پاسخنامه تشریحی

۱ — ۴ ۳ ۲ **۱** جرم گوگرد را در $۱kg$ سوخت پیدا می‌کنیم.

$$ppm = \frac{\text{جرم } S}{\text{جرم سوخت}} \times ۱۰^{۶}$$

$$۶۴۰۰ = \frac{\text{جرم } S}{۱۰۰۰g} \times ۱۰^{۶} \Rightarrow S \ \text{جرم} = ۶٫۴g$$

$$S \xrightarrow{O_۲} SO_۳ \xrightarrow{H_۲O} H_۲SO_۴$$

$$\frac{۶٫۴g}{۳۲} = \frac{x\,mol}{۱} \quad x = ۰٫۲\,mol \Rightarrow C_m = \frac{۰٫۲}{۱۰۰۰} = ۲ \times ۱۰^{-۴}\frac{mol}{L}$$

$$[H^+] = ۲ \times ۱۰^{-۴} \times ۲ \times ۱ = ۴ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow pH = -\log^{۴\times ۱۰^{-۴}} = ۴ - ۲\log ۲ = ۳٫۴$$

پس pH آب از ۷ به ۳٫۴ می‌رسد یعنی ۳٫۶ واحد کم می‌شود.

۲ — ۴ **۳** ۲ ۱ در شروع واکنش غلظت H^+ یک مولار و $pH = ۰$ است و با گذشت ۱۰۰ ثانیه غلظت A به میزان $۰٫۶mol \cdot L^{-۱}$ کاهش می‌یابد. بنابراین مقدار غلظت H^+ نیز به دلیل برابر بودن ضریب A و H^+ به همین میزان کاهش می‌یابد. پس:

$$[H^+] = ۱ - ۰٫۶ = ۰٫۴ \quad mol \cdot l^{-۱}$$

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow -\log ۰٫۴ = -\log ۴ \times ۱۰^{-۱}$$
$$= ۱ - \log ۴ = ۱ - ۲\log ۲ = ۱ - ۲ \times ۰٫۳ = ۰٫۴$$

با توجه به گزینه‌ها، در گزینهٔ ۳، در ثانیهٔ ۱۰۰، مقدار pH برابر ۰٫۴ است.

۳ — **۴** ۳ ۲ ۱

$$CH_۳COOH \rightleftharpoons CH_۳COO^-(aq) + H^+(aq)$$

$$K_a = \frac{[CH_۳COO^-]\,[H^+]}{[CH_۳COOH]} = \frac{۲ \times ۱۰^{-۴} \times ۲ \times ۱۰^{-۴}}{[CH_۳COOH]} = ۱٫۸ \times ۱۰^{-۵}$$

$$\Rightarrow [CH_۳COOH] = ۲۲ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{غلظت یون هیدرونیوم}}{\text{غلظت استیک اسید اولیه}} \times ۱۰۰$$

غلظت استیک اسید یونیده شده + غلظت استیک اسید موجود در تعادل = غلظت استیک اسید اولیه

$$= ۲۲ \times ۱۰^{-۴} + ۲ \times ۱۰^{-۴} = ۲۴ \times ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱}$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{۲ \times ۱۰^{-۴}}{۲۴ \times ۱۰^{-۴}} \times ۱۰۰ \simeq ۸٫۳\%$$

۴ — ۴ ۳ **۲** ۱ ثابت یونش اسیدها در دمای ثابت همواره یکسان است، اما درجهٔ یونش اسید متناسب با غلظت مولار آن، متفاوت است.

ماده	$HA \rightleftharpoons$	H^+	$+ A^-$
غلظت			
اولیه	۱	۰	۰
تغییرات	$-۰٫۲$	$+۰٫۲$	$+۰٫۲$
نهایی	۰٫۸	۰٫۲	۰٫۲

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow K_a = \frac{۰٫۲ \times ۰٫۲}{۰٫۸} = ۵ \times ۱۰^{-۲} mol \cdot L^{-۱}$$

حال درجهٔ یونش اسید را در حالتی‌که غلظت اولیهٔ اسید ۰٫۶ مولار باشد محاسبه می‌کنیم:

ماده	$HA \rightleftharpoons$	H^+	$+ A^-$
غلظت			
اولیه	۰٫۶	۰	۰
تغییرات	$-۰٫۶\alpha$	$۰٫۶\alpha$	$۰٫۶\alpha$
نهایی	$۰٫۶(۱-\alpha)$	$۰٫۶\alpha$	$۰٫۶\alpha$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow ۵ \times ۱۰^{-۲} = \frac{(۰/۶\alpha) \times (۰/۶\alpha)}{۰/۶(۱-\alpha)} \Rightarrow ۰/۶\alpha^۲ + ۰/۰۵\alpha - ۰/۰۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰/۲۵ \ \text{ق ق} \\ \alpha = -۰/۳۳ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین درجه یونش اسید HA در حالت دوم برابر با ۰/۲۵ است.

۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$HCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$			
غلظت اولیه	M	۰	۰
تغییر غلظت	$-x$	$+x$	$+x$
غلظت نهایی	$M-x$	x	x

طبق جدول تغییر غلظت و نمودار داده شده در صورت سؤال داریم:

$$[HCOO^-] = x = ۰/۰۱ mol \cdot L^{-۱}$$
$$[HCOOH] = M - x = ۰/۲۴ mol \cdot L^{-۱} \Rightarrow M = ۰/۲۵ mol \cdot L^{-۱}$$
$$\alpha = \frac{x}{M} = \frac{۰/۰۱}{۰/۲۵} = ۰/۰۴ \Rightarrow \%\alpha = \%۴$$

حجم محلول برابر است با:

$$?mL\text{محلول} = ۲/۳ g HCOOH \times \frac{۱ mol HCOOH}{۴۶ g HCOOH} \times \frac{۱ L\text{محلول}}{۰/۲۵ mol HCOOH} \times \frac{۱۰۰۰ mL\text{محلول}}{۱ L\text{محلول}} = ۲۰۰ mL\text{محلول}$$

۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴) در محلول‌های بازی غلظت یون هیدروکسید بیشتر از یون هیدرونیوم است.

بررسی موارد:

«الف»: اکسیدهای نافلزی، اسید آرنیوس هستند. این مواد در آب به‌صورت شیمیایی حل می‌شوند و فراوردهٔ واکنش به‌صورت یونی در آب حل می‌شود و غلظت یون H^+ را زیاد می‌کند.

$$SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲SO_۴(aq) \rightarrow H^+(aq) + HSO_۴^-(aq)$$

«ب»:

$$NaOH(aq) \rightarrow Na^+(aq) + OH^-(aq)$$

غلظت یون OH^- را زیاد کرده پس باز آرنیوس است.

«پ»: اغلب اکسیدهای فلزی گروه ۱ و ۲، باز آرنیوس هستند. این مواد در آب به‌صورت شیمیایی حل می‌شوند و غلظت یون OH^- را زیاد می‌کنند.

$$K_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲KOH(aq) \rightarrow ۲K^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$

«ت»: اکسیدهای نافلزی، اسید آرنیوس هستند. این اکسیدها در آب به‌صورت شیمیایی حل می‌شوند و غلظت یون H^+ را زیاد می‌کنند.

$$N_۲O_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow ۲HNO_۲(aq) \rightleftarrows ۲H^+(aq) + ۲NO_۲^-(aq)$$

۷ **(۱)** (۲) (۳) (۴) بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) درست:

$$KOH(s) \xrightarrow{\text{در آب}} K^+(aq) + OH^-(aq)$$

محلول یک باز است $[H^+] < [OH^-]$ در نتیجه $pH > ۷$ است.

گزینهٔ ۲) نادرست: شکر یا ساکاروز ترکیبی است که در آب به‌صورت مولکولی حل می‌شود.

$$C_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱}(s) \xrightarrow{\text{در آب}} C_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱}(aq)$$

در نتیجه محلول خنثی است و $[H^+] = [OH^-]$ در نتیجه $pH = ۷$ است.

گزینهٔ ۳) نادرست: استیک‌اسید، اسیدی ضعیف است که در آب به مقدار ناچیز یونیده می‌شود.

$$CH_۳COOH(aq) \rightleftarrows CH_۳COO^-(aq) + H^+(aq)$$

$[H^+] > [OH^-]$ و در نتیجه $pH < ۷$ است.

گزینهٔ ۴) نادرست: نیتریک‌اسید، اسیدی قوی ست.

$$HNO_۳(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_۳^-(aq)$$

محلول اسیدی و $[H^+] > [OH^-]$ و در نتیجه $pH < ۷$ است.

۸ (۱) (۲) (۳) **(۴)** طبق مدل آرنیوس موادی مانند HCN که با حل شدن در آب، غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می‌دهند، اسید و موادی مانند $Rb_۲O$ که با حل شدن در آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش می‌دهند، باز هستند؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول HCN بیشتر از محلول $Rb_۲O$ است.

۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)** هر چه تعداد مول یون‌ها در واحد حجم (غلظت مولی یون‌ها) بیش‌تر باشد، رسانایی الکتریکی محلول هم بیش‌تر است؛ پس ابتدا باید غلظت مولی محلول و سپس غلظت مولی یون‌ها را به‌دست آوریم.

محلول (۱): غلظت مولی محلول برابر است با:

$$M=\frac{n(mol)}{V(L)}=\frac{\frac{۱/۹g}{\text{جرم مولی } MgCl_۲}}{۰/۲۵L}=\frac{\frac{۱/۹}{۹۵}}{۰/۲۵}=\frac{۰/۰۲mol}{۰/۲۵L}=۰/۰۸mol\cdot L^{-۱}$$

از انحلال هر واحد فرمولی $MgCl_۲$، ۳ یون تشکیل می‌شود:

$$MgCl_۲\rightarrow Mg^{۲+}+۲Cl^-$$

پس غلظت یون‌ها در مجموع برابر $۰/۲۴=۳\times ۰/۰۸$ مول بر لیتر است.

محلول (۲): غلظت مولی محلول برابر است با:

$$M=\frac{n(mol)}{V(L)}=\frac{\frac{۸}{\text{جرم مولی}}}{۱L}=\frac{۸}{۴۰}=۰/۲mol\cdot L^{-۱}$$

$$NaOH\rightarrow Na^++OH^-$$

از انحلال هر واحد فرمولی $NaOH$، دو یون تشکیل می‌شود:

پس غلظت یون‌ها در مجموع برابر $۰/۴=۲\times ۰/۲$ مول بر لیتر است.

محلول (۳): از انحلال هر واحد فرمول KOH، دو یون تشکیل می‌شود.

$$KOH\rightarrow K^++OH^-$$

پس غلظت یون‌ها در مجموع برابر $۰/۶=۲\times ۰/۳$ مول بر لیتر است.

پس ترتیب رسانایی الکتریکی این سه محلول به صورت زیر است:

محلول (۱) > محلول (۲) > محلول (۳) : رسانایی الکتریکی

توجه: این که چه حجمی از محلول داشته باشیم، تأثیری در رسانایی الکتریکی ندارد. مثلاً اگر غلظت محلول KOH برابر ۰/۳ مولار باشد، نیم‌لیتر یا ۱۰ لیتر از آن، رسانایی الکتریکی یکسانی دارند.

۱۰ ۱ ۲ ۳ **۴** بررسی موارد:

مورد (الف): نادرست؛ ثابت تعادل با تغییر دما تغییر می‌کند.

مورد (ب): نادرست، تنها در زمان تعادل سرعت تولید و مصرف واکنش‌دهنده‌ها و فرآورده‌ها برابر است.

مورد (پ): درست.

مورد (ت): درست؛

$$K_a=\frac{[H^+][HCOO^-]}{[HCOOH]}\Rightarrow ۱/۸\times ۱۰^{-۴}=\frac{(۱/۸\times ۱۰^{-۶})^۲}{[HCOOH]}\Rightarrow [HCOOH]=\frac{(۱/۸\times ۱۰^{-۶})^۲}{۱/۸\times ۱۰^{-۴}}=۱/۸\times ۱۰^{-۸}mol\cdot L^{-۱}$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ **۴** هرچه سرعت واکنش یک فلز با یک اسید بیشتر باشد، آن اسید قوی‌تر است.

$HX>HA$: قدرت اسیدی

هرچه یک اسید قوی‌تر باشد، در شرایط یکسان دما و غلظت، بیشتر یونیده می‌شود و غلظت یون‌ها در محلول آن زیادتر و غلظت مولکول‌ها در محلول آن کمتر می‌شود. هرچه یک اسید قوی‌تر باشد، درجهٔ یونش و ثابت یونش اسیدی آن بزرگ‌تر است.

۱۲ **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا شمار ذره‌های حل‌شده اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$۹/۴gHNO_۲\times\frac{۱molHNO_۲}{۴۷gHNO_۲}\times\frac{۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}\text{ مولکول}}{۱molHNO_۳}=۱/۲۰۴\times ۱۰^{۲۳}\text{ مولکول}$$

حال با توجه به معادلهٔ یونش اسید به‌ازاء هر مولکول یونیده‌شده، دو یون تولید می‌شود.

$$HNO_۲(aq)\rightleftharpoons H^+(aq)+NO_۲^-(aq)$$

$$۷/۲۲۴\times ۱۰^{۲۱}\text{ یون}\times\frac{\text{۱ مولکول یونیده‌شده}}{\text{۲ مجموع یون‌ها}}=۳/۶۱۲\times ۱۰^{۲۱}\text{ مولکول یونیده‌شده}$$

درجهٔ یونش برابر است با:

$$\text{درجهٔ یونش}=\frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده‌شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده}}=\frac{۳/۶۱۲\times ۱۰^{۲۱}}{۱/۲۰۴\times ۱۰^{۲۳}}=۰/۰۳$$

۱۳ ۱ **۲** ۳ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: به‌ازای یونش هر مول از HA، ۱ مول از هرکدام از یون‌ها، تولید می‌شود.

گزینهٔ «۲»: براساس اطلاعات مربوط به محلول شمارهٔ (۱)، ثابت تعادل را به‌دست می‌آوریم که با ثابت تعادل در محلول‌های شمارهٔ (۲) و (۳) برابر است:

$$K_a=\frac{[H^+][A^-]}{[HA]}=\frac{(۰/۰۰۸)^۲}{۰/۰۴}=۱/۶\times ۱۰^{-۳}$$

طبق محلول (۲):

$$K_a=\frac{[A^-][H^+]}{[HA]}\Rightarrow ۱/۶\times ۱۰^{-۳}=\frac{X\times W}{۰/۰۱}$$
$$\xrightarrow{X=W}۱۶\times ۱۰^{-۶}=X^۲\Rightarrow ۴\times ۱۰^{-۳}=X$$

طبق محلول (۳):

$$Y=۰/۰۰۲\Rightarrow ۱/۶\times ۱۰^{-۳}=\frac{۰/۰۰۲\times ۰/۰۰۲}{Z}$$
$$Z=۲/۵\times ۱۰^{-۳}mol\cdot L^{-۱}$$

گزینهٔ «۳»: ثابت تعادل فقط تابع دما است.

گزینهٔ «۴»: در هر سه آزمایش دما ثابت است، بنابراین ثابت تعادل نیز ثابت خواهد بود که براساس اطلاعات محلول شمارهٔ (۱)، ثابت تعادل برابر $۱/۶ \times ۱۰^{-۳}$ می‌باشد.

۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴ معادلهٔ یونش HF در آب را می‌نویسیم:

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$$

مواد اولیه	۱	۰	۰
مواد تعادلی	$\underbrace{۱-x}_{\text{مقدار اسید یونیده نشده}}$	$+x$	$+x$

طبق اطلاعات صورت سؤال:

$$۱ - x + x + x = ۱/۲ \Rightarrow x = ۰/۲$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{مول اسید یونیده شده}}{\text{مول اسید اولیه}} \times ۱۰۰ = \frac{۰/۲}{۱} \times ۱۰۰ = ۲۰\%$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$K_a = \alpha^۲ M$ در اسیدهای ضعیف

$$HA \text{ در اسید ضعیف} \Rightarrow ۱۰^{-۶} = \alpha_۱^۲ \times ۱ \Rightarrow \alpha_۱ = ۱۰^{-۳}$$

$$HB \text{ در اسید ضعیف} \Rightarrow ۱۰^{-۸} = \alpha_۲^۲ \times ۱ \Rightarrow \alpha_۲ = ۱۰^{-۴}$$

$$\frac{\alpha_۱}{\alpha_۲} = \frac{۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۴}} = ۱۰$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»:

$$\text{مولاریته} = \frac{۱۰ \times \alpha(\text{درصد جرمی}) \times d(\text{چگالی})}{M_w(\text{جرم مولی})} \Rightarrow [HF]_{\text{اولیه}} = \frac{۱۰ \times ۲۰ \times ۱}{۲۰} = ۱۰$$

$$K_a = \alpha^۲ [HF]_{\text{اولیه}} = (۰/۰۵)^۲ \times ۱۰ = ۰/۰۲۵\, mol \cdot L^{-۱}$$

گزینهٔ «۲»:

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]} \Rightarrow ۰/۳ = \frac{(۰/۳)^۲}{[HA]_{\text{اولیه}} - ۰/۳} \Rightarrow [HA]_{\text{اولیه}} = ۰/۶$$

$$\alpha = \frac{[H^+]}{[HA]_{\text{اولیه}}} = \frac{۰/۳}{۰/۶} = ۰/۵$$

گزینهٔ «۳»: به‌ازای هر مولکول که یونیده می‌شود، ۲ عدد یون حاصل می‌گردد. پس تعداد مولکول‌های یونیده‌شده برابر با ۲۴ است و درصد یونش به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\%\alpha = \frac{\text{تعداد مولکول‌های یونش یافته}}{\text{تعداد کل مولکول‌های حل شده}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۴}{۱۰۰۰} \times ۱۰۰ = \%۲/۴$$

۱۶ ۱ ۲ **۳** ۴ HF، $CH_۳COOH$ و $HCOOH$ اسیدهای تک‌پروتون‌دار هستند. در کربوکسیلیک اسیدها تنها هیدروژن گروه کربوکسیل می‌تواند به‌صورت یون H^+ وارد محلول شود.

۱۷ ۱ ۲ **۳** ۴ بررسی موارد نادرست:

مورد «ب»: برای اسیدهای تک‌پروتون‌دار درست است.

مورد «پ»: هرچه درجهٔ یونش بیشتر باشد، غلظت یون‌ها بیشتر و رسانایی الکتریکی محلول بیشتر می‌شود.

مورد «ت»: در تعادل، غلظت گونه‌ها ثابت می‌مانند. (نه برابر!)

۱۸ ۱ **۲** ۳ ۴ معادله یونش هر دو اسید را می‌نویسیم و مقدار یونش هر دو اسید و ثابت یونش و نسبت اسید قوی به ضعیف را به دست می‌آوریم:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$۰/۲ - x \quad x \quad x \Rightarrow (۰/۲ - x) + x + x = ۰/۲۴ \Rightarrow x = ۰/۰۴$$

$$HB \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$۰/۲ - y \quad y \quad y \Rightarrow (۰/۲ - y) + y + y = ۰/۲۵ \Rightarrow y = ۰/۰۵ \text{ اسید قوی‌تر چون بیشتر یونیزه شده}$$

$$\frac{K_{HB}}{K_{HA}} = \frac{\frac{۰/۰۵ \times ۰/۰۵}{۰/۱۵}}{\frac{۰/۰۴ \times ۰/۰۴}{۰/۱۶}} = \frac{۵}{۳} = ۱/۶۷$$

۱۹ **۱** ۲ ۳ ۴ اغلب فلزها با آب و اسیدها واکنش می‌دهند.

در واکنش فلزها با یک اسید گاز هیدروژن تولید می‌شود.

$$M(s) + HA(aq) \rightarrow H_۲(g) + MA_m$$

در دما و غلظت برابر از چند اسید مختلف، هرچه اسید شرکت‌کننده در واکنش قوی‌تر باشد، غلظت یون هیدروژن بیشتر می‌شود و با افزایش غلظت واکنش‌دهنده سرعت واکنش زیاد می‌شود.

۲۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$CH_۳COOH \rightleftharpoons H^+ + CH_۳COO^-$$

$$K_a=\frac{[H^+][CH_۳COO^-]}{[CH_۳COOH]}=\frac{X^۲}{۲-X}$$

از X می‌توان در مخرج صرف‌نظر کرد، زیرا مقدار آن ناچیز است.

$$K_a=\frac{X^۲}{۲}=۱۸\times ۱۰^{-۶}\Rightarrow X^۲=۳۶\times ۱۰^{-۶}\Rightarrow X=۶\times ۱۰^{-۳}$$

$$\text{درصد یونش}=\frac{[H^+]}{[HA]_{\text{اولیه}}}\times ۱۰۰=\frac{۶\times ۱۰^{-۳}}{۲}\times ۱۰۰=\%۰/۳$$

۲۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴) جرم (۲) از جرم (۱) کمتر است.

$$F_۲=F_۱\rightarrow m_۱a_۱=m_۲a_۲\xrightarrow{m_۲<m_۱}a_۲>a_۱$$

بنابراین در یک زمان یکسان:

$$\begin{cases}\Delta t_۲=\Delta t_۱=\Delta t\\ \Delta x_۲=\frac{۱}{۲}a_۲\Delta t^۲\\ \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}a_۱\Delta t^۲\end{cases}\rightarrow \Delta x_۲>\Delta x_۱\rightarrow (\text{بین } A \text{ و } O \text{ به هم می‌رسند.})$$

۲۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴) شخص قایق را به سمت چپ هُل می‌دهد تا بتواند به سمت راست حرکت کند. بنابراین نیرویی که از طرف قایق به شخص وارد می‌شود برابر است با:

$$F_{۱۲}=m_۱a_۱=۶۰\times ۲=۱۲۰N\ (\text{به سمت راست})$$

طبق قانون سوم نیوتون، عکس‌العمل این نیرو به قایق و به طرف چپ وارد می‌شود. بنابراین:

$$F_{۲۱}=m_۲a_۲\ \Rightarrow\ ۱۲۰=۱۰۰a_۲\ \Rightarrow\ a_۲=۱/۲\ m/s^۲\ (\text{به سمت چپ})$$

۲۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

اگر برآیند چند نیرو صفر شود، در صورتی که یکی از نیروها حذف شود، بزرگی برآیند نیروهای باقی‌مانده به همان اندازهٔ بزرگیِ نیروی حذف شده است.

$$\vec F_۱+\vec F_۲+\vec F_۳+\vec F_۴=۰\Rightarrow \vec F_۱+\vec F_۲+\vec F_۴=-\vec F_۳$$

پس اگر $\vec F_۳$ حذف شود اندازهٔ برآیند بقیهٔ نیروها برابر با اندازهٔ نیروی $F_۳$ است پس:

$$F_۳=ma\Rightarrow ۱۵=۲a\Rightarrow a=۷/۵\frac{m}{s}\Rightarrow \Delta v=a\Delta t=۱۵\frac{m}{s}$$

۲۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴) اگر باسکول وزن شخص را بیشتر از حالت سکون نشان دهد، جهت شتاب آسانسور روبه بالا است، بنابراین داریم:

حرکت تُندشونده رو به بالا : $N=m(g+a)$

حرکت کُندشونده رو به پایین : $N=m(g+a)$

۲۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴) از روی نمودار مشخص است که به ازای اندازهٔ نیروی کشسانی یکسان، افزایش طول فنر (۲)، دو برابر افزایش طول فنر (۱) است. بنابراین:

$$F_e=kx\Rightarrow\frac{(F_e)_۲}{(F_e)_۱}=\frac{k_۲}{k_۱}\times\frac{x_۲}{x_۱}\Rightarrow\ ۱=\frac{k_۲}{k_۱}\times\frac{۲x_۰}{x_۰}\Rightarrow\frac{k_۲}{k_۱}=\frac{۱}{۲}$$

وقتی وزنه‌ای به فنر می‌بندیم و آن را آویزان می‌کنیم، بعد از رسیدن به تعادل داریم:

$$F'_e-W=۰\Rightarrow\ F'_e=W\Rightarrow\ kx'=mg$$

$$\Rightarrow\ \frac{k_۲}{k_۱}\times\frac{x'_۲}{x'_۱}=\frac{m_۲}{m_۱}\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{m_۲}{m_۱}\Rightarrow\ \frac{m_۲}{m_۱}=\frac{۱}{۴}$$

۲۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)** بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) واکنش نیروی mg به زمین وارد می‌شود. (غلط)

گزینهٔ ۲) عکس‌العمل $T_۲$ به نخ وارد می‌شود. (غلط)

گزینهٔ ۳) $T_۲$ به سقف و $T_۱$ به جسم وارد می‌شود و ربطی به‌هم ندارند. (غلط)

گزینهٔ ۴) چون $T_۱$ از طرف نخ وارد شده پس واکنش $T_۱$ به نخ وارد می‌شود. (درست)

۲۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴) با توجه به قانون دوم نیوتون، در ابتدا برایند نیروهای وارد بر جسم را یافته و سپس از آن با استفاده از جمع برداری نیروها، نیروی $\vec f_۳$ و در نهایت بزرگی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec F_{net}=m\vec a\Rightarrow \vec F_{net}=۵(-۴\vec i+۳\vec j)\Rightarrow \vec F_{net}=-۲۰\vec i+۱۵\vec j$$

$$\vec F_{net}=\vec F_۱+\vec F_۲+\vec F_۳\Rightarrow -۲۰\vec i+۱۵\vec j=-۱۵\vec i+۸\vec j-۲۱\vec i+۱۹\vec j+\vec F_۳$$

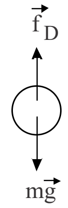
$$\vec F_۳=-۲۰\vec i+۱۵\vec j+۱۵\vec i-۸\vec j+۲۱\vec i-۱۹\vec j\Rightarrow \vec F_۳=۱۶\vec i-۱۲\vec j$$

$$\Rightarrow F_۳=\sqrt{(۱۶)^۲+(-۱۲)^۲}=۲۰N$$

۲۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴) سوی مثبت محور را به طرف بالا می‌گیریم و با توجه به ثابت بودن شتاب داریم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[t=10s]{\Delta y=-100m} -100 = \frac{1}{2}a(10)^2 \Rightarrow a = -2m/s^2$$

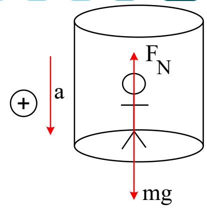
از طرف دیگر بر جسم دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود بنابراین داریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow f_D - mg = ma \Rightarrow f_D - 100 = 10 \times (-2)$$

$$\Rightarrow f_D = 80N$$

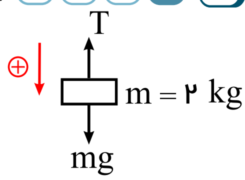
۲۹ ۱ ۲ ۳ **۴** آسانسورحرکت تند شونده به پایین دارد بنابراین، شتاب حرکت روبه پایین است و داریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_N = ma \Rightarrow F_N = m(g-a)$$

$$F_N = 80(10-2) \Rightarrow F_N = 640N$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ **۴** چون حرکت کندشونده است پس شتاب روبه بالا است (در حرکت کندشونده، جهت شتاب و سرعت (حرکت) در خلاف هم هستند)



$$F_{net} = ma \to T - mg = m|a| \to T = m(g+|a|) = 2(10+2) = 24N$$

۳۱ ۱ ۲ **۳** ۴ مبدأ را محل رها کردن گلوله‌ها فرض کردیم. زمان حرکت اولی t و دومی $(t-2/5)$ می‌باشد؛ در این صورت با انتخاب جهت مثبت محور yها رو به پایین داریم:

$$y_1 - y_2 = 68/75 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - (\frac{1}{2}g(t-2/5)^2) = 68/75 \Rightarrow 25t - 31/25 = 68/75 \Rightarrow 25t = 100 \Rightarrow t = 4s$$

۳۲ ۱ **۲** ۳ ۴ دترمینان ماتریس $2A$ را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|2A| = \begin{vmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{vmatrix}$$

$$2^2\,|A| = |A|^2 + 4 \to |A|^2 - 4\,|A| + 4 = 0 \to (|A|-2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

۳۳ ۱ **۲** ۳ ۴

تابع $f(x)$ چهار واحد به راست برده شده، سپس طول نقاطش نصف شده است و سپس عرض‌ها -2 برابر شده است و درنهایت شکل سه واحد به بالا برده شده است.

$$A\left|\begin{matrix}3\\-6\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{چهار واحد راست}} \left|\begin{matrix}7\\-6\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طول نصف}} \left|\begin{matrix}\frac{7}{2}\\-6\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{عرض } -2 \text{ برابر}} \left|\begin{matrix}\frac{7}{2}\\12\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{سه واحد بالا}} \left|\begin{matrix}\frac{7}{2}\\15\end{matrix}\right.$$

۳۴ **۱** ۲ ۳ ۴ اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a) \geq f(b)$، آنگاه $a \leq b$ است.

$$g(x) = \sqrt{f(|x+3|) - f(|x-2|)} \Rightarrow f(|x+3|) - f(|x-2|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x+3|) \geq f(|x-2|) \Rightarrow |x+3| \leq |x-2|$$

برای حل این نوع نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x+3)^2 \leq (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 \leq x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 10x \leq -5 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow D_g = (-\infty\,,\,-\frac{1}{2}]$$

۳۵ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم اگر دو سطر (یا دو ستون) مضربی از هم (یا مانند هم) باشند حاصل دترمینان صفر است. بنابراین اگر $x-1=1$ (یا $x-2=2$) باشند ستون اول (یا ستون دوم) با ستون سوم مانند یکدیگر می‌شوند. پس:

$$\left.\begin{matrix} x-1=1 \to x=2 \\ x-2=2 \to x=4 \end{matrix}\right. \to \text{حاصل‌ضرب جواب‌ها} = 8$$

۳۶ **۱** ۲ ۳ ۴ طرفین فرض سؤال را در A ضرب کرده و از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم:

$$A = 4A^{-1} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A} A^2 = 4\underbrace{AA^{-1}}_{I} \Rightarrow A^2 = 4I$$

$$\Rightarrow A^2 - I = 3I \Rightarrow (A+I)(A-I) = 3I \Rightarrow (A+I) \times \frac{1}{3}(A-I) = I$$

$$\Rightarrow (A+I)^{-1} = \frac{۱}{۳}(A-I)$$

(۳۷) ۴ ۳ ۲ **۱** تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۵$ را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم و داریم:

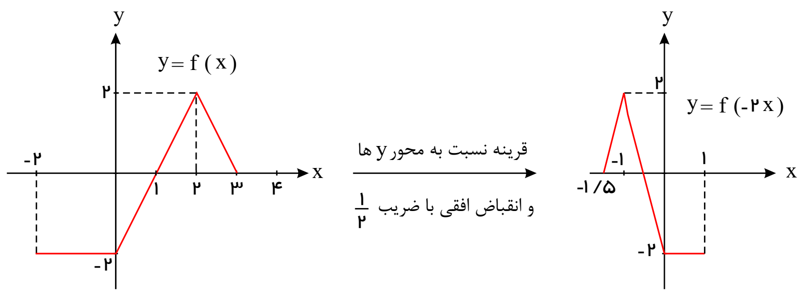
$$f(x) = x^۲ + ۲x + ۱ + ۴ = (x+۱)^۲ + ۴$$

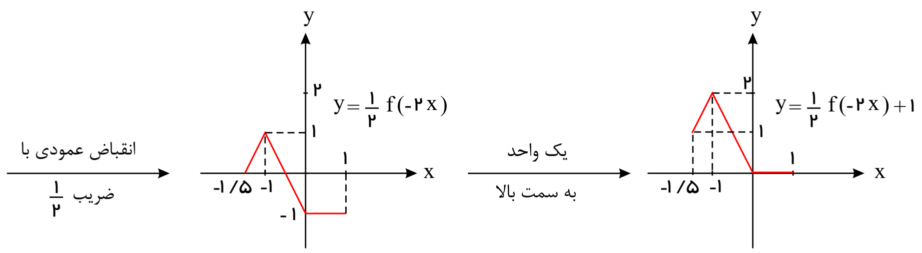
توجه کنید که باید از تابع $f(x)$ به $y = x^۲$ برسیم، پس داریم:

$$f(x) = (x+۱)^۲ + ۴ \xrightarrow{x \to x-۱} y = (x-۱+۱)^۲ + ۴ = x^۲ + ۴ \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۴ واحد به}} y = x^۲ + ۴ - ۴ = x^۲$$

بنابراین باید f را یک واحد به راست و سپس ۴ واحد به پایین منتقل کنیم تا $y = x^۲$ به دست آید.

(۳۸) ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید. سپس با انجام انتقال و انقباض، نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}f(-۲x) + ۱$ را به دست می‌آوریم:





پس دامنهٔ تابع $y = \frac{۱}{۲}f(-۲x) + ۱$ برابر با $[-۱/۵, ۱]$ و برد آن $[۰, ۲]$ است که اشتراک آن‌ها بازهٔ $[۰, ۱]$ می‌شود.

(۳۹) ۴ **۳** ۲ ۱ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} ۲ax + y = -۳ \\ ۶x + (a+۲)y = ۳ \end{cases}$$

شرط وجود بی‌شمار جواب : $\frac{۲a}{۶} = \frac{۱}{a+۲} = \frac{-۳}{۳} \to a = -۳$

(۴۰) **۴** ۳ ۲ ۱

تذکر: اگر $N = p_۱^{\alpha} \times p_۲^{\beta} \times p_۳^{\gamma} \ldots$ آنگاه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی و صحیح N از دستور زیر حاصل می‌شود:

تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی: $N = (\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)\cdots$

تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح: $N' = ۲N$

$$۲۴ \,|n \Rightarrow n = ۲۴q \;;\quad q \in \mathbb{Z}$$

$$n\,|۴۸۰۰ \Rightarrow ۲۴q\,|۴۸۰۰ \xrightarrow{\div ۲۴} q\,|۲۰۰$$

یعنی q مقسوم‌علیه‌های صحیح ۲۰۰ است، پس با تجزیه‌ی ۲۰۰، تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح آن را تعیین می‌کنیم:

$$۲۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲$$

تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح $= ۲(۳+۱)(۲+۱) = ۲۴$

(۴۱) ۴ ۳ **۲** ۱

روش اول:

گزینهٔ ۱ : $a^۴|b^۳ \Rightarrow a \times a^۳|b^۳ \Rightarrow a^۳|b^۳ \Rightarrow a|b \Rightarrow a^۵|b^۵$

گزینهٔ ۳ : $a^۴|b^۳ \Rightarrow a^{۲۰}|b^{۱۵} \Rightarrow a \times a^{۱۹}|b^{۱۵} \Rightarrow a^{۱۹}|b^{۱۵}$

گزینهٔ ۴ : $a|b \Rightarrow a^۶|b^۶ \Rightarrow a^۶|b^۷$

اما رابطهٔ گزینهٔ ۲ درحالت کلی نادرست است مثلاً اگر $a=۸$ و $b=۱۶$ آنگاه $b^۳=۱۶^۳=۲^{۱۲}$, $a^۴=۸^۴=۲^{۱۲}$ است پس $a^۴|b^۳$ ولی $a^۳=۸^۳=۲^۹$ و $b^۲=۱۶^۲=۲^۸$ است پس $a^۳\nmid b^۲$

روش دوم: اگر $a^m|b^n$ و بخواهیم بررسی نمائیم $a^x|b^y$، اگر $\begin{vmatrix} m & n \\ x & y \end{vmatrix}\geq ۰$ رابطه $a^x|b^y$ صحیح است وگرنه نادرست می‌باشد.

$$a^۴|b^۳ \xrightarrow{\text{بررسی گزینه‌ها}} \begin{cases} \text{گزینهٔ ۱}: \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۵ & ۵ \end{vmatrix} = ۴\times ۵ - ۵\times ۳ > ۰ \quad \checkmark \\ \text{گزینهٔ ۲}: \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۴\times ۲ - ۳\times ۳ = -۱ < ۰ \quad \times \\ \text{گزینهٔ ۳}: \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۱۹ & ۱۵ \end{vmatrix} = ۴\times ۱۵ - ۱۹\times ۳ = ۶۰ - ۵۷ > ۰ \quad \checkmark \\ \text{گزینهٔ ۴}: \begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۶ & ۷ \end{vmatrix} = ۴\times ۷ - ۶\times ۳ = ۲۸ - ۱۸ > ۰ \quad \checkmark \end{cases}$$

۴۲ (۴) (۳) **(۲)** (۱) با مرتب کردن xها از کوچک به بزرگ داریم:

$$۳<\sqrt{۱۰}<۴<۵ \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(۳)>f(\sqrt{۱۰})>f(۴)>f(۵)$$

$$\Rightarrow ۵>۴>a>-a+۴ \Rightarrow \begin{cases} a<۴ \\ a>-a+۴ \Rightarrow ۲a>۴ \Rightarrow a>۲ \end{cases} \Rightarrow ۲<a<۴$$

۴۳ (۴) (۳) **(۲)** (۱) سعی کنیم $a^۲$ را حذف کنیم:

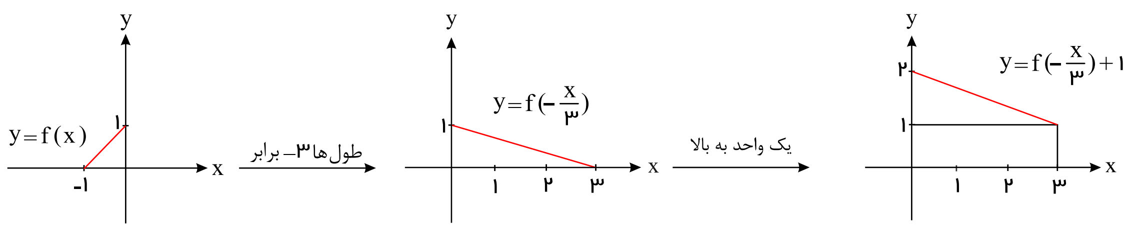
$$\left.\begin{array}{l} d|۳a-۱ \xrightarrow{\times a} d|۳a^۲-a \\ d|a^۲+a \xrightarrow{\times ۳} d|۳a^۲+۳a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|۴a$$

حال سعی می‌کنیم a را حذف کنیم:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d|۴a \xrightarrow{\times ۳} d|۱۲a \\ d|۳a-۱ \xrightarrow{\times ۴} d|۱۲a-۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|۴$$

پس $d\in\{۱,۲,۴\}$ و مجموع مقادیر مختلف می‌شود: $۱+۲+۴=۷$.

۴۴ (۴) (۳) **(۲)** (۱) از آنجایی که برای رسم $y=f(x-۱)$ باید $y=f(x)$ را یک واحد به‌سمت راست منتقل کنیم، پس باید $y=f(x-۱)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم تا $y=f(x)$ به دست آید.



۴۵ (۴) **(۳)** (۲) (۱)

با توجه به داده‌های مسئله، صفر تابع $y=f(x)$، $x=۳$ و صفر تابع $y=g(-\frac{x}{۲})$، $x=-۴$ است. جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال نیز به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۴		-۱		۱		۳		$+\infty$
$f(-x)$		+		+		+		+	۰	−	
$g(-\frac{۱}{۲}x)$		−	۰	+		+		+		+	
$\frac{x+۱}{x-۱}$		+		+	۰	−	ت ن	+		+	
y		−	ت ن	+	۰	−	ت ن	+	۰	−	

$$D_y=(-۴,-۱]\cup(۱,۳] \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x=-۳,-۲,-۱,۲,۳$$

توجه کنیم اگر تابع f صعودی و $f(\alpha)=۰$ باشد، آنگاه برای $x>\alpha$, $f(x)>۰$ و اگر تابع f نزولی و $f(\alpha)=۰$ باشد، آنگاه برای $x>\alpha$, $f(x)<۰$ خواهد بود. همچنین توابع $y=f(-x)$ و $y=g(-\frac{۱}{۲}x)$ به ترتیب اکیداً نزولی و اکیداً صعودی هستند.

۴۶ **(۴)** (۳) (۲) (۱) ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

$$y=-(x-۱)^۳+mx^۳-۳x^۲+۳x+۲=-(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)+mx^۳-۳x^۲+۳x+۲$$

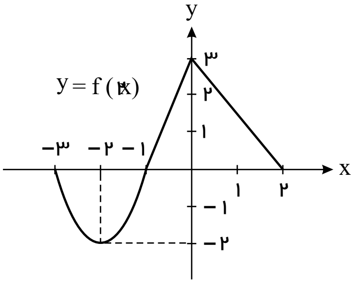
$$y=-x^۳+۳x^۲-۳x+۱+mx^۳-۳x^۲+۳x+۲=(m-۱)x^۳+۳$$

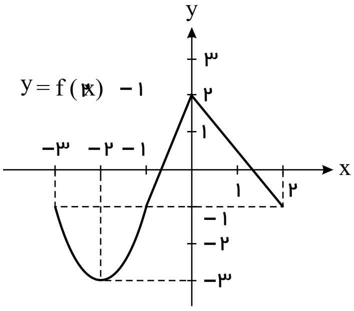
توابع درجه سوم به فرم $y = ax^{۳} + b$ زمانی اکیداً صعودی هستند که $a > ۰$ باشد و زمانی اکیداً نزولی هستند که $a < ۰$ باشد، پس داریم:

$m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱$

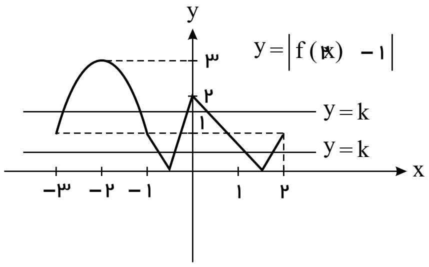
۴۷) ۱ ۲ **۳** ۴ نکته: برای رسم $y = |g(x)|$، در نمودار $y = g(x)$ قسمت‌های زیر محور xها را نسبت به محور xها قرینه کرده و به بالای محور x‌ها می‌آوریم.

ابتدا نمودار $y = |f(۲x) - ۱|$ را به کمک قوانین انتقال معادله را به‌صورت $|f(۲x) - ۱| = k$ نوشته و نقاط برخورد توابع $y = |f(۲x) - ۱|$ و $y = k$ را بررسی می‌کنیم.





طبق شکل مقابل برای آن‌که خط افقی $y = k$ نمودار را در ۴ نقطه قطع کند، باید داشته باشیم:

$\Rightarrow$ 

$۰ < k < ۲, k \neq ۱ \Rightarrow k \in (۰, ۲) - \{۱\}$

باید $y = ۱$ را از بازهٔ $(۰, ۲)$ جدا کنیم، چون به ازای $y = ۱$، پنج نقطه تقاطع داریم. در نمودار بالا خطِ $y = k$ را به ازای دو kی مختلف می‌بینیم.

۴۸) ۱ **۲** ۳ ۴ تابع نمایی $f(x) = a^{x}$ با شرط $a > ۱$ تابعی اکیداً صعودی است. پس داریم:

$$y = \left(\frac{۵ - k}{۱ - ۳k}\right)^{x} \Rightarrow \frac{۵ - k}{۱ - ۳k} > ۱ \Rightarrow \frac{۵ - k}{۱ - ۳k} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۵ - k - ۱ + ۳k}{۱ - ۳k} > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲k + ۴}{۱ - ۳k} > ۰$$

k	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$\frac{۲k+۴}{۱-۳k}$		−	۰	+	ن‌ت	−	

$$\Rightarrow -۲ < k < \frac{۱}{۳}$$

۴۹) ۱ ۲ ۳ **۴** توجه کنید که:

$$۵ \mid ۲x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲۵ \mid ۴x^{۲} + ۴x + ۱ \\ ۲۵ \mid ۱۰x^{۲} + ۵x \end{cases} \Rightarrow ۲۵ \mid ۱۴x^{۲} + ۹x + ۱$$

$$\begin{cases} ۲۵ \mid ۱۰x + ۵ \\ ۲۵ \mid ۱۴x^{۲} + ۹x + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۵ \mid ۱۴x^{۲} + ۱۹x + ۶ \\ ۲۵ \mid ۲۵ \end{cases} \Rightarrow ۲۵ \mid ۱۴x^{۲} + ۱۹x - ۱۹$$

۵۰) ۱ ۲ ۳ **۴** اگر x عددی صحیح باشد آنگاه تنها در صورتی y نیز عددی صحیح خواهد بود که صورت کسر بر مخرج کسر بخش‌پذیر باشد. بنابراین:

$$y = \frac{۳x - ۱}{x + ۲}$$

$x + ۲ | ۳x - ۱ \quad , \quad x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x + ۲ | ۳x - ۱ \\ x + ۲ | x + ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + ۲ | ۳x - ۱ \\ x + ۲ | ۳x + ۶ \end{cases} \Rightarrow x + ۲ | ۷$$

$\Rightarrow x + ۲ = -۱$ یا ۱ یا -۷ یا ۷

$\Rightarrow x = -۳$ یا -۱ یا -۹ یا ۵

a	-۳	-۱	-۹	۵
b	۱۰	-۴	۴	۲

۵۱) ۴ ۳ ۲ ۱ جواب معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ به‌صورت $X=A^{-1}B$ است. داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{۳\times ۲-(-۱)}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۷ & ۰ \\ ۱۴ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس X برابر است با: $۱+۲-۱=۲$