



۱- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ رابطه $A^2 = \alpha A + \beta I$ برقرار است. دوتایی (α, β) کدام است؟

- ① $(2, 11)$ ② $(2, 13)$ ③ $(4, 11)$ ④ $(4, 13)$

۲- اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{bmatrix}$ حاصل $|A|$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳- اگر A ماتریسی 3×3 و $A = \frac{1}{2}I$ باشد، مقدار مثبت $|A|$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{4}$ ② ۴ ③ $\frac{1}{8}$ ④ ۸

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌های ماتریس $(2A - B) \times B$ کدام است؟

- ① ۲ ② -۲ ③ ۴ ④ -۴

۵- اگر $3A + 2B = I$ و $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

- ① ۲ ② ۳ ③ ۶ ④ ۸

۶- حاصل ضرب جواب‌های معادله $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 2 & x-2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- ① ۶ ② ۴ ③ ۱۲ ④ ۸

۷- اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند که $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} A$ کدام است؟

- ① ۵ ② ۶ ③ ۸ ④ ۱۰

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{100} کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} 101 & -100 \\ 100 & -99 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 200 & -100 \\ 100 & 99 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 101 & 100 \\ -100 & 99 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 200 & -100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix}$

۹- اگر $A = 4A^{-1}$ ، وارون ماتریس $A + I$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}(A - I)$ ② $\frac{1}{4}(A - I)$ ③ $\frac{1}{3}(I - A)$ ④ $\frac{1}{4}(I - A)$

۱۰- اگر $\bar{O} = A^2 + 5A + 2I$ باشد A^{-1} کدام است؟

- ① $(A + 5I)$ ② $\frac{1}{2}(A + 5I)$ ③ $-\frac{1}{2}(A + 5I)$ ④ $-(A + 5I)$

۱۱- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ در رابطه ماتریسی $AX = A - 2I$ صدق می‌کند. ماتریس X کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ و $3A - 2X = 4I$ آنگاه ماتریس X کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}$

۱۳- ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{r \times r}$ و $B = [b_{ij}]_{r \times r}$ و $C = [c_{ij}]_{r \times r}$ مفروض‌اند، کدام عبارت قابل تعریف نیست؟

- ① $AB + C$ ② BCA ③ ABC ④ $BC + A$

۱۴- اگر $A = [a_{ij}]_{r \times r}$ و $|A| = \frac{1}{4}$ باشد، دترمینان وارون ماتریس $2A^T$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{4}$ ④ 4

۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در ماتریس $2A - 3B$ مجموع درایه‌های روی قطر اصلی کدام است؟

- ① 0 ② 1 ③ -2 ④ 4

۱۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مجموع درایه‌های وارون $B = \begin{bmatrix} a+3 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- ① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2

۱۷- اگر $A^{-1} + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل دترمینان ماتریس $A + I$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{3}$

۱۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{100} کدام است؟

- ① 2 ② $2^{100} + 1$ ③ 1 ④ $2^{100} + 1$

۱۹- اگر به درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون سوم ماتریس $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & b \\ 7 & 10 & c \end{vmatrix}$ سه واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان چند واحد اضافه می‌شود؟

- ① 2 ② 6 ③ 4 ④ 3

۲۰- اگر $2A + 3I = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ دترمینان $A^T - 3A$ کدام است؟

- ① 2 ② -2 ③ -4 ④ 4

۲۱- اگر $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس A کدام است؟

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$

۲۲- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ y & -3 \end{bmatrix}$ تعویض پذیرند، حاصل $x - y$ کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱ (۴)

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل ضرب درایه‌های واقع در سطر سوم ماتریس AB کدام است؟

- ۱۲ (۱) -۱۲ (۲) ۱۸ (۳) -۱۸ (۴)

۲۴- مجموع ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ کدام است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

۲۵- اگر $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a + b + e$ کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴)

۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $A^2 + AB + BA + B^2$ کدام است؟

- ۴۱ (۱) ۴۱ (۲) ۲۱ (۳) -۲۱ (۴)

۲۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^2 + AB + 3B$ کدام است؟

- ۳۱ (۱) ۶۱ (۲) ۹۱ (۳) ۱۲۱ (۴)

۲۸- در معادله $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس X کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $|A + A^{-1}|$ کدام است؟

- ۸ (۱) -۱۶ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴)

۳۰- اگر $X + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد وارون ماتریس X کدام است؟

- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (۱) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (۴)

۳۱- اگر $A^2 = \bar{O}$ باشد وارون $A - I$ کدام است؟

- A - I (۱) I - A (۲) A + I (۳) A (۴)

۳۲- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -2 & n & -1 \\ 2 & 1 & -m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & -2 \\ 1 & m \\ 2n & 3 \end{bmatrix}$ به طوری مفروض‌اند که AB ماتریس قطری است. حاصل $m - n$ کدام است؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $-\frac{13}{6}$

۳۳- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i - j^2, & i < j \\ i + j, & i \geq j \end{cases}$ می‌باشد حاصل $a_{12} + a_{22}$ کدام است؟

- ① -1 ② -3 ③ 5 ④ 2

۳۴- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به طوری که $a_{ij} = i^2 + j^2$ حاصل $|A + 2I|$ کدام است؟

- ① 25 ② 15 ③ 40 ④ 20

۳۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^4 کدام است؟

- ① 98 ② 102 ③ 94 ④ 104

۳۶- فرض کنید: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد. مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A کدام است؟

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

۳۷- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های A کدام است؟

- ① 2 ② -3 ③ 3 ④ -2

۳۸- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ در رابطه $A^{-1} = \alpha A + \beta I$ صدق می‌کند. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

- ① 3 ② 4 ③ -3 ④ -4

۳۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & z \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A \times B$ ماتریسی اسکالر باشد، حاصل $x + 2y + 3z$ کدام است؟

- ① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1

۴۰- اگر $ABC = 3I$ ، آنگاه وارون ماتریس AB کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}C$ ② $\frac{1}{3}C^{-1}$ ③ $3C^{-1}$ ④ $\frac{1}{3}AB$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ ماتریس A^T را یافته و در رابطه داده شده قرار می‌دهیم:
روش اول:

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 13 \end{cases}$$

روش دوم: (نکته) هر ماتریس 2×2 مانند A در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^T - (a+d)A + |A|I = \bar{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T - 2A - 13I = \bar{O} \Rightarrow A^T = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

۲ - گزینه ۲ دترمینان ماتریس $2A$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|2A| = \begin{vmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{vmatrix}$$

$$2^T |A| = |A|^T + 2 \Rightarrow |A|^T - 2|A| + 2 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^T = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

۳ - گزینه ۳ می‌دانیم اگر $A_{n \times n}$ باشد آنگاه $|kA| = k^n |A|$ پس با توجه به فرض داریم:

$$|2A| A = \frac{1}{2} I \xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان می‌گیریم}} ||2A| A| = \left| \frac{1}{2} I \right| \Rightarrow |2A|^T |A| = \frac{1}{2} |I|$$

$$\rightarrow 2^T |A|^T |A| = \frac{1}{2} \rightarrow |A|^T = \left(\frac{1}{2}\right)^T \rightarrow |A| = \pm \frac{1}{2}$$

۴ - گزینه ۳ ابتدا ماتریس $2A - B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$2A - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2A - B) \times B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = -4 + 2 + 2 + 4 = 4$$

۵ - گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} 2A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 20 & 14 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین را}} 4A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{4}} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی} = 1 \times 3 = 3$$

۶ - گزینه ۴ می‌دانیم اگر دو سطر (یا دو ستون) مضربی از هم (یا مانند هم) باشند حاصل دترمینان صفر است. بنابراین اگر $x - 1 = 1$ (یا $x - 2 = 2$) باشد ستون اول (یا ستون دوم) با ستون سوم مانند یکدیگر می‌شوند. پس:

$$x - 1 = 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{حاصل ضرب جواب‌ها} = 8$$

$$x - 2 = 2 \rightarrow x = 4$$

۷ - گزینه ۴ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} B$$

$$= A \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) B = A \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) B \\ = AIB = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

۸ - گزینه ۱ با به دست آوردن ماتریس‌های A^T و A^3 ، قانونی برای A^n می‌یابیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{استقرا}} A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{n=100} A^{100} = \begin{bmatrix} 101 & -100 \\ 100 & -99 \end{bmatrix}$$

۹ - گزینه ۱ طرفین فرض سؤال را در A ضرب کرده و از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم:

$$A = 3A^{-1} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A} A^T = 3 \underbrace{AA^{-1}}_I \Rightarrow A^T = 3I \\ \Rightarrow A^T - I = 3I \Rightarrow (A + I)(A - I) = 3I \Rightarrow (A + I) \times \frac{1}{3}(A - I) = I \\ \Rightarrow (A + I)^{-1} = \frac{1}{3}(A - I)$$

۱۰ - گزینه ۳ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$A^T + \Delta A + 2I = \bar{O} \Rightarrow A(A + \Delta I) = -2I \\ \rightarrow \frac{A(A + \Delta I)}{-2} = I \rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{2}(A + \Delta I)$$

۱۱ - گزینه ۲

A^{-1} را از سمت چپ در رابطه ماتریسی ضرب می‌کنیم:

$$AX = A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} \underbrace{A^{-1}AX}_I = A^{-1}(A - 2I) \Rightarrow X = A^{-1}A - 2A^{-1}I \\ \Rightarrow X = I - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۲ - گزینه ۱ با توجه به فرض داریم:

$$3A - 2X = 4I \\ 3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ 2X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 12 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

۱۳ - گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } \underbrace{[A]_{3 \times 3} \times [B]_{3 \times 3}}_{3 \times 3} + [C]_{3 \times 3} = [AB + C]_{3 \times 3} \\ \text{گزینه ۲: } \underbrace{[B]_{3 \times 3} \times [C]_{3 \times 3}}_{3 \times 3} \times [A]_{3 \times 3} = [BCA]_{3 \times 3} \\ \text{گزینه ۳: } \underbrace{[A]_{3 \times 3} \times [B]_{3 \times 3}}_{3 \times 3} \times [C]_{3 \times 3} = [ABC]_{3 \times 3}$$

در گزینه ۴، BC یک ماتریس 3×3 و A یک ماتریس 3×2 است، پس جمع آن‌ها امکان‌پذیر نیست.

۱۴ - گزینه ۲ با توجه به فرض داریم:

$$|(rA^r)^{-1}| = |rA^r|^{-1} = \frac{1}{|rA^r|} = \frac{1}{r|A|^r} = \frac{1}{r(\frac{1}{r})} = r$$

۱۵ - گزینه ۴ طبق فرض سؤال داریم:

$$rA - rB = r \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{حاصل جمع درایه های قطر اصلی} = 5 - 1 = 4$$

۱۶ - گزینه ۲ شرط آنکه ماتریس A وارون پذیر نباشد عبارتست از:

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & r \\ r & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = r$$

$$\rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{مجموع درایه ها} = -3 + 5 - 3 + 5 = -1$$

۱۷ - گزینه ۴ ماتریس $A + I$ را بر حسب $A^{-1} + I$ می نویسیم:

$$|A + I| = \frac{|A + I||A^{-1}|}{|A^{-1}|} = \frac{|(A + I)A^{-1}|}{|A^{-1}|} = \frac{|AA^{-1} + A^{-1}|}{|A^{-1}|} = \frac{|I + A^{-1}|}{|A^{-1}|} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

دترمینان ماتریس A^{-1} به صورت زیر محاسبه می شود:

$$A^{-1} + I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A^{-1}| = -6$$

۱۸ - گزینه ۱

ماتریس های A^r و A^r را به دست می آوریم:

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, A^r = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{استقرا}} A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2^{100} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = 2$$

۱۹ - گزینه ۲ دترمینال ماتریس اولیه و ماتریس حاصل را نسبت به سطرها (مثلاً سطر اول) بسط می دهیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & b \\ 5 & 6 & c \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & b \\ 6 & c \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & b \\ 5 & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+3 \\ 3 & 4 & b \\ 5 & 6 & c \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & b \\ 6 & c \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & b \\ 5 & c \end{vmatrix} + (a+3) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

با مقایسه دو دترمینان فوق متوجه می شویم اختلاف این دو $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ می باشد که برابر است با:

$$3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

۲۰ - گزینه ۴ از رابطه داده شده، ماتریس A را به دست می آوریم:

$$rA + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow rA = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^r - rA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |A^r - rA| = 4$$

۲۱ - گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_D \rightarrow BAC = D$$

طرفین تساوی را از سمت چپ در B^{-1} و از سمت راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم. بنابراین:

$$\underbrace{B^{-1}BA}_{I} \underbrace{CC^{-1}}_{I} = B^{-1}DC^{-1} \rightarrow A = B^{-1}DC^{-1}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-1}DC^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۲۲ - گزینه ۳ ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیرند، پس $AB = BA$ داریم:

$$\begin{cases} AB = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ y & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+2y & x-6 \\ -6+y & -5 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ y & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-2 & 7 \\ xy+6 & 2y-3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$AB = BA \rightarrow \begin{bmatrix} 3x+2y & x-6 \\ -6+y & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-2 & 7 \\ xy+6 & 2y-3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-6=7 \rightarrow x=13 \\ 2y-3=-5 \rightarrow y=-1 \end{cases} \rightarrow x-y=14$$

۲۳ - گزینه ۱ درایه‌های سطر سوم A را در ستون‌های اول و دوم ماتریس B ضرب می‌کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \times \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{31} = 3 \\ a_{32} = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل ضرب} = 12$$

۲۴ - گزینه ۲ از سمت چپ، ضرب ماتریس‌ها را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -x+1 & -2x-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -x^2+x-4x-2=0 \rightarrow -x^2-3x-2=0$$

$$\rightarrow x^2+3x+2=0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} : \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -3$$

۲۵ - گزینه ۱ برای اینکه این ضرب قابل انجام باشد A باید یک ماتریس سطری 1×3 باشد:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow a+b+c=2x+2y+2z=6+2+3=11$$

۲۶ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$(A+B)^T = A^T + AB + BA + B^T$$

پس:

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I \rightarrow (A+B)^T = 2I$$

۲۷ - گزینه ۳

از طرفی داریم:

$$A^T + AB + 3B = A(A + B) + 3B$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$$

بنابراین:

$$A^T + AB + 3B = A(A + B) + 3B = A \times 3I + 3B$$

$$= 3A + 3B = 3(A + B) = 3 \times 3I = 9I$$

۲۸ - گزینه ۲ با استفاده از رابطه ماتریسی فرض سؤال، ماتریس X را به صورت ضرب دو ماتریس می‌نویسیم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_A X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_B \rightarrow AX = B$$

$$\xrightarrow[\text{از سمت چپ}]{\text{ضرب در } A^{-1}} \underbrace{A^{-1}A}_I X = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\text{داریم: } A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 2 + 2 + 2 - 1 - 2 - 1 = 2$$

۲۹ - گزینه ۴ ابتدا وارون ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A + A^{-1}| = 16$$

۳۰ - گزینه ۱ ابتدا ماتریس X را می‌یابیم:

$$X + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow X^{-1} = \frac{1}{2 - 3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۳۱ - گزینه ۱ با توجه به فرض سؤال و استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$A^T = \bar{O} \rightarrow A^T - I = -I \rightarrow (A - I)(A + I) = -I$$

$$\rightarrow (A - I)(-A - I) = I \rightarrow (A - I)^{-1} = -A - I$$

۳۲ - گزینه ۴ ماتریس AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & n & -1 \\ 2 & 1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -2 \\ 1 & m \\ 2n & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m - n & 1 + mn \\ 2m - 2mn + 1 & -2m - 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 + mn = 0 \rightarrow mn = -1 \\ 2m - 2mn + 1 = 0 \\ mn = -1 \end{cases} \rightarrow n = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow m - n = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

۳۳ - گزینه ۲ ماتریس A را می‌سازیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1-2^2 & 1-3^2 & 1-4^2 \\ 2+1 & 2+2 & 2-3^2 & 2-4^2 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3-4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 & -15 \\ 3 & 4 & -7 & -14 \\ 4 & 5 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= -8 \\ a_{22} &= 4 \end{aligned} \rightarrow a_{12} + a_{22} = -8 + 4 = -4$$

۳۴ - گزینه ۲ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^r + 1^r & 1^r + 2^r \\ 2^r + 1^r & 2^r + 2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A + 2I| = 40 - 25 = 15$$

۳۵ - گزینه ۱ نکته: اگر در ماتریس A ، درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشد، آنگاه ماتریس A^n به صورت زیر خواهد بود:

$$A = \begin{bmatrix} a & \square & \square \\ \circ & b & \square \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix} \rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & \square & \square \\ \circ & b^n & \square \\ \circ & \circ & c^n \end{bmatrix}$$

با استفاده از نکته فوق داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ \circ & 2 & 5 \\ \circ & \circ & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^r = \begin{bmatrix} 1^r & -4^r & -3^r \\ \circ & 2^r & 5^r \\ \circ & \circ & 3^r \end{bmatrix}$$

$$A^r \text{ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی} = 1 + 16 + 81 = 98$$

۳۶ - گزینه ۴ به ترتیب از چپ به راست، درایه‌های سطر دوم ماتریس‌های سمت چپ را در ماتریس‌های راست ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \circ & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & 1 \\ -1 & \circ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های سطر دوم} = -1 + 3 + 4 = 6$$

۳۷ - گزینه ۳ می‌دانیم که $A = (A^{-1})^{-1}$ بنابراین کافیت وارون ماتریس داده شده را حساب کنیم:

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{6-7} \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = A$$

$$A \text{ مجموع درایه‌های} = -2 + 7 + 1 - 3 = 3$$

۳۸ - گزینه ۴ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 7\alpha \\ \alpha & -3\alpha \end{bmatrix}, \quad \beta I = \begin{bmatrix} \beta & \circ \\ \circ & \beta \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \alpha A + \beta I \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta & 7\alpha \\ \alpha & -3\alpha + \beta \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = 1 \xrightarrow{2\alpha + \beta = -2} \beta = -4 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 - 4 = -3$$

۳۹ - گزینه ۲ در ماتریس اسکالر، درایه‌های قطر اصلی با هم برابر بوده و بقیه درایه‌ها صفر هستند:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 3x & -8 + 2x \\ y + 3z & -2y + 2z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -8 + 2x = 0 \rightarrow x = 4 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + 3z = 0 \\ -2y + 2z = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ z = 2 \end{cases} \rightarrow x + 2y + 3z = 4 + 2(-6) + 3(2) = 4 - 12 + 6 = -2$$

۴۰ - گزینه ۱ با توجه به فرض داریم:

$$ABC = 3I \rightarrow (AB)\left(\frac{1}{3}C\right) = I \rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{3}C$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲
۲ - ۲
۳ - ۲
۴ - ۲
۵ - ۲
۶ - ۲

۷ - ۲
۸ - ۱
۹ - ۱
۱۰ - ۲
۱۱ - ۲
۱۲ - ۱

۱۳ - ۲
۱۴ - ۲
۱۵ - ۲
۱۶ - ۲
۱۷ - ۲
۱۸ - ۱

۱۹ - ۲
۲۰ - ۲
۲۱ - ۲
۲۲ - ۲
۲۳ - ۱
۲۴ - ۲

۲۵ - ۱
۲۶ - ۲
۲۷ - ۲
۲۸ - ۲
۲۹ - ۲
۳۰ - ۱

۳۱ - ۱
۳۲ - ۲
۳۳ - ۲
۳۴ - ۲
۳۵ - ۱
۳۶ - ۲

۳۷ - ۲
۳۸ - ۲
۳۹ - ۲
۴۰ - ۱