پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴** هر چند نیازی به موازنهٔ واکنش‌ها نیست و معلوم است که از یک مول Fe^{3+} در نهایت یک مول رسوب $Fe(OH)_3$ به دست می‌آید؛ اما معادله‌ها را موازنه می‌کنیم.

$$Fe_2O_3 + 6HCl \rightarrow 2FeCl_3 + 3H_2O$$
$$(FeCl_3 + 3NaOH \rightarrow Fe(OH)_3 + 3NaCl) \times 2$$
$$\underset{(A)}{2Fe^{3+}} \sim Fe_2O_3 \sim \underset{(B)}{2Fe(OH)_3}$$

روش اول

$$5/35gB \times \frac{1molB}{107gB} \times \frac{2molA}{2molB} \times \frac{56gA}{1molA} = 2/8\ gFe^{3+}$$
$$\text{درصد جرمی } Fe = \frac{2/8}{20} \times 100 = 14$$

روش دوم

$$Fe^{3+} \sim Fe(OH)_3$$
$$\frac{20g \times a}{56 \times 100} = \frac{5/35}{107} \Rightarrow a = 14$$

۲ ۱ ۲ ۳ **۴** معادله موازنه شده به صورت زیر است:

$$3BaCl_2(aq) + Al_2(SO_4)_3 \rightarrow 3BaSO_4 + 2AlCl_3$$
$$\text{مول } BaSO_4 : 79/06g \times \frac{97}{100} \times \frac{1mol}{233g} \simeq 0/33mol$$

مطابق ضرایب مواد در معادله موازنه شده، مول $BaCl_2$ مصرف شده با مول $BaSO_4$ یکسان و برابر با ۰/۳۳ مول $Al_2(SO_4)_3$، $\frac{1}{3}$ مول $BaSO_4$ است: $\frac{1}{3} \times 0/33 = 0/11$

۳ ۱ ۲ **۳** ۴ ۵ فقط موارد «آ» و «ب» درست است. عبارت‌های نادرست:

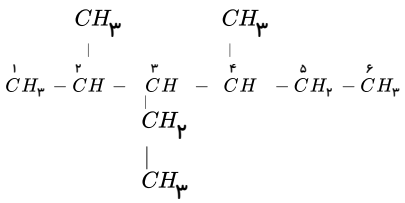
پ) واکنش‌پذیری سدیم بیشتر از آهن است و در واکنش زیر، واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از فرآورده‌هاست.

$$2Na(s) + FeO(s) \rightarrow Na_2O(s) + Fe(s)$$

«ت»: واکنش‌پذیری کربن کمتر از سدیم است و نمی‌تواند جانشین سدیم در اکسید آن شود، یعنی واکنش زیر انجام‌ناپذیر است و واکنش‌پذیری فرآورده‌ها بیشتر از واکنش‌دهنده‌هاست.

$$C(s) + 2Na_2O(s) \rightarrow CO_2(g) + 4Na(s)$$

۴ ۱ **۲** ۳ ۴ ۳-اتیل-۲-۴-دی‌متیل هگزان



زنجیر اصلی را از سمت چپ که به شاخه‌های فرعی نزدیک‌تر است، شماره‌گذاری می‌کنیم. ضمناً در ذکر شاخه‌های فرعی، ترتیب الفبای لاتین را رعایت می‌کنیم به طوری که ابتدا نام شاخهٔ اتیل (E) و سپس نام شاخهٔ متیل (M) را می‌آوریم.

۵ ۱ ۲ **۳** ۴ ۵ عنصر $_{35}X$، عنصر $_{35}Br$ است که در گروه ۱۷ و در دورهٔ چهارم جدول تناوبی جای دارد و موارد اول، دوم و چهارم در مورد آن درست‌اند.

بررسی موارد:

مورد اول) عنصر $_{17}Y$، عنصر $_{17}Cl$ است که در گروه ۱۷ جدول قرار دارد و عنصر $_{20}Z$، عنصر $_{20}Ca$ است که در دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارد.

مورد دوم) برم $(_{35}Br)$ یک نافلز است که با فلزها، ترکیبات یونی و با نافلزها، ترکیبات کووالانسی تشکیل می‌دهد.

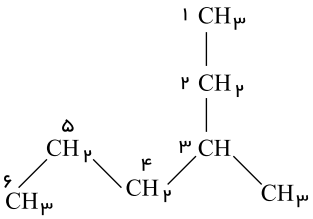
مورد سوم) با توجه به اینکه در هر دورهٔ جدول تناوبی از چپ به راست شعاع اتمی کاهش می‌یابد، $_{35}Br$ شعاع اتمی کوچک‌تری نسبت به عنصرهای قبل از خود در دورهٔ چهارم دارد.

مورد چهارم) برم $(_{35}Br)$ حالت فیزیکی مایع دارد. در صورتی‌که مابقی عنصرهای هم‌دوره و هم‌گروه آن، گاز یا جامد هستند.

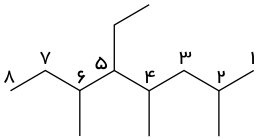
مورد پنجم) عنصر $_{9}F$ که هم‌گروه $_{35}Br$ است، واکنش‌پذیری بیشتری دارد.

۶ ۱ **۲** ۳ ۴ موارد (ب) و (پ) درست‌اند.

آ) زنجیر اصلی ۶ اتم کربن دارد و نام درست ترکیب، ۳ - متیل هگزان است.



ب) ۵ - اتیل - ۲، ۴، ۶ - تری متیل اوکتان



پ) ۴، ۲ - دی متیل پنتان

$$(CH_3)_2CHCH_2CH(CH_3)_2 \rightarrow \overset{1}{C}H_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{2}{C}H}-\overset{3}{C}H_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{4}{C}H}-\overset{5}{C}H_3$$

ت) ۲، ۳، ۴ - تری متیل هپتان

$$CH_3(CH_2)_2CH(CH_3)CH(CH_3)CH(CH_3)_2 \rightarrow \overset{7}{C}H_3-\overset{6}{C}H_2-\overset{5}{C}H_2-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{4}{C}H}-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{3}{C}H}-\underset{\underset{CH_3}{|}}{\overset{2}{C}H}-\overset{1}{C}H_3$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$2Fe_2O_3 + 3C \rightarrow 4Fe + 3CO_2$$

ابتدا مول آهن را به دست می‌آوریم:

$$?molFe = 1/8 \times 10^3 gC \times \frac{1molC}{12gC} \times \frac{4molFe}{3molC} \times \frac{85}{100} \simeq 170molFe$$

$$?kgFe = 170molFe \times \frac{56gFe}{1molFe} \times \frac{1kgFe}{1000gFe} = 9/52kgFe$$

اکنون مقدار Al موارد نیاز (طی فرآیند ترمیت) برای تولید ۱۷۰ مول آهن را به دست می‌آوریم:

$$2Al + Fe_2O_3 \rightarrow Al_2O_3(s) + 2Fe$$

$$?kgAl = 170molFe \times \frac{2molAl}{2molFe} \times \frac{27gAl}{1molAl} \times \frac{1kgAl}{1000gAl} = 4/59kgAl$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$Fe_2O_3(s) + 3CO(g) \rightarrow 2Fe(s) + 3CO_2(g)$$

$$CaO(s) + CO_2(g) \rightarrow CaCO_3(s)$$

$$?tonFe_2O_3\ \text{ناخالص} = \frac{100}{80} \times 2/8 \times 10^6 gFe \times \frac{1molFe}{56\ g\ Fe} \times \frac{1molFe_2O_3}{2molFe} \times \frac{160gFe_2O_3\ \text{خالص}}{1molFe_2O_3} \times \frac{100gFe_2O_3\ \text{ناخالص}}{50gFe_2O_3\ \text{خالص}} \times \frac{1ton}{10^6 g} = 10tonFe_2O_3\ \text{ناخالص}$$

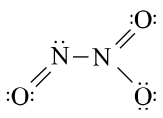
$$?kgCaO = 2/8tonFe \times \frac{10^3 kgFe}{1tonFe} \times \frac{1molFe}{56 \times 10^{-3} kgFe} \times \frac{3molCO_2}{2molFe} \times \frac{1molCaO}{1molCO_2} \times \frac{56 \times 10^{-3} kgCaO}{1molCaO} = 4200kgCaO$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴ مجموع عدد اکسایش کربن‌ها در متیل استات با اتانال یکسان و برابر ۲− است.

متیل استات $= CH_3COOCH_3 = C_3H_6O_2 \Rightarrow 3C + 6(+1) + 2(-2) = 0$

$\Rightarrow 3C = -2$

اتانال $= CH_3CHO = C_2H_4O \Rightarrow 2C + 4(+1) + (-2) = 0 \Rightarrow 2C = -2$

ساختار N_2O_3 به صورت  است که عدد اکسایش نیتروژن سمت چپی (۲+) سمت راستی (۴+) و میانگین ۳+ است

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

دومین عضو خانواده آلکن‌ها : C_3H_6

$$C_3H_6 + Cl_2 \rightarrow C_3H_6Cl_2$$

$$?gC_3H_6Cl_2 = 8/4gC_3H_6 \times \frac{1molC_3H_6}{42gC_3H_6} \times \frac{1molC_3H_6Cl_2}{1molC_3H_6} \times \frac{113gC_3H_6Cl_2}{1molC_3H_6Cl_2} = 22/6gC_3H_6Cl_2$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ عبارت‌های (پ)، (ت) و (ث) درست‌اند.

عنصر قبل از $_{۳۶}Kr$ در دورهٔ چهارم، عنصر برم ($_{۳۵}Br$) است که در گروه ۱۷ قرار دارد.

آ) عدد اتمی عنصرهای گروه ۱۷، به‌ترتیب ۹، ۱۷، ۳۵، ۵۳، ۸۵ و ۱۱۷ است (یعنی یکی کمتر از عدد اتمی گازهای نجیب!). عنصر $_{۵۲}A$ در گروه ۱۶ قرار دارد.

ب) در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد، بنابراین در دورهٔ چهارم، شعاع اتمی $_{۳۵}Br$ کمتر از $_{۱۹}X$ است.

پ) در گروه نافلزها، از بالا به پایین خصلت نافلزی کمتر می‌شود.

ت) برم در دمای اتاق به حالت مایع است درحالی‌که همهٔ عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم، به حالت جامدند.

ث) در آرایش الکترونی $_{۳۵}Br$، ۱۷ الکترون با $l=۱$ ($۲p^۶$، $۳p^۶$ و $۴p^۵$) وجود دارد.

$$_{۳۵}Br : [_{۱۸}Ar]۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۵$$

۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴ به جز عبارت سوم، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

- درهر دوره از چپ به راست، خاصیت نافلزی عنصرها افزایش می‌یابد.
- در گروه‌های کاملاً فلزی (۱ و ۲ بدون در نظر گرفتن H) واکنش‌پذیری (خاصیت فلزی) از بالا به پایین افزایش و در گروه نافلزی هالوژن‌ها از پایین به بالا واکنش‌پذیری (خاصیت نافلزی) افزایش می‌یابد.
- هر فلز قلیایی بیشترین واکنش‌پذیری و ناپایداری را دارد و پایداری آن کمترین است.

$$_{۳۶}^{۸۴}A \quad n = ۸۴ - ۳۶ = ۴۸, n - p = ۴۸ - ۳۶ = ۱۲$$

$$\text{عنصر} \begin{cases} n = ۳ \\ \text{گروه} = ۲ \end{cases} \Rightarrow [_{۱۰}Ne]۳s^۲ \rightarrow z = ۱۲$$

- عنصر Cu است که Cu^+ و $Cu^{۲+}$ دارد.

۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴ آلکان‌ها ناقطبی بوده و چربی پوست را در خود حل کرده و باعث خشکی و ترک خوردن پوست می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱) به خاطر واکنش‌پذیری بسیار کم، سمیت بسیار کمی دارد.

گزینه ۲) سیر شده بوده و از آلکن‌های سیرنشده واکنش‌پذیری کمتری دارند.

گزینه ۴) به خاطر چگالی بالا در ریه‌ها مانده و در اثر استنشاق زیاد آنها، اکسیژن‌رسانی کم شده و احتمال مرگ هم هست.

۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴** فقط مورد اول درست است اما سازمان سنجش، دو مورد را درست در نظر گرفته است.

مورد دوم) در هر دو دسته، عناصر با واکنش‌پذیری کم و زیاد وجود دارد.

مورد سوم) در هر گروه از بالا به پایین، با افزایش جرم اتمی (عدد اتمی)، واکنش‌پذیری فلزها زیاد می‌شود.

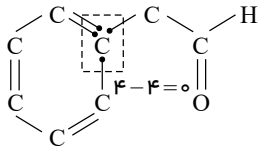
مورد چهارم) در دستهٔ p، جامدهای فلزی مانند Al, Ga, Sn, Pb , ... وجود دارند که شکننده نبوده و سطح صیقلی نیز دارند و تعداد آنها از نافلزات جامد مانند I, P, S و Se بیشتر است.

مورد پنجم)

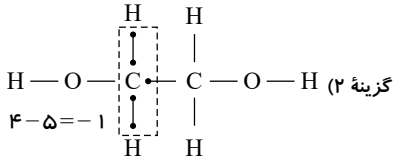
$$Ti : [_{۱۸}Ar]\underbrace{۳d^۲۴s^۲}_{\text{گروه ۴}} \qquad _{۱۴}Si : [_{۱۰}Ne]\underbrace{۳s^۲۳p^۲}_{\text{گروه ۱۴}}$$

۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴ عدد اکسایش اتم کربن ستاره‌دار در هر ترکیب را محاسبه می‌کنیم:

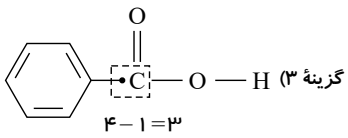
گزینهٔ ۱)



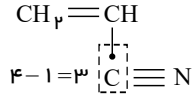
گزینهٔ ۲)



گزینهٔ ۳)



گزینهٔ ۴)



۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ همهٔ عبارت‌ها درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول:

$$n = ۱ \rightarrow _۲He \ , \ _۱H$$
$$n = ۲ \rightarrow _{۱۰}Ne \ , \ _۹F \ , \ _۸O \ , \ _۷N \ , \ _۶C$$

$n=۳ \rightarrow {}_{۱۸}Ar\ ,\ {}_{۱۷}Cl\ ,\ {}_{۱۶}S\ ,\ {}_{۱۵}P$

$n=۴ \rightarrow {}_{۳۶}Kr\ ,\ {}_{۳۵}Br\ ,\ {}_{۳۴}Se$

عبارت دوم: برم، تنها نافلز مایع (در دمای اتاق) است و در دورهٔ چهارم قرار دارد. شبه فلز ژرمانیم ($_{۳۲}Ge$) در این دوره قرار دارد و همهٔ عنصرهای قبل از آن (با عدد اتمی کمتر از ۳۲)، همگی فلزند.

عبارت سوم:

$n=۱ \rightarrow {}_{۲}He\ ,\ {}_{۱}H$

$n=۲ \rightarrow {}_{۱۰}Ne\ ,\ {}_{۹}F\ ,\ {}_{۸}O\ ,\ {}_{۷}N$

$n=۳ \rightarrow {}_{۱۸}Ar\ ,\ {}_{۱۷}Cl$

به‌جز هیدروژن و هلیم، سایر عنصرها (۶ تا) در دستهٔ p قرار دارند.

عبارت چهارم: اگر عنصر x را اکسیژن ($_{۸}O$) فرض کنیم؛ عنصر با عدد اتمی $۱۷ = ۹ + ۸$ یعنی $_{۱۷}Cl$ نیز همانند اکسیژن واکنش‌پذیری بالایی دارد.

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ همهٔ عبارت‌ها نادرست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول: غلظت گونه‌های فلزی موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی بیشتر است.

عبارت دوم: واکنش ترمیت گرماده است!

عبارت سوم: سدیم از آهن واکنش‌پذیری بیشتری دارد؛ پس سدیم می‌تواند آهن را از ترکیب آن خارج کند.

توجه: اگرچه سدیم توانایی استخراج آهن از ترکیباتش در مقیاس آزمایشگاهی را دارد؛ اما در صنعت از کربن برای این منظور استفاده می‌شود. زیرا استفاده از کربن به جای سدیم، صرفهٔ اقتصادی بیشتری دارد.

عبارت چهارم: اگر از نقره به‌جای آلومینیم در واکنش ترمیت استفاده شود؛ اصلاً واکنشی صورت نمی‌گیرد که مقدار فراورده‌ها تغییر کند؛ زیرا نقره واکنش‌پذیری کمتری از آهن دارد و نمی‌تواند آهن را از ترکیبش خارج کند.

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به‌صورت زیر است:

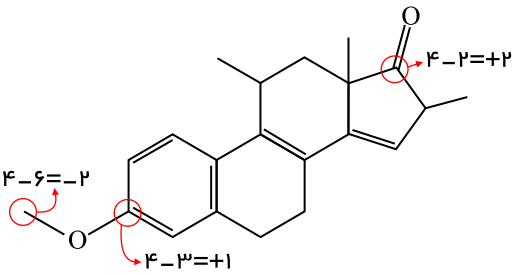
$$۲NH_۴Cl(aq)+۲MnO_۲(s)+Zn(s)\rightarrow ZnCl_۲(aq)+Mn_۲O_۳(s)+۲NH_۳(aq)+H_۲O(l)$$

$$۲NH_۴Cl\sim Mn_۲O_۳ \rightarrow \frac{(۲/۵mol\cdot L^{-۱}\times ۰/۱۶L)molNH_۴Cl\times \frac{R}{۱۰۰}}{۲}=\frac{۲۶/۸۶gMn_۲O_۳}{۱\times ۱۵۸}\Rightarrow R=\%۸۵$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

«الف»: در شکل زیر، عدد اکسایش اتم‌های کربن متصل به اکسیژن مشخص شده است.



«ب»: ابتدا لازم است فرمول مولکولی ترکیب ارائه‌شده را به دست آوریم. در ساختار ترکیب ارائه‌شده، ۲۱ اتم کربن، ۴ حلقه و ۶ پیوند دوگانه وجود دارد. پس شمار اتم‌های هیدروژن آن برابر خواهد بود با:

$$H=۲(۲۱)+۲-۲(۴+۶)=۲۴\Rightarrow \text{فرمول مولکولی}: C_{۲۱}H_{۲۴}O_۲$$

در ادامه با استفاده از فرمول مولکولی ترکیب، مقدار مول اکسیژن لازم برای سوختن کامل یک مول از آن را به دست می‌آوریم:

$$۱molC_xH_yO_z\sim (x+\frac{y}{۴}-\frac{z}{۲})O_۲\Rightarrow ۱molC_{۲۱}H_{۲۴}O_۲\sim \underbrace{(۲۱+\frac{۲۴}{۴}-\frac{۲}{۲})}_{۲۶}molO_۲$$

«پ»: ترکیب ارائه‌شده و پروپن، به‌ترتیب دارای ۴ و ۱ گروه متیل در ساختار خود هستند.

«ت»: در ساختار مولکول ارائه‌شده، ۵ پیوند $C=C$ وجود دارد و هر مول از آن در شرایط مناسب با ۵ مول گاز هیدروژن (معادل $۵\times ۲=۱۰$ گرم) واکنش داده و به یک ترکیب سیرشده تبدیل می‌شود.

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ همهٔ عبارت‌ها درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول: همهٔ شبه‌فلزها در دستهٔ p جدول دوره‌ای قرار دارند.

عبارت دوم: عنصرهای فلزی در جدول دوره‌ای، همواره سمت چپ و پایین عنصرهای نافلزی قرار دارند؛ بنابراین عدد اتمی عنصرهای فلزی در یک گروه همواره بیشتر از عدد اتمی عنصرهای نافلزی همان گروه است.

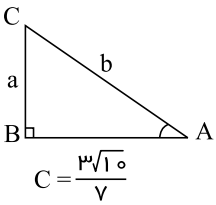
عبارت سوم: Z همان عنصر برم از دورهٔ چهارم است که در دمای اتاق به حالت مایع است. در دورهٔ چهارم، هیچ عنصر گازی با فعالیت شیمیایی زیاد وجود ندارد!

عبارت چهارم: شبه‌فلزها، مرز بین فلزها و نافلزها در جدول دوره‌ای هستند. در سمت چپ عنصرهای شبه‌فلزی، عنصرهای فلزی قرار دارند که عدد اتمی کمتری از عنصرهای شبه‌فلزی دارند.

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بینشان به دست می‌آید.

$$S=\frac{۱}{۲}(۱۲)(۸\sqrt{۳})(\sin ۶۰^\circ)=(۴۸\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۲۴\times ۳=۷۲$$

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴



$$C=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۷}$$

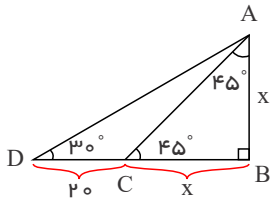
$$sin\ A=\frac{a}{b}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow a=\frac{۲}{۷}b$$

از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

$$a^۲+c^۲=b^۲\Rightarrow(\frac{۲}{۷}b)^۲+\frac{۹۰}{۴۹}=b^۲$$

$$\frac{۴b^۲}{۴۹}+\frac{۹۰}{۴۹}=b^۲\Rightarrow ۴b^۲+۹۰=۴۹b^۲\Rightarrow ۴۵b^۲=۹۰\Rightarrow b^۲=۲\Rightarrow b=\sqrt{۲}$$

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\overset{\triangle}{ABC}: A\hat{C}B=C\hat{A}B=۴۵^\circ\Rightarrow AB=BC=x$$

$$\overset{\triangle}{ADB}: \tan ۳۰^\circ=\frac{AB}{DB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{x}{۲۰+x}$$

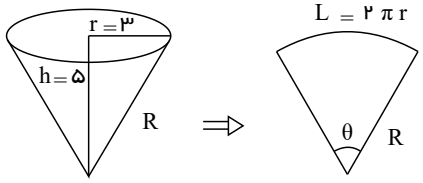
$$\Rightarrow ۳x=۲۰\sqrt{۳}+\sqrt{۳}x\Rightarrow(۳-\sqrt{۳})x=۲۰\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}\times\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}=\frac{۶۰\sqrt{۳}+۶۰}{۹-۳}\Rightarrow x=\frac{۶۰(\sqrt{۳}+۱)}{۶}=۱۰(\sqrt{۳}+۱)$$

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا طبق شکل مقابل اندازهٔ مولد R را می‌یابیم.

محیط قاعدهٔ مخروط برابر طول کمان مقابل به زاویهٔ θ در قطاع است.



$$R^۲=r^۲+h^۲=۹+۲۵=۳۴\rightarrow R=\sqrt{۳۴}$$

$$L=۲\pi r=۲\pi\times ۳=۶\pi$$

$$\theta=\frac{L}{R}=\frac{۶\pi}{\sqrt{۳۴}}\rightarrow \text{مساحت } S=\frac{\theta}{۲\pi}\times\pi R^۲=\frac{\frac{۶\pi}{\sqrt{۳۴}}}{۲\pi}\times\pi\times ۳۴$$

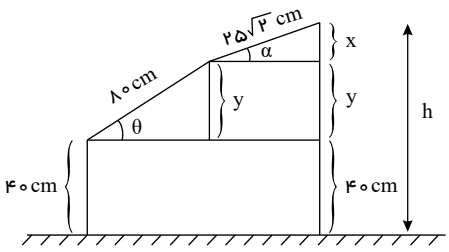
$$S=\frac{۶\pi}{۲\pi\sqrt{۳۴}}\times\pi\times ۳۴=\frac{۳\pi\times ۳۴}{\sqrt{۳۴}}=۳\pi\sqrt{۳۴}$$

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$|۳|A|A|+|\frac{۱}{۲}B|=۳^۲|A|^۲|A|+(\frac{۱}{۲})^۳|B|=۷۴\Rightarrow ۹|A|^۳+\frac{۱}{۸}\times ۱۶=۷۴\Rightarrow ۹|A|^۳=۷۲\Rightarrow|A|^۳=۸\Rightarrow|A|=۲$$

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به شکل زیر داریم:

$$\sin\alpha=\frac{x}{۲۵\sqrt{۲}}\Rightarrow x=۲۵\sqrt{۲}\sin\alpha\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{۸۰}\Rightarrow y=۸۰\sin\theta$$



$$h=۴۰+x+y=۴۰+۲۵\sqrt{۲}\sin\alpha+۸۰\sin\theta$$

$$\Rightarrow h=۴۰+۲۵\sqrt{۲}\sin(-۴۵^\circ)+۸۰\sin(۰)=۴۰-۲۵\sqrt{۲}\sin۴۵^\circ+۰$$

$$\Rightarrow h=۴۰-۲۵\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۴۰-۲۵=۱۵$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$a=۱۵q+۷\xrightarrow[\text{طرفین اضافه می‌کنیم .}]{\text{۴۰ واحد به}}a+۴۰=۱۵q+۴۷\Rightarrow a+۴۰=۱۵\underbrace{(q+۳)}_{q'}+۲\Rightarrow a+۴۰=۱۵q'+۲$$

خارج‌قسمت ۳ واحد افزایش و باقیمانده ۵ واحد کاهش یافته است.

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا $|A|$ را با استفاده از بسط حول ستون دوم محاسبه می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}۴&۰&-۲\\۵&-۱&۶\\۲&۰&۱\end{bmatrix}=-۱\times\begin{vmatrix}۴&-۲\\۲&۱\end{vmatrix}=-۱(۴+۴)=-۸$$

سپس با کمک رابطهٔ $|A^n|=|A|^n$ ، $(n\in\mathbb{N})$، داریم:

$$|A^۳|=|A|^۳=(-۸)^۳=-۲^۹$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴ دستگاه را به‌صورت تساوی ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{cases}ax+by=-۱\\cx+dy=-۲\end{cases}\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}\Rightarrow A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{در }A^{-۱}\text{از سمت چپ ضرب می‌کنیم.}}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-۱}\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$$

با توجه به فرض سؤال $A^{-۱}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\۳&-۲\end{bmatrix}$، پس داریم:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix}\Rightarrow x=-۱,y=۱$$

از طرف دیگر وارون $A^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم تا به ماتریس A برسیم:

$$A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}-۲&-۱\\-۳&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\c=۳\end{cases}$$

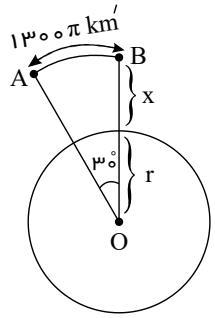
بنابراین داریم:

$$ax+cy=۲(-۱)+۳(۱)=۱$$

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم ۳۰° معادل $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است، پس داریم:

طول کمان $\widehat{AB}$ $\ell=(x+r)\cdot\frac{\pi}{۶}=۱۳۰۰\pi\Rightarrow x+r=۶\times۱۳۰۰$

$$\Rightarrow x+۶۴۰۰=۷۸۰۰\Rightarrow x=۱۴۰۰km$$



۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ شرط آن‌که دستگاه فوق، بیشمار جواب داشته باشد آن است که دو خط متناظر آن‌ها بر هم منطبق شوند، لذا داریم:

$$\underbrace{\frac{۲}{۳m-۱}=\frac{-m-۶}{۲m+۳}}_{(*)}=\frac{m-۸}{m+۴}$$

$$(*):۴m+۶=-۳m^۲-۱۷m+۶\Rightarrow ۳m^۲+۲۱m=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\Rightarrow\frac{۲}{-۱}=\frac{-۶}{۳}=-\frac{۸}{۴}\ \checkmark\\m=-۷\Rightarrow\frac{۲}{-۲۲}=\frac{۱}{-۱۱}\neq\frac{-۱۵}{-۳}\end{cases}$$ غ ق ق

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$a=۸q+۵=۸q+۴+۱=۴(۲q+۱)+۱=۴k+۱\Rightarrow a-۱=۴k\quad(۱)$$

$a = ۹q' + ۷ = ۹q' + ۶ + ۱ = ۳(۳q' + ۲) + ۱ = ۳k' + ۱ \Rightarrow a - ۱ = ۳k' \quad (۲)$

$(۱), (۲) \Rightarrow a - ۱ = ۱۲k'' \Rightarrow a = ۱۲k'' + ۱$

تذکر: عددی که بر ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

تذکر : تقسیم در هم نهشتی

$$\begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ (c\ ,\ m) = d \end{cases} \overset{\div c}{\Rightarrow} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

$۳۶a \overset{۸۴}{\equiv} ۱۹۲ \overset{\div ۱۲}{\rightarrow} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۱۶ \overset{۷}{\equiv} ۲$

$۳a \overset{۷}{\equiv} ۲ \overset{۷}{\equiv} ۹ \overset{\div ۳}{\rightarrow} a \overset{۷}{\equiv} ۳$

$a \overset{۷}{\equiv} ۳ \overset{\times ۲}{\rightarrow} ۲a \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱$

۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$a \quad \left| \begin{array}{l} b \\ \hline q = ۱۹ \\ r = ۵ \end{array} \right. \Rightarrow a = ۱۹b + ۵ \overset{r<b}{\longrightarrow} ۵ < b \overset{b \in \mathbb{N}}{\longrightarrow} b_{\min} = ۶$$

$a = ۱۹b + ۵ \overset{b=۶}{\longrightarrow} Min(a) = ۱۹(۶) + ۵ = ۱۱۹$

بنابراین مجموع ارقام کمترین عدد a برابر $۱۱ = ۹ + ۱ + ۱$ می‌باشد.

۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴ حاصل دترمینان ۳×۳ را با بسط دادن نسبت به سطر دوم محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ m & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} = m(-۱)^{۳} \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} + ۱(-۱)^{۴} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} \quad (۱)$$

بنابر فرض سؤال داریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ m & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} = A - m \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$\overset{(۱)}{\longrightarrow} -m \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} + ۱(۸ - ۳) = A - m \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} \Rightarrow A = ۵$$

۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم در دایره‌ای به شعاع r اگر طول کمان مقابل زاویه θ رادیان برابر L باشد، داریم: $\theta = \frac{L}{r}$

باید محاسبه کنیم که اگر قرقرهٔ بزرگ‌تر ۳۰° بچرخد، چه طولی از تسمه جابه‌جا می‌شود.

$\theta = ۳۰^\circ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}(rad)$

$\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} = \frac{l}{۸} \Rightarrow l = \frac{۸\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۳}$

پس قرقرهٔ کوچک نیز باید این طول از تسمه را جابه‌جا کند. بنابراین:

$\theta' = \frac{l}{r'} = \frac{\frac{۴\pi}{۳}}{۳} = \frac{۴\pi}{۹}$

۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$A\overset{\triangle}{B}C : \tan ۳۰^\circ = \frac{y}{۸\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \rightarrow y = ۸$

$A\overset{\triangle}{B}D : \tan ۶۰^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{۸ + x}{۸\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} \rightarrow ۸ + x = ۲۴ \rightarrow x = ۱۶$

۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ $۷!$ بر ۵۶ بخش‌پذیر است زیرا:

$۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷ \times ۴ \times ۲ \times q$

بنابراین $۷!$، $۸!$ و ... همگی بر ۵۶ بخش‌پذیرند و باقی‌مانده‌شان بر ۵۶، صفر است. پس باید باقی‌ماندهٔ $۵! + ۳! + ۱!$ را بر ۵۶ بیابید.

$۱! + ۳! + ۵! = ۱ + ۶ + ۱۲۰ = ۱۲۷$

باقی‌ماندهٔ ۱۲۷ بر ۵۶ عدد ۱۵ است.

۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴ مساحت قطاع AOB را یافته و مساحت مثلث AOB را از آن کم می‌کنیم.

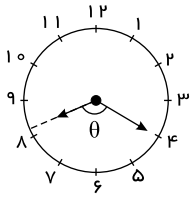
مثلث $S_{\triangle OAB} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴ \sin ۳۰^\circ = \frac{۱۶}{۲} \times \frac{۱}{۲} = ۴$

مساحت قطاع، بخشی از مساحت دایره با زاویهٔ مرکزی ۳۰° است، پس:

قطاع $S_{OAB} = \frac{۳۰}{۳۶۰}\pi r^۲ = \frac{۱}{۱۲} \times \pi \times ۴^۲ = \frac{۱۶\pi}{۱۲} = \frac{۴\pi}{۳}$

رنگی $S = \frac{۴\pi}{۳} - ۴ = \frac{۱}{۳}(۴\pi - ۱۲)$

۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر دقیقه‌شمار روی عدد ۴ و ساعت‌شمار روی عدد ۸ باشد: $\alpha = ۴ \times ۳۰^\circ = ۱۲۰^\circ$



به‌ازای هر ساعت $(۶۰')$ ساعت‌شمار ۳۰° جلو می‌رود، پس داریم:

$$\frac{۲۰'}{۶۰'}\frac{۳۰^\circ}{x} \quad x = \frac{۲۰' \times ۳۰^\circ}{۶۰'} = ۱۰^\circ \Rightarrow \theta = \alpha + ۱۰^\circ = ۱۲۰^\circ + ۱۰^\circ = ۱۳۰^\circ$$

حال ۱۳۰° را به رادیان تبدیل می‌کنیم. برای این کار از تناسب زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱۸۰^\circ}{۱۳۰^\circ} = \frac{\pi_{(Rad)}}{x} \Rightarrow x = \frac{۱۳۰\pi}{۱۸۰} = \frac{۱۳\pi}{۱۸}$$

۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴ چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن برابر صفر است و می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{F_۱} + \overrightarrow{F_۲} + \overrightarrow{F_۳} = ۰ \rightarrow \overrightarrow{F_۲} + \overrightarrow{F_۳} = -\overrightarrow{F_۱} \rightarrow |\overrightarrow{F_۲} + \overrightarrow{F_۳}| = |\overrightarrow{F_۱}| = ۱۰$$

در نتیجه با حذف $\overrightarrow{F_۱}$ بزرگی برایند نیروهای وارد بر جسم برابر با $۱۰N$ و جهت آن هم در خلاف جهت $\overrightarrow{F_۱}$ خواهد شد. اگر جهت نیروی $\overrightarrow{F_۱}$ را مثبت در نظر بگیریم، شتاب جسم پس از حذف نیروی $\overrightarrow{F_۱}$ برابر است با:

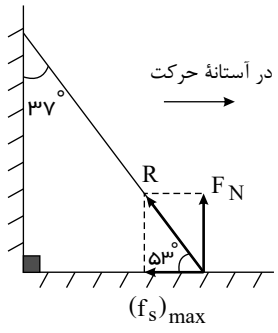
$$\sum F = ma \xrightarrow{\sum F = -۱۰} -۱۰ = ۲a \rightarrow a = -۵\frac{m}{s^۲}$$

حال با توجه به رابطه‌ی سرعت داریم:

$$v = at + v_۰ \rightarrow v = -۵ \times ۲ + ۱۵ = +۵\frac{m}{s}$$

۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

قدم اول: نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، معادل برآیند نیروی اصطکاک و عمودی تکیه‌گاه است، با رسم نیروی وارد بر نردبان از طرف سطح زمین، داریم:



$$\tan ۵۳^\circ = \frac{F_N}{(f_s)_{max}} = \frac{F_N}{\mu_s F_N} = \frac{۱}{\mu_s} \rightarrow \mu_s = \frac{۱}{\tan ۵۳^\circ} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴} \rightarrow \mu_s = ۰/۷۵$$

وزن نردبان تأثیری نداشته است!

۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر برآیند چند نیرو صفر شود، در صورتی که یکی از نیروها حذف شود، بزرگی برآیند نیروهای باقی‌مانده به همان اندازهٔ بزرگیِ نیروی حذف شده است.

$$\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ + \vec{F}_۴ = ۰ \Rightarrow \vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۴ = -\vec{F}_۳$$

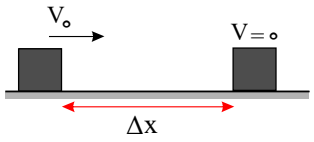
پس اگر $\vec{F}_۳$ حذف شود اندازهٔ برآیند بقیهٔ نیروها برابر با اندازهٔ نیروی $F_۳$ است پس:

$F_{۳} = ma \Rightarrow ۱۵ = ۲a \Rightarrow a = ۷/۵\frac{m}{s} \Rightarrow \Delta v = a\Delta t = ۱۵\frac{m}{s}$

۴۴ ۱ ۲ **۳** ۴ طبق قانون سوم نیوتون، نیروی وارده از طرف جسم به کف آسانسور با نیروی وارده از طرف کف آسانسور به جسم، هم اندازه (شتاب و سرعت (جهت حرکت) هم‌سو هستند) حرکت تندشونده است:

$$\begin{matrix} \text{رو به بالا} & N = m(g+a) \\ \text{رو به پایین} & N' = m(g-a) \end{matrix} \Rightarrow N - N' = ۲ma = ۲ \times ۵ \times ۲ = ۲۰N$$

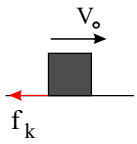
۴۵ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به اینکه پس از پرتاب تنها نیروی مؤثر بر جسم‌ها در راستای افقی، نیروی اصطکاک است، پس حرکت جسم‌ها کند شونده بوده و پس از طی مسافت Δx متوقف می‌شوند.



$$F_{net} = ma \rightarrow -f_k = ma \rightarrow -\mu_k mg = ma \rightarrow a = -\mu_k g$$

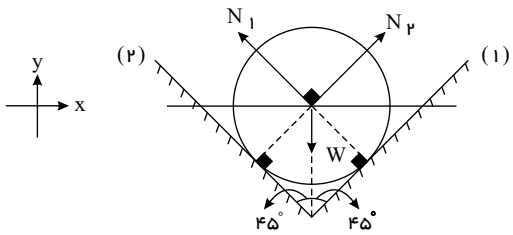
$$v^{۲} - v_{۰}^{۲} = ۲a\Delta x_{\text{توقف}} \xrightarrow{v=۰} \Delta x_{\text{توقف}} = \frac{-v_{۰}^{۲}}{۲a} = \frac{v_{۰}^{۲}}{۲\mu_k g}$$

$$\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{v_{۰A}^{۲}}{v_{۰B}^{۲}} \times \frac{\mu_{k_B}}{\mu_{k_A}} \xrightarrow[\mu_{kA}=۲\mu_{kB}]{v_{۰A}=v_{۰B}} \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{۱}{۲}$$

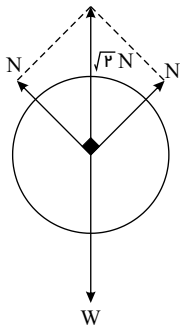


توجه داشته باشید که جرم وزنه‌ها در مسافت توقف آنها تأثیری ندارد.

۴۶ ۱ ۲ **۳** ۴ از متن تست مشخص می‌شود که به دلیل تقارن موجود در شکل نیرویی که دیواره‌ها به جسم وارد می‌کنند (یا بالعکس جسم به دیواره‌ها وارد می‌کند) با هم برابر است. (این موضوع با بررسی توازن نیروها در امتداد محور x به سادگی نتیجه می‌شود)



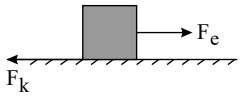
حال با برسی نیروها در راستای قائم داریم:



$$N_۱ = N_۲ = N$$

$$\sqrt{۲}N = W = mg = ۵۰ \rightarrow N = \frac{۵۰}{\sqrt{۲}} = \frac{۵۰\sqrt{۲}}{۲} = ۲۵\sqrt{۲}N$$

۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴



چون سرعت ثابت است، نیروهای وارد بر جسم متوازن‌اند، یعنی نیروی محرک F و نیروی مقاوم اصطحکاک جنبشی هم اندازه‌اند.

$$\vec{v} = \text{ثابت} \rightarrow \vec{a} = \vec{۰} \rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a} = \vec{۰}$$

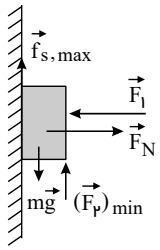
$$F_e - f_k = ۰ \rightarrow F_e = f_k$$

$$f_k = k\Delta x = \mu_k \times mg$$

$$\mu_k \times ۵۰ = ۲۰۰ \times \frac{۵}{۱۰۰} \Rightarrow ۵۰\mu_k = ۱۰ \Rightarrow \mu_k = ۰/۲$$

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴ بسته به اندازهٔ قائم $\vec{F}_{۲}$ ، جسم می‌تواند در آستانهٔ حرکت به سمت پایین و یا بالا باشد.

اگر جسم در آستانهٔ حرکت به سمت پایین باشد، اندازهٔ نیروی $\vec{F}_۲$ ، کمترین مقدار است و نیروی اصطکاک ایستایی به‌طرف بالا بر جسم وارد می‌شود. با رسم نیروهای وارد بر جسم داریم:



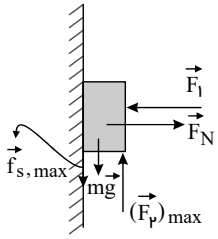
$$(F_{net})_x = ۰ \Rightarrow F_N = F_۱ = ۱۲۰N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۲۵ \times ۱۲۰ \Rightarrow f_{s,max} = ۳۰N$$

$$(F_{net})_y = ۰ \Rightarrow (F_۲)_{min} + f_{s,max} = mg$$

$$\Rightarrow (F_۲)_{min} + ۳۰ = ۴ \times ۱۰ \Rightarrow (F_۲)_{min} = ۱۰N$$

اگرجسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا باشد، اندازهٔ نیروی $\vec{F}_۲$ ، بیشترین مقدار است و نیروی اصطکاک ایستایی به طرف پایین بر جسم وارد می‌شود. با رسم نیروهای وارد بر جسم در این حالت داریم:



$$(F_{net})_x = ۰ \Rightarrow F_N = F_۱ = ۱۲۰N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۲۵ \times ۱۲۰ \Rightarrow f_{s,max} = ۳۰N$$

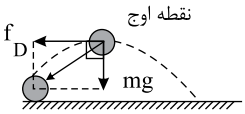
$$(F_{net})_y = ۰ \Rightarrow (F_۲)_{max} = f_{s,max} + mg$$

$$\Rightarrow (F_۲)_{max} = ۳۰ + ۴ \times ۱۰ \Rightarrow (F_۲)_{max} = ۷۰N$$

بنابراین اختلاف اندازهٔ بیشترین و کمترین مقدار نیروی $\vec{F}_۲$ برای اینکه جسم در آستانهٔ حرکت باشد، برابر است با:

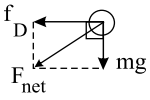
$$\Delta F_۲ = ۷۰ - ۱۰ = ۶۰N$$

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴ نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت است، پس در نقطهٔ اوج، این نیرو افقی است. نیروهای وارد بر توپ را در نقطهٔ اوج رسم کرده و برآیند آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{net} = \sqrt{f_D^۲ + (mg)^۲}$$

همچنین اندازهٔ برآیند نیروها برابر ma است، پس:



$$F_{net} = ma \Rightarrow \sqrt{f_D^۲ + (mg)^۲} = m(\frac{۴}{۳})g \xrightarrow{\text{توان ۲}} f_D^۲ = \frac{۱۶}{۹}(mg)^۲ - (mg)^۲ \Rightarrow f_D^۲ = \frac{۷}{۹}(mg)^۲ \Rightarrow f_D = \frac{\sqrt{۷}}{۳}mg$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$v_۰ = ۷۲\frac{km}{h} = ۲۰\frac{m}{s}$$

شتاب حرکت کندشونده اتومبیل توسط نیروی اصطکاک لغزشی ایجاد می‌شود. پس با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب را می‌یابیم.

$$F_{net} = ma \Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$

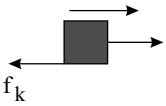
$$a = -\frac{۱}{۴} \times ۱۰ = -\frac{۵}{۲}\frac{m}{s^۲}$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۲۰^۲ = ۲(-\frac{۵}{۲})(\Delta x) \Rightarrow ۴۰۰ = ۵\Delta x \Rightarrow \Delta x = ۸۰m$$

۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴

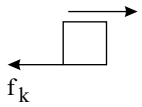
این سوال ترکیبی از حرکت شناسی و دینامیک است. نقطهٔ مشترک این دو مبحث، شتاب حرکت است، بنابراین باید با استفاده از قانون دوم نیوتون، در ابتدا شتاب حرکت را محاسبه کنیم و پس از آن وارد بحث حرکت شناسی می‌شویم.

سؤال دارای دو بخش است. یکی در حضور طناب و دیگری پس از قطع طناب.

ابتدا $\Rightarrow$ 

$\Rightarrow ۵۵۰ - ۵۰۰ = ma_۱ = ۱۰۰a_۱ \Rightarrow a_۱ = ۰/۵\frac{m}{s^۲}$

$f_k = \mu_k F_N = \frac{۱}{۲} \times ۱۰۰۰ = ۵۰۰N$

پس از پاره شدن طناب $\Rightarrow$ 

$\Rightarrow ۰ - f_k = ma_۲ \Rightarrow ۰ - ۵۰۰ = ۱۰۰a_۲ \Rightarrow a_۲ = -۵\frac{m}{s^۲}$

و طبق مفهوم شتاب در لحظهٔ پاره شدن طناب:

$v_{(t=۴)} = a_۱ \Delta t + \cancel{v_۰} \Rightarrow v_{(t=۴)} = ۰/۵ \times ۴ = ۲\frac{m}{s}$

اکنون نمودار $(v - t)$ را رسم می‌کنیم:

$a_۲ = -۵\frac{m}{s^۲} \Rightarrow a_۲ =$ شیب خط مماس $= \frac{۰ - ۲}{\Delta t} = -۵ \Rightarrow \Delta t = ۰/۴s \Rightarrow t' = ۴ + ۰/۴ = ۴/۴s$
$\Rightarrow t' = ۴/۴s$