پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$y=\frac{۴x+۱}{x-۲}\in Z\Rightarrow$ باید $: x-۲|۴x+۱ \xrightarrow{x-۲|x-۲} x-۲|۴x+۱-۴(x-۲)$

$\Rightarrow x-۲|۹ \Rightarrow x-۲\in\{-۹,-۳,-۱,۱,۳,۹\} \xrightarrow{+۲} x\in\{-۷,-۱,۱,۳,۵,۱۱\}$

چون قرار است نقطهٔ مورد نظر در ربع دوم باشد بایستی $x<۰$ و $y>۰$ باشد.

$x=-۱\to y=\frac{۴x+۱}{x-۲}=۱\to$ در ربع دوم است.

$x=-۷\to y=\frac{۴x+۱}{x-۲}=\frac{-۲۷}{-۹}=۳\to$ در ربع دوم است.

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$A^{-۱}$ را از سمت چپ در رابطهٔ ماتریسی ضرب می‌کنیم:

$$AX=A-۲I \xrightarrow{A^{-۱}\times} \underbrace{A^{-۱}A}_{I}X=A^{-۱}(A-۲I)\Rightarrow X=A^{-۱}A-۲A^{-۱}I$$

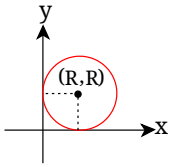
$$\Rightarrow X=I-۲A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-۲\times\frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۴&۲\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۴&۲\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-۲&۱\\۴&-۱\end{bmatrix}$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴

نقطهٔ $(۲,۱)$ در ناحیهٔ اول مختصات واقع است، پس این دایره در ناحیهٔ اول بر محورهای مختصات مماس است. اگر شعاع دایره را R بگیریم، مختصات دایره به‌صورت (R,R) بوده و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$(x-R)^۲+\left(y-R^۲\right)=R^۲$$

از نقطه $(۲,۱)$ گذشته: $(۲-R)^۲+(۱-R)^۲=R^۲\Rightarrow R=۱,۵$



۴ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به فرض، باید دو خط موازی باشند. بنابراین داریم:

$$\frac{m-۳}{۴}=\frac{۳}{m+۱}\neq\frac{m}{۲}\to m^۲-۲m-۱۵=۰\to\begin{cases}m=-۳\\m=۵\end{cases}$$

از طرفی باید $\frac{۳}{m+۱}\neq\frac{m}{۲}$ باشد که $m=-۳$ در این شرایط صدق نمی‌کند. پس فقط $m=۵$ قابل قبول است.

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

تذکر: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، B را وارون A نامند هرگاه: $AB=BA=I$

$$(I-۳A)(I+\lambda A)=I\ \Rightarrow\ I^۲+(\lambda-۳)A-۳\lambda A^۲=I \xrightarrow{A^۲=A} I+(\lambda-۳)A-۳\lambda A=I$$

$$\Rightarrow\ (\lambda-۳-۳\lambda)A=\bar{O}\ \Rightarrow\ (-۲\lambda-۳)A=\bar{O} \xrightarrow{A\neq\bar{O}}\ -۲\lambda-۳=۰\ \Rightarrow\ \lambda=-\frac{۳}{۲}$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

طبق فرض داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&۱\end{bmatrix}}_{B}A\underbrace{\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۱\end{bmatrix}}_{C}=\underbrace{\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۲\end{bmatrix}}_{D}\to BAC=D$$

طرفین تساوی را از سمت چپ در $B^{-۱}$ و از سمت راست در $C^{-۱}$ ضرب می‌کنیم. بنابراین:

$$\underbrace{B^{-۱}B}_{I}A\underbrace{CC^{-۱}}_{I}=B^{-۱}DC^{-۱}\to A=B^{-۱}DC^{-۱}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=B^{-1}DC^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\to A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 2\end{bmatrix}\to |A|=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۷ ۱ ۲ **۳** ۴ طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a=4q+3\xrightarrow{\times 2}2a=8q+6\xrightarrow{+5}2a+5=8q+11=8(q+1)+3\Rightarrow 2a=8k+3\Rightarrow r=3$$

۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

قضیه فرما: اگر p اول باشد و $(a,p)=1$ آنگاه $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$

فرما: $7^{18}\overset{19}{\equiv}1\xrightarrow{\text{توان }11}7^{198}\overset{19}{\equiv}1\xrightarrow{\times 7^2}7^{200}\overset{19}{\equiv}11\overset{19}{\equiv}11\Rightarrow 7^{200}+a\overset{19}{\equiv}11+a\overset{19}{\equiv}0\Rightarrow \min(a)=8$

۹ ۱ **۲** ۳ ۴ سعی کنیم a^2 را حذف کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} d|3a-1\xrightarrow{\times a}d|3a^2-a\\ d|a^2+a\xrightarrow{\times 3}d|3a^2+3a\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|4a$$

حال سعی می‌کنیم a را حذف کنیم:

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} d|4a\xrightarrow{\times 3}d|12a\\ d|3a-1\xrightarrow{\times 4}d|12a-4\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|4$$

پس $d\in\{1,2,4\}$ و مجموع مقادیر مختلف می‌شود: $7=4+2+1$.

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

روش اول: بین این دو تاریخ ۵ ماه ۳۱ روزه (اردیبهشت، خرداد، تیر، مرداد و شهریور) و یک ماه ۳۰ روزه (مهر) و ۳۰ روز از فروردین ($30=1-31$) داریم. لذا جمعاً

$215=30+30+31\times 5$ روز داریم. حال باقیماندهٔ ۲۱۵ به هفت روزِ هفته را حساب می‌کنیم:

پس در این بازه زمانی تعدادی هفته کامل داریم و ۵ روز $\Rightarrow 5\overset{7}{\equiv}215$ اضافه. هفته‌های کامل تا همان روز یکشنبه را می‌سازند. ۵ روز اضافه را باید به یک‌شنبه اضافه کنیم. پنج روز بعد از یک‌شنبه می‌شود جمعه.

روش دوم: می‌توانیم باقیمانده‌های هر ماه به ۷ روز را هم جداجدا حساب کنیم:

مهر	شهریور	مرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت	فروردین	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
۳۰	۳۱	۳۱	۳۱	۳۱	۳۱	۳۰	$\overset{7}{\equiv}$
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
۲	۳	۳	۳	۳	۳	۲	$\overset{7}{\equiv}19=2+$ ۵ روز بعد از یکشنبه یعنی جمعه

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱** ابتدا تمام زوایا را برحسب 15° می‌نویسیم:

$$\cos 285^\circ=\cos(270^\circ+15^\circ)=\sin 15^\circ\ ,\ \sin 255^\circ=\sin(270^\circ-15^\circ)=-\cos 15^\circ$$
$$\sin 525^\circ=\sin(540^\circ-15^\circ)=\sin(180^\circ-15^\circ)=\sin 15^\circ\ ,\ \sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)=\cos 15^\circ$$

بنابراین داریم: $\dfrac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}=\dfrac{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}$

صورت و مخرج را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ+1}{\tan 15^\circ-1}=\frac{0/28+1}{0/28-1}=\frac{1/28}{-0/72}=\frac{-128}{72}=-\frac{16}{9}$$

۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴ هرکدام از نسبت‌های مثلثاتی داده‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\sin\frac{17\pi}{3}=\sin(6\pi-\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{-\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) = \cos\frac{۱۷\pi}{۶} = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۶}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۱۹\pi}{۴} = \tan(۵\pi - \frac{\pi}{۴}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶}) = -\sin\frac{۱۱\pi}{۶} = -\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\sin(\frac{-\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین خواستهٔ سؤال به‌صورت زیر است:

$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) + \tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶}) = (\frac{-\sqrt{۳}}{۲})(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}) + (-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴

ابتدا تمام زوایا را برحسب $^\circ$ ۲۰ می‌نویسیم:

$$\sin ۲۵۰^\circ = \sin(۲۷۰^\circ - ۲۰^\circ) = -\cos ۲۰^\circ \ , \ \sin ۷۰۰^\circ = \sin(۷۲۰^\circ - ۲۰^\circ) = \sin(-۲۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ$$
$$\cos ۵۶۰^\circ = \cos(۵۴۰^\circ + ۲۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\cos ۲۰^\circ \ , \ \cos ۱۱۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ} = \frac{-\cos ۲۰^\circ - \sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ + \sin ۲۰^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos ۲۰$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{-۱ - \tan ۲۰^\circ}{-۱ + \tan ۲۰^\circ} = \frac{-۱ - ۰/۴}{-۱ + ۰/۴} = \frac{-۱/۴}{-۰/۶} = \frac{۱۴}{۶} = \frac{۷}{۳}$$

۱۴ **۱** ۲ ۳ ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر کنیم:

$$y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} - bx) + c \Rightarrow y = a\sin(\frac{\pi}{۲} - b\pi x) + c \Rightarrow y = a\cos b\pi x + c$$

فاصلهٔ افقی بین مینیمم و ماکزیمم متوالی برابر $\frac{T}{۲}$ است. پس داریم:

$$\frac{T}{۲} = ۲ \Rightarrow T = ۴ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|x \text{ ضریب }|} = ۴ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۴ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲}$$

هردوی $\pm\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است، زیرا $\cos(-x) = \cos x$. مطابق شکل ماکسیمم تابع ۲ و مینمم تابع -۶ است. پس:

$$\left.\begin{array}{l} Max = ۲ \to |a| + c = ۲ \\ Min = -۶ \to -|a| + c = -۶ \end{array}\right\} \to c = -۲ \ , \ a = \pm ۴$$

شکل داده شده، فرمت تابع $\cos x$ را دارد. پس فقط $a = ۴$ صحیح است و داریم:

$$f(x) = ۴\cos\frac{\pi}{۲}x - ۲ \xrightarrow{x=\frac{۷}{۳}} f(\frac{۷}{۳}) = ۴\cos(\frac{\pi}{۲} \times \frac{۷}{۳}) - ۲ = ۴\cos\frac{۷\pi}{۶} - ۲$$
$$\Rightarrow f(\frac{۷}{۳}) = ۴\cos(\pi + \frac{\pi}{۶}) - ۲ = ۴(-\cos\frac{\pi}{۶}) - ۲ = -۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۲ = -۲\sqrt{۳} - ۲$$

۱۵ **۱** ۲ ۳ ۴

دورهٔ تناوب تابع $y = a\cos bx + c$ به‌صورت $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و کمترین مقدار آن $Min = -|a| + c$ است.

$$Min = -|a| + ۲ = ۰ \Rightarrow |a| = ۲$$

باتوجه به نمودار، $\frac{۵}{۲}$ دورهٔ تناوب این تابع برابر $\frac{۱۰}{۳} = \frac{۸}{۳} - (-\frac{۲}{۳})$ است؛ درنتیجه داریم:

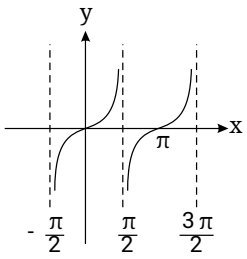
$$\frac{۵}{۲}T = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲ \times ۱۰}{۵ \times ۳} = \frac{۴}{۳}$$

از طرفی دورهٔ تناوب این تابع برابر است با $\frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|}$.

$$\Rightarrow \frac{۲}{|b|} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |ab| = |a||b| = ۲ \times \frac{۳}{۲} = ۳$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: نمودار تابع $y = \tan x$ به‌صورت روبه‌رو است:



نکته: دورهٔ تناوب تابع $y = \tan(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

در شکل سؤال دورهٔ تناوب ۲π است، پس:

$$\frac{\pi}{|k|} = ۲\pi \Rightarrow |k| = \frac{۱}{۲}$$

تابع تانژانت در بازه‌هایی که تعریف شده است، صعودی است درحالی که نمودار شکل داده‌شده نزولی است، پس k مقدار منفی $k = -\frac{۱}{۲}$ است.

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

$$y = a\sin(\frac{\pi}{۲} + b\pi x) = a\cos(b\pi x)$$

از آنجاکه دورهٔ تناوب $y = a\cos bx + c$ برابر است با $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و با توجه به این‌که نمودار ۴ تناوب خود را طی کرده است، داریم:

$$۴T = ۵٫۵ - (-۲٫۵) = ۸ \Rightarrow T = \frac{۸}{۴} = ۲$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$$

و از طرفی نقطهٔ $(۰\ ,۲)$ روی نمودار قرار دارد، پس در ضابطهٔ آن صدق می‌کند، یعنی:

$$۲ = a\cos(۰) \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow a \times b = ۲ \times (\pm ۱) = \pm ۲$$ که عدد ۲ در گزینه‌ها موجود است.

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا توجه کنید که: $f(x) = a\sin(bx - \frac{\pi}{۲}) = -a\cos(bx)$

از روی نمودار معلوم است که نصف دورهٔ تناوب تابع برابر ۳ است. پس:

$$\frac{T}{۲} = ۳ \Rightarrow T = ۶ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{\pi}{۳}$$

همچنین کمترین مقدار تابع برابر -۳ است. پس:

$$|-a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

چون نمودار تابع f شبیه نمودار تابع $y = -\cos x$ است، پس a باید مثبت باشد، بنابراین:

$$f(x) = -۳\cos(\pm\frac{\pi}{۳}x) = -۳\cos(\frac{\pi}{۳}x)$$

$$f(\frac{۵}{۲}) = -۳\cos(\frac{\pi}{۳} \times \frac{۵}{۲}) = -۳\cos(\frac{۵\pi}{۶}) = -۳\cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = ۳\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

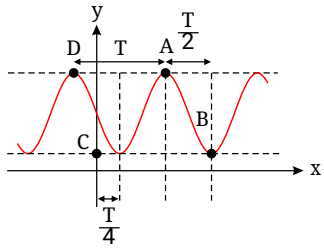
$$\frac{\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) + \cos(۲\pi + \frac{\pi}{۲})}{\cot\theta + \sin(\pi + \frac{\pi}{۳})} = ۱ \Rightarrow \frac{-\sin(\frac{\pi}{۳}) + ۰}{\cot\theta - \sin\frac{\pi}{۳}} = ۱ \Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cot\theta - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cot\theta = ۰$$

با توجه به گزینه‌ها، $\theta = ۲۷۰^\circ$ قابل قبول است.

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ برای تابع f داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴\quad,\quad\begin{cases}\max(f)=|-۳|+۴=۷\\ \min(f)=-|-۳|+۴=۱\end{cases}$$

از طرفی چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه است.



$$\Rightarrow\begin{cases}AD=T=۴\\ BC=T+\frac{۱}{۴}T=۵\\ \text{ارتفاع}=\max(f)-\min(f)=۶\end{cases}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۶(۴+۵)}{۲}=۲۷$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ اکسید B_zO یک اکسید بازی و درنتیجه یک اکسید فلزی است؛ بنابراین این ترکیب از یون‌های $O^{۲-}$ و B^{+} تشکیل شده است.

$$B^{+},O^{۲-}\rightarrow B_۲O\rightarrow\boxed{z=۲}$$

$A_xO_۲$، اکسید اسیدی و درنتیجه یک اکسید نافلزی است، بنابراین x می‌تواند برابر ۱ باشد تا همانند اکسیدهای اسیدی معروف $SO_۲$، $CO_۲$ و... شود.

$$z-x=۲-۱=۱$$

البته z می‌تواند ۱ نیز باشد، (اکسید فلز گروه دوم) ولی گزینه صفر نداریم.

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴ قسمت اول:

$$\%\alpha=\frac{\text{شمار یونیده شده }HCOOH}{\text{شمار حل شده }HCOOH}\times۱۰۰=\frac{۲۰}{۲۰+۲۳۰}\times۱۰۰=\%۸$$

قسمت دوم: ابتدا غلظت مولی اولیهٔ اسید را محاسبه می‌کنیم.

$$M_{HCOOH}=\frac{n}{V}=\frac{\frac{m}{\text{جرم مولی}}}{V}=\frac{(\frac{۰/۲۳}{۴۶})mol}{۰/۱L}=۰/۰۵mol\cdot L^{-۱}$$

سپس غلظت مولی یون $HCOO^{-}$ موجود در محلول را به دست می‌آوریم:

$$[HCOO^{-}]=M_{HCOOH}\alpha=۰/۰۵\times(۸\times۱۰^{-۲})=۴\times۱۰^{-۳}mol\cdot L^{-۱}$$

اکنون می‌توانیم غلظت ppm یون $HCOO^{-}$ را به شکل زیر محاسبه نمائیم.

$$HCOO^{-}\text{ غلظت مولی}=\frac{۱۰\times\overset{\text{درصد جرمی}}{\overset{\uparrow}{a}}\times\overset{\text{چگالی محلول}}{\overset{\uparrow}{d}}}{\text{جرم مولی}}\rightarrow۴\times۱۰^{-۳}=\frac{۱۰\times a\times۱}{۴۵}\rightarrow a=۱/۸\times۱۰^{-۲}$$

$$ppm\text{ غلظت}=۱۰^{۴}\times\text{درصد جرمی}=۱۰^{۴}\times۱/۸\times۱۰^{-۲}=۱۸۰ppm$$

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴ در باز بسیار قوی $\alpha=۱$ بوده بنابراین در HX، $\alpha=۰/۵$ می‌باشد.

$$[H^{+}]=M\cdot n\cdot\alpha=۰/۵\times۱\times۱=۰/۵mol/L$$

$$pH=-\log[H^{+}]=-\log(۰/۵)=-log۵\times۱۰^{-۱}=۱-۰/۷=۰/۳$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: با توجه به رابطهٔ $K_\alpha=\alpha^{۲}M$ و ثابت یون مقدار K_α در دمای معین، با افزایش غلظت اسید HA، درجه یونش کاهش می‌یابد

گزینهٔ «۲»: به عنوان مثال غلظت یون OH^{-} در محلول با $pH=۱$، در محلول اسید HA، با غلظت یون H^{+} در محلول با $pH=۱۳$ در محلول باز BOH برابر است.

گزینهٔ «۴»: pH محلول یک مولار HBr برابر صفر است؛ با توجه به آنکه pH محلول ۳ مولار اسید موردنظر، در محدوده صفر تا ۷ است، پس میزان یونش این اسید از HBr کمتر بوده و از آن ضعیف‌تر است.

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴ عبارت‌های دوم تا چهارم نادرست هستند.

بررسی موارد:

مورد اول: در هر دو ظرف ۱۰ ذره وجود دارد؛ بنابراین مول هر دو گاز برابر ۰/۵ است.

مورد دوم: چون مول در هر ظرف برابر ۰/۵ است، پس حجم آن‌ها در شرایط STP برابر ۱۱/۲ لیتر است.

مورد سوم:

$$\frac{m(N_۲)}{m(CO_۲)}=\frac{۰/۵\times۲۸}{۰/۵\times۴۴}\simeq۰/۶۴$$

مورد چهارم: مول گازها و حجم دو ظرف برابر است؛ بنابراین غلظت مولی هر دو گاز نیز برابر می‌باشد.

۲۵) ۱ ۲ ۳ **۴** همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

- HCl یک اسید قوی و HF یک اسید ضعیف است؛ با توجه به اینکه pH دو محلول یکسان است، برای دستیابی به یک غلظت معین از H_3O^+ در محلول به شمار مول HCl کمتری نیاز است.
- HF یک اسید ضعیف است و به‌طور عمده به شکل مولکولی حل می‌شود. درحالی که HCl یک اسید قوی است وبه‌طور کامل یونیده می‌شود. بنابراین شمار مولکول‌ها در محلول HF بیشتر از HCl است.
- با توجه به برابری pH دو محلول می‌توان نتیجه گرفت غلظت یون هیدرونیوم در دو محلول و در نتیجه غلظت آنیون‌ها در دو محلول با هم برابر است. بنابراین رسانایی الکتریکی دو محلول با هم برابر است.
- با توجه به برابر بودن شمار یون‌ها در دو محلول و اینکه در محلول HF، مولکول یونیده‌نشده نیز وجود دارد، مجموع شمار گونه‌ها در محلول HF بیشتر است.

۲۶) ۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا K_a را به دست می‌آوریم:

$$\%\alpha = \alpha \times ۱۰۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۰/۲}{۱۰۰} = ۲ \times ۱۰^{-۳}$$

$$K_a \simeq M\alpha^۲ = ۵ \times ۱۰^{-۳} \times (۲ \times ۱۰^{-۳})^۲ = ۲ \times ۱۰^{-۸}$$

حال در محلول جدید داریم:

$$pH = ۵/۳ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۶} \times ۱۰^{۰/۷} = ۵ \times ۱۰^{-۶}$$

$$۲ \times ۱۰^{-۸} = \frac{۵ \times ۱۰^{-۶} \times ۵ \times ۱۰^{-۶}}{[HA]} \Rightarrow [HA] = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}$$ غلظت تعادلی اسید

۲۷) ۱ **۲** ۳ ۴ عبارت‌های اول و دوم درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت سوم: N_2 و H_2 در مراحل پایانی از ظرف واکنش خارج نمی‌شوند بلکه به سمت محفظهٔ انجام واکنش هدایت می‌شوند.

عبارت چهارم: راه‌کارها بر استفاده از تفاوت در نقطهٔ جوش مواد بود نه نقطهٔ مذاب!

۲۸) ۱ **۲** ۳ ۴

ظرف ۱: $Na_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow ۲Na^+(aq) + ۲OH^-(aq)$ ۴ مول یون

ظرف ۲: $N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow ۲H^+(aq) + ۲NO_3^-(aq)$ ۴ مول یون

ظرف ۳: $NaCl(s) \xrightarrow{H_2O} Na^+(aq) + Cl^-(aq)$ ۲ مول یون

ظرف ۴: $NH_3(g) + H_2O(l) \leftrightharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$ کم‌تر از ۲ مول یون

محلول NH_3 در آب، الکترولیت ضعیف است و یونش کاملی ندارد. از این رو تعداد مول یون‌های حاصل از آن کمتر از ۲ مول است.

توضیح گزینهٔ (۴): فقط دو ظرف از این مجموعه خاصیت بازی دارند، در نتیجه غلظت یون هیدروکسید از غلظت یون هیدرونیوم بیشتر است.

۲۹) **۱** ۲ ۳ ۴ ابتدا غلظت مولی اسید قبل از یونش را محاسبه می‌کنیم:

شمار مول HF حل شده برابر است با:

$$?molHF = ۵۰۰mL\ HF \times \frac{۱L}{۱۰۰۰mL} \times \frac{۴g}{۱L} \times \frac{۱mol}{۲۰g} = ۰/۱mol$$

غلظت مولی HF برابر است با:

$$M = \frac{n}{V} = \frac{۰/۱mol}{۰/۲۰۰L} = ۰/۵\ mol \cdot L^{-۱}$$

	HF	$\leftrightharpoons$	H^+	+	A^-
غلظت مولی قبل از یونش	۰/۵		۰		۰
غلظت مولی پس از یونش	$۰/۵-x$		x		x

$$\Rightarrow \begin{cases} [HF]_{\text{تعادلی}} = [HF]_{\text{یونیده نشده}} = ۰/۵ - x \\ \text{غلظت یون‌ها} = x + x = ۲x \end{cases}$$

چون همگی گونه‌ها در حجم ۲۰۰ میلی‌لیتر قرار دارند پس نسبت بین غلظت‌ها، همان نسبت بین مول‌های آن‌ها و همان نسبت بین ذرات آن‌هاست:

$$\frac{\text{غلظت مولی اسید یونیده نشده}}{\text{غلظت مولی یون‌ها}} = \frac{\text{شمار مول‌های اسید یونیده نشده}}{\text{شمار مول‌های یون‌ها}} = \frac{\text{شمار مولکول‌های اسید یونیده نشده}}{\text{شمار یون‌ها}} = \frac{۰/۵ - x}{۲x} = ۱۲$$

$$\rightarrow ۲۴x = ۰/۵ - x \rightarrow ۲۵x = ۰/۵ \rightarrow x = \frac{۰/۵}{۲۵} = ۰/۰۲mol \cdot L^{-۱}$$

غلظت کل گونه‌ها $= (۰٫۵ - x) + x + x = ۰٫۵ + x = ۰٫۵ + ۰٫۰۲ = ۰٫۵۲ mol \cdot L^{-۱}$

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: نادرست: سرعت واکنش فلز منیزیم با محلول دارای قدرت اسیدی بیشتر (نیتریک‌اسید)، بیشتر است.

گزینهٔ «۲»: معادلهٔ یونش دو اسید به صورت زیر است:

$$HNO_۳ \rightarrow H^+ + NO_۳^- \qquad HNO_۲ \rightleftharpoons H^+ + NO_۲^-$$

اگر نیتروواسید به‌طور کامل یونیده می‌شد، تفاوت جرم دو آنیون تولید شده، ۱۶ گرم به ازای یک مول و ۱٫۶ به ازای ۰٫۱ مول می‌بود. ولی چون میزان یونش $HNO_۲$ تعادلی است قطعاً این مقدار از ۱٫۶ بیشتر خواهد بود.

گزینهٔ «۳»: در محلول (I) برخلاف محلول (II) مولکول‌های یونیده نشده نیز وجود دارد. بنابراین شمار مولکول‌ها در محلول (I) بیشتر از محلول (II) است.

گزینهٔ «۴»: نادرست. غلظت H^+ تولیدی در دو ظرف یکسان نیست. زیرا $HNO_۲$ برخلاف $HNO_۳$ یک اسید ضعیف بوده و به طور جزئی یونیده می‌شود. بنابراین غلظت یون H^+ در محلول $HNO_۳$ بیشتر از محلول $HNO_۲$ است.

$$\alpha_{HNO_۳} = ۱ \qquad \alpha_{HNO_۳} < ۱$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ تمامی عبارت‌های ذکرشده درست هستند.

مورد اول: HX، ضعیف‌ترین اسید است زیرا کمتر از دو اسید دیگر یونش یافته است.

مورد دوم: هیچ‌کدام از اسیدها به‌طور کامل یونیده نشده‌اند پس واکنش یونش هر سه تعادلی است.

مورد سوم: اسید HY به‌طور عمده یونیده شده در حالی که میزان یونش استیک اسید بسیار کم است.

مورد چهارم: با توجه به میزان یونش اسیدها می‌توان نوشت:

قدرت اسیدی: $HY > HZ > HX$

مورد پنجم: هیدروسیانیک اسید، اسید ضعیف‌تری از هیدروفلوئوریک اسید است.

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴ در لحظهٔ تعادل که ما شاهد آن هستیم، دو یون هیدروکسید و دو یون آمونیوم و هشت مولکول یونیزه نشده آمونیاک وجود دارد، پس تعداد آمونیاک اولیه ۱۰ مولکول بوده است.

$$\text{درجه یونش } (\alpha) = \frac{[OH^-]}{[NH_۳]_{\text{اولیه}}} = \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow \%\alpha = ۲۰\%$$

$$K_b = \frac{\frac{۰٫۰۰۲}{۰٫۵} \times \frac{۰٫۰۰۲}{\not{۰٫۵}}}{\frac{۰٫۰۰۸}{\not{۰٫۵}}} = \frac{۰٫۰۰۲}{۰٫۵ \times ۴} = ۱۰^{-۳}$$

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا در محلول HF، غلظت اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$HF \begin{cases} pH = ۳٫۷ \Rightarrow [H^+] = ۲ \times ۱۰^{-۴} \\ \alpha = ۰٫۲ \times ۱۰^{-۲} \end{cases} \Rightarrow M_۱ = \frac{[H^+]}{\alpha} = \frac{۲ \times ۱۰^{-۴}}{۲ \times ۱۰^{-۳}} = ۰٫۱ mol \cdot L^{-۱}$$

$$pH = ۱۲٫۳ \Rightarrow pOH = ۱٫۷ \Rightarrow [OH^-] = ۱۰^{-pOH} = ۱۰^{-۱٫۷} = ۱۰^{-۲+۰٫۳} \Rightarrow [OH^-] = ۲ \times ۱۰^{-۲} \frac{mol}{L} \Rightarrow [OH^-] = nM\alpha$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۲} = ۲ \times M \Rightarrow M_۲ = ۰٫۰۱ mol \cdot L^{-۱}$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\Rightarrow \frac{۰٫۱}{۰٫۰۱} = ۱۰$$

۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴ حل قسمت آ و ب:

خواص فرآوردهٔ واکنش لیتیم اکسید با آب مشابه فرآوردهٔ واکنش CaO و $K_۲O$ با آب است.

در فرآوردهٔ واکنش هر سه مورد گفته شده با آب، یون هیدروکسید (OH^-) دیده می‌شود که خاصیت بازی دارد.

حل قسمت دوم: معادلهٔ واکنش لیتیم اکسید با آب به صورت زیر است:

$$Li_۲O + H_۲O \rightarrow ۲LiOH$$

آب مقطر خنثی است و $pH = ۷$ دارد. با اضافه کردن لیتیم اکسید pH آن به بالای ۷ افزایش می‌یابد و در صورت ۵۰ درصد تغییر به عدد ۱۰٫۵ می‌رسد.

$$pH + pOH = ۱۴ \xrightarrow{pH=۱۰٫۵} pOH = ۳٫۵$$

از طرفی داریم:

$$[OH^-] = ۱۰^{-pOH} \Rightarrow [OH^-] = ۱۰^{-۳٫۵} = ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{۰٫۵} = ۳ \times ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱}$$

در ادامه می‌توان جرم $Li_۲O$ را به دست آورد:

$$?mgLi_2O=\frac{3\times10^{-4}molLiOH}{1L}\times\frac{1molLi_2O}{2molLiOH}\times\frac{30gLi_2O}{1molLi_2O}\times\frac{1000mg}{1g}=11/25mgLi_2O$$

۳۵ ۱ ۲ **۳** ۴ «آ و ت»: درست می‌باشند، زیرا $NaOH$ باز قوی است و تفکیک آن کامل بوده و pH آن ۱۴ است و رسانایی محلول آن زیاد است.

ب) نادرست است، زیرا غلظت یون هیدرونیوم با یون OH^- رابطهٔ عکس دارد و در محلول $NaOH$ که غلظت OH^- زیاد است یون هیدرونیوم کم می‌باشد.

پ) ثابت یونش اسیدی و بازی فقط تابع دما است.

۳۶ ۱ ۲ **۳** ۴ موارد (آ)، (ب) و (ت) درست‌اند.

مورد آ) زغال‌سنگ در مقایسه با دیگر سوخت‌ها ارزان‌تر بوده و تنوع فرآورده‌های سوختن آن بیشتر است.

مورد ب) ترتیب گرمای حاصل از سوختن یک گرم از این مواد به صورت هیدروژن > گاز طبیعی > بنزین > زغال‌سنگ است.

مورد پ) گاز هیدروژن مانند سوخت‌های فسیلی می‌تواند با اکسیژن بسوزد و نور و گرما تولید کند.

مورد ت) SO_2 یکی از فراورده‌های حاصل از سوختن زغال سنگ است که می‌تواند منجر به تولید باران اسیدی شود.

۳۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$1)2H_2+O_2\rightarrow2H_2O$$
$$2)CH_4+2O_2\rightarrow CO_2+2H_2O$$

ابتدا گرم آب تولیدشده در واکنش (۲) را حساب می‌کنیم:

$$?gH_2O=17/6gCO_2\times\frac{1molCO_2}{44gCO_2}\times\frac{2molH_2O}{1molCO_2}\times\frac{18gH_2O}{1molH_2O}=14/4gH_2O$$

پس در واکنش اول $32/4=14/4-46/8$ گرم آب تولید شده است و داریم:

$$?gH_2=32/4gH_2O\times\frac{1molH_2O}{18gH_2O}\times\frac{2molH_2}{3molH_2O}\times\frac{2gH_2}{1molH_2}=3/6gH_2$$

برای متان در مخلوط اولیه داریم:

$$?gH=14/4gH_2O\times\frac{1molH_2O}{18gH_2O}\times\frac{4molH}{2molH_2O}\times\frac{1gH}{1molH}=1/6gH$$

$$\rightarrow?gCH_4=1/6gH\times\frac{16gCH_4}{4gH}=6/4gCH_4$$

بنابراین درصد جرمی اتم هیدروژن در مخلوط گازی آغازین برابر است با:

$$H\text{ درصد جرمی}=\frac{3/6+1/6}{3/6+6/4}\times100=\frac{520}{10}=52\%$$

۳۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$$?\text{ درخت}=1\text{ سال}\times\frac{365\text{ روز}}{1\text{ سال}}\times\frac{50km}{1\text{ روز}}\times\frac{0/25kg}{1km}\times\frac{1\text{ درخت}}{55kg\ CO_2}\simeq83\text{ درخت}$$

۳۹ ۱ ۲ **۳** ۴ بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: مایع‌ها حجم معینی دارند.

گزینهٔ «۲»: با افزایش فشار بر یک نمونه گاز، حجم نمونهٔ گازی کمتر می‌شود نه حجم مولکول‌های گاز!

گزینهٔ «۴»: در دما و فشار ثابت، حجم یک مول گاز CO با حجم یک مول گاز CO_2 برابر است.

۴۰ ۱ ۲ ۳ **۴** قسمت اول:

$$N_2(g)+O_2(g)\rightarrow2NO(g)$$

هر مول N_2 (معادل ۲۸ گرم) با یک مول O_2 (معادل ۳۲ گرم) به‌طور کامل واکنش می‌دهد. بنابراین به‌ازای تولید ۲ مول گاز NO، اختلاف جرم واکنش‌دهنده‌ها برابر $32-28=4$ گرم است.

$$4g(\text{ اختلاف جرم واکنش‌دهنده‌ها })\sim2mol\ NO$$

$$\Rightarrow\frac{\text{اختلاف }0/125}{4}=\frac{xgNO}{2\times30}\Rightarrow x=\frac{2\times30}{4\times8}=\frac{15}{8}=1/875gNO$$

قسمت دوم:

$$2NO(g)+O_2(g)\rightarrow2NO_2(g)$$

$$۲NO \sim ۲NO_۲ \Rightarrow \frac{\frac{\overset{۱}{\cancel{۷۵}}}{۸}gNO}{۲ \times \overset{۲}{\cancel{۳۰}}} = \frac{xLNO_۲}{۲ \times ۲۲٫۴} \Rightarrow x = \frac{۲۲٫۴ \times ۲}{۳۲} = \frac{۵٫۶ \times ۲}{۸} = ۰٫۷ \times ۲ = ۱٫۴LNO_۲$$