar]۳d^{۵}\underline{۴s^{۱}}$$

$_{29}Cu = [_{18}Ar]3d^{10}\underline{4s^1}$

$_{31}Ga = [_{18}Ar]3d^{10}4s^2\underline{4p^1}$

بررسی سایر عبارت‌ها:

آ) مقدار n برای زیرلایه‌های یک لایه، با یکدیگر برابر است و کمترین مقدار l، $l = 0$ است؛ پس بیشترین اختلاف n و l برابر با n خواهد بود.

ب) هرچه $n + l$ کوچکتر باشد، یک زیرلایه پایدارتر و انرژی آن کمتر است.

چون l برای زیرلایه p کوچک‌تر از l برای زیرلایه d است، پس در هر لایه، زیرلایه p پایدارتر و است.

۵۲ ۱ ۲ ۳ ۴ بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) این عنصر دارای ۴ الکترون ظرفیت می‌باشد.

۳) در آرایش الکترونی آن $3d^{10}$ و $4d^{10}$ وجود دارد، پس دارای ۲۰ الکترون با $l = 2$ می‌باشد.

۴) لایهٔ چهارم گنجایش ۳۲ الکترون دارد؛ در حالی که این عنصر ۱۸ الکترون در لایهٔ چهارم دارد. ($4f$ پر نشده است.)

۵۳ ۱ ۲ ۳ ۴ یون A^{2-} تشکیل داده؛ بنابراین در گروه ۱۶ جدول قرار دارد و آرایش الکترونی آن به np^4 ختم می‌شود.

$$(n + l) = 12 \Rightarrow 4(n + 1) = 12 \Rightarrow n = 2$$

پس آرایش الکترونی یون A، $1s^2/2s^2 2p^6$ است که ۱۰ الکترون دارد. آرایش الکترونی عنصر Cu به صورت $[_{18}Ar]3d^{10}4s^1$ است که ۱۰ الکترون با $l = 2$ دارد.

۵۴ ۱ ۲ ۳ ۴

آرایش الکترونی $_{33}As$ و $_{56}Ba$ به‌صورت زیر است:

$_{33}As : [_{18}Ar]3d^{10}\ 4s^2 4p^3 \rightarrow$ گروه ۱۵

$_{56}Ba : [_{54}Xe]6s^2 \rightarrow$ دورهٔ ۶

پس عنصر X در گروه ۱۵ و دورهٔ ۶ جدول دوره‌ای جای دارد:

$_{83}X : [_{54}Xe]4f^{14}\ 5d^{10}\ 6s^2 6p^3$

تعداد الکترون‌های ظرفیت عنصرهای گروه ۱۵ برابر ۵ است! اما X با کلر نمی‌تواند ترکیب یونی با فرمول XCl_5 تشکیل دهد، چون در این صورت X باید کاتیونی با بار $(+5)$ تشکیل دهد که امکان‌پذیر نیست (عنصرها فقط کاتیون‌هایی با بار حداکثر $(+3)$ تشکیل می‌دهند).

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اگر در آرایش الکترونی X، تعداد الکترون‌ها شمرده شود، عدد اتمی آن به‌دست می‌آید که برابر ۸۳ است. البته جور دیگر هم می‌توان عدد اتمی X را به‌دست آورد. چون X در دورهٔ ۶ جای دارد و گاز نجیب این دوره هم $_{86}Rn$ است کافی است از ۸۶، سه واحد کم کنیم تا برسیم به عدد اتمی عنصر X که در گروه ۱۵ جای دارد:

$$\text{عدد اتمی } X = 86 - 3 = 83$$

۳) عددهای کوانتومی $l = 3$ و $n = 4$ بیانگر زیرلایهٔ $4f$ هستند که در $_{80}Hg$ هم این زیرلایه پر است:

$_{80}Hg : [_{54}Xe]4f^{14}\ 5d^{10}\ 6s^2$

۴) در لایهٔ ظرفیت $_{83}X$، ۲ الکترون در $6s$ و ۳ الکترون در $6p$ جای دارد، پس:

$$_{83}X : [_{54}Xe]4f^{14}\ 5d^{10}\ \underbrace{6s^2 6p^3}_{\text{لایهٔ ظرفیت}}$$

$$\text{مجموع } (n + l) \text{ الکترون‌های لایهٔ ظرفیت} : 2 \times \underbrace{(6 + 0)}_{6s} + 3\underbrace{(6 + 1)}_{6p} = 33$$

در $_{83}X$ تعداد الکترون‌های موجود در زیرلایهٔ $(l = 2)d$ برابر ۳۰ است (همهٔ زیرلایه‌های $3d, 4d$ و $5d$ پر هستند). پس مجموع $(n + l)$ الکترون‌های لایهٔ ظرفیت آن بیش‌تر از تعداد الکترون‌های با $l = 2$ می‌باشد.