



استدلال و اثبات در هندسه

أَدْعُ إِلَى سَبِيلِ رَبِّكَ بِالْحُكْمَةِ وَالْمَوْعِظَةِ الْحَسَنَةِ وَ جَادِلْهُمْ بِأَتَى هِيَ أَحْسَنُ ...
با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و
مناظره کن! (سوره نحل، آیه ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، اما هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و به نظر می‌رسد هیچ دو تایی از آنها «هم‌نهیست» نیستند!

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید :

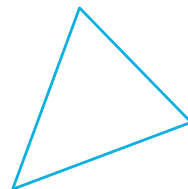
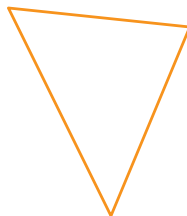
- ۱- امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه‌ام باخته است.» آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟
- ۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.
- ۳- دلیلی را که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است، با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان تر است؟

«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان‌گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می‌کنیم. راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می‌گوییم.

کار در کلاس

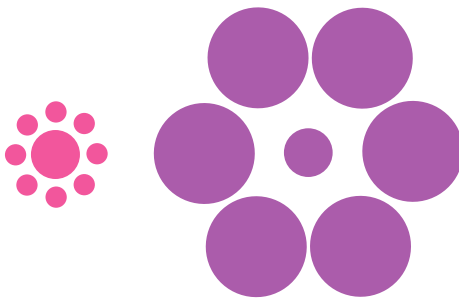
- ۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست.
- ۲- دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر، رسم کنید :



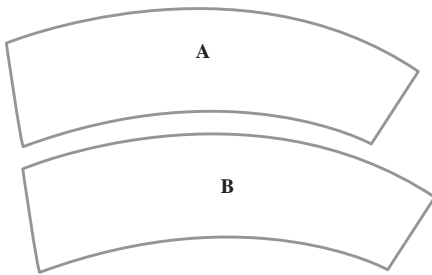
آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟
 یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟

فعالیت



۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟
 الف) با مشاهده تشخیص دهید.
 ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازه آنها را با هم مقایسه کنید.



۲- اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی موردعلاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟)
 با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟

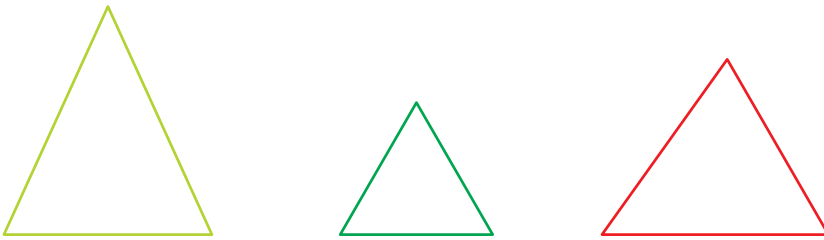
۳- آیا مشاهده کردن یا به‌طور کلی استفاده از حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟

هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، اما به تشخیصی که براساس این روش‌ها حاصل می‌گردد، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید، با یکدیگر بحث کنید.

تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟

۲- نینما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری می‌خواست وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را بلند کند. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نینما: زیرا هفته پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود، با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه‌بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ درباره استدلال‌ها بحث کنید.

۳- چون من تا به حال هیچ وقت تصادف نکرده‌ام، در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام یک از استدلال‌های زیر است؟

(الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه‌اند؛ پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

(ب) همه فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

پس فیلم جنگی بوده است.

(ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه خاله کوچکم هم که به زودی به دنیا

می‌آید دختر خواهد بود.

(د) چون همه قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث

خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- حمید و وحید می‌دانستند که علی، حسن، حسین و باقر برادرند و : علی از حسین بزرگ‌تر

و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو

نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است؛ اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

حمید : در تمام خانواده‌هایی که دو فرزند به نام‌های علی و حسن داشته‌اند، علی فرزند بزرگ‌تر

بوده است.

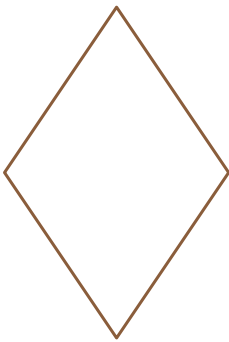
وحید : چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن

بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ درباره‌ی درستی استدلال‌ها بحث کنید.

در درس گذشته آموختید که دیدن و استفاده از حواس یا ارائه مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌مان از اطلاعات مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید:

مهرداد: آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

سعید: بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید:

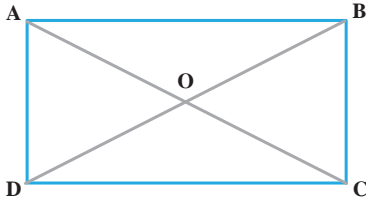
فرض: شکل لوزی است.

حکم: _____ برابر است.

استدلال:

$$\left. \begin{array}{l} \text{لوزی نوعی } \text{_____} \text{ است.} \\ \text{در متوازی‌الاضلاع } \text{_____} \text{ برابر است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{_____ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو}$$

۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید:



فرض : ABCD مستطیل است.

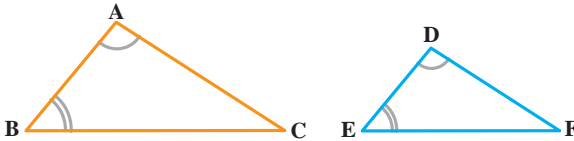
حکم : قطرهاى مستطیل، مساوی است.

$$\text{فرض : } \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \text{---} = \text{---} = \text{---} = 90^\circ \\ AB = \text{---} \quad , \quad AD = \text{---} \\ AB \parallel \text{---} \quad , \quad AD \parallel \text{---} \end{array} \right. \quad \text{حکم : } AC = \text{---}$$

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

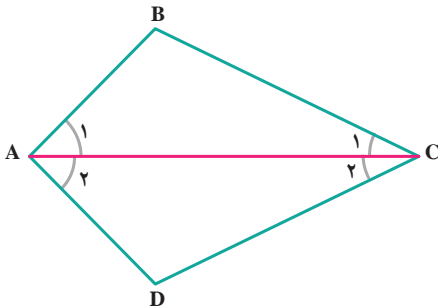
۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



$$\text{فرض : } \begin{array}{l} \text{---} = \text{---} \\ \text{---} = \text{---} \end{array} \quad \text{حکم : } \text{---} = \text{---}$$

۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

۳- نشان دهید در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن برابر است.



۱- در مسئله زیر، فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید، سپس استدلال درستی برای آن بنویسید.

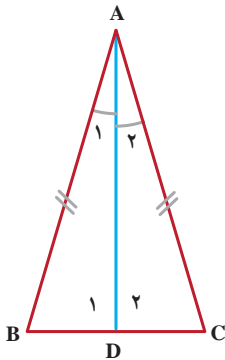
مسئله: در شکل مقابل پارخض AC نیمساز زاویه A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث‌های مثلث ABC و $\triangle ADC$ هم‌نهشت‌اند.

فرض:

حکم:

استدلال: چون AC نیمساز است، داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (زضز) هم‌نهشت‌اند.

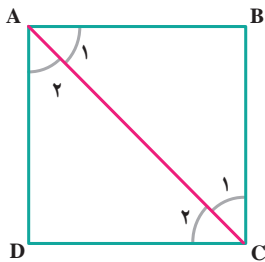
۲- مثلث زیر متساوی‌الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعده آن است. با استدلال زیر نشان داده‌ام که نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد.



$$\begin{cases} AB = AC & (\text{ساق‌های برابر}) \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & (\text{AD نیمساز است}) \\ AD = AD & (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD \Rightarrow BD = CD$$

لذا نقطه D وسط BC است و AD میانه است.

آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد؟

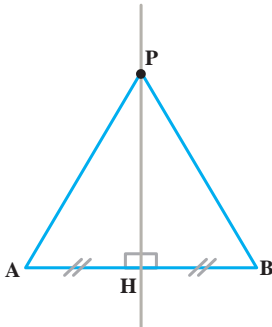


۳- با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم‌نهشت‌اند و زوایای متناظر با هم برابرند؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است.

آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

۴- به نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت مورد نظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود؛ اما در فعالیت ۳ خاصیت مورد نظر به قطر دیگر تعمیم داده می شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم، در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.



۵- نقطه ای مانند P، روی عمود منصف پاره خط AB در نظر می گیریم و به دو سر پاره خط وصل می کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) هم نهشت اند، نتیجه می گیریم پاره خط های PA و PB با هم برابر است. بنابراین فاصله نقطه P، که روی عمود منصف پاره خط AB است، از دو سر پاره خط AB یکسان اند.

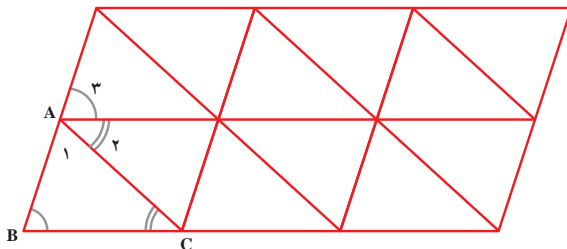
آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمود منصف برقرار است، کافی است؟

کار در کلاس

به استدلال هایی دقت کنید که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده اند :
مسئله : مجموع زاویه های داخلی مثلث 180° است.

استدلال حامد : حامد گفت یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه 60° است، مجموع زاویه های مثلث 180° است.

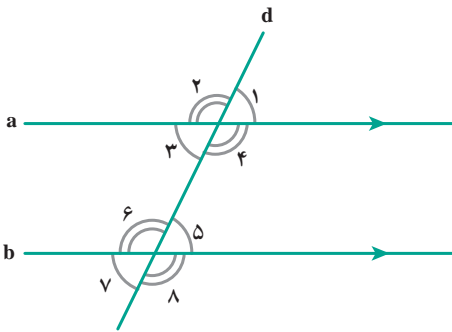
استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.



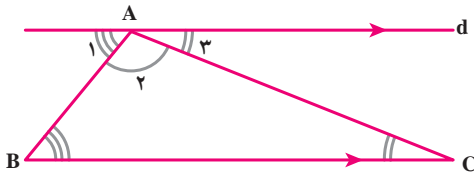
استدلال مهدی : مهدی شکل روبرو را، که از مثلث های هم نهشت تشکیل شده است کشید و با مشخص کردن زاویه های مثلث ABC مانند شکل

استدلالی با استفاده از شکل به صورت زیر آورد :

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$



استدلال رضا : رضا گفت می دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها هشت زاویه می سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی اند».



حال مثلی دلخواه مانند $\triangle ABC$ را در نظر می گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با شماره های ۱، ۲ و ۳ نشان داده ایم که

زاویه A_2 همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم : $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم : $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای گذاری \hat{A}_1 و \hat{A}_3 به ترتیب به جای \hat{B} و \hat{C} خواهیم داشت : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$

استدلال رضا را می توان با استفاده از نمادهای ریاضی مرتب و خلاصه کرد و بدین صورت نوشت :

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

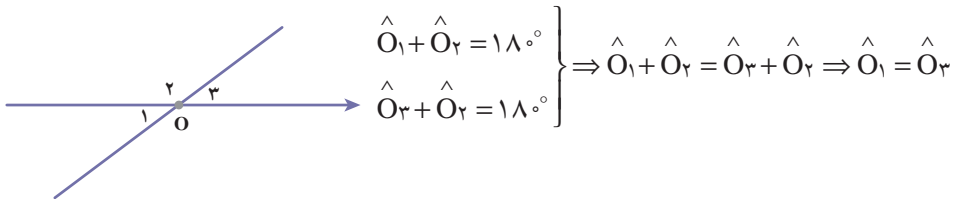
$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

درباره معتبر بودن استدلال های این دانش آموزان بحث کنید.

فعالیت

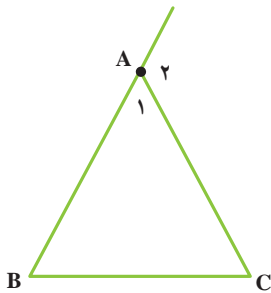
مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول های حمید و بهرام برابر 5000 تومان و مجموع پول های سعید و بهرام نیز برابر 5000 تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می بینید؟
 مسئله : نشان دهید زاویه های متقابل به رأس با هم برابرند.
 فرض کنیم \hat{O}_1 و \hat{O}_3 مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم :



تمرین

۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



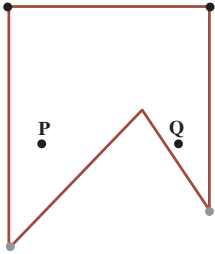
مسئله : در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

اثبات : مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم.
 می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای \hat{A}_1 و \hat{B} و \hat{C} هر کدام 60° است؛ بنابراین

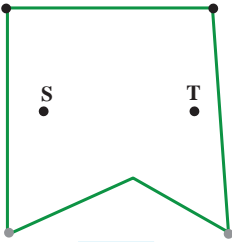
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \quad \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

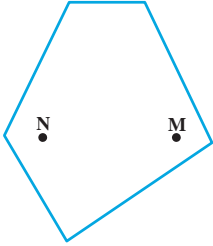
۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است؛ اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» هر ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص های سه دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های زیر و دلایلی که ارائه کرده اند، با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست؛ زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد.



مهديه : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط S و T درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.



مریم : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.

۳- آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف) \Leftrightarrow هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
 چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

(ب) \Leftrightarrow در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
 ABCD مربع نیست.

(ج) \Leftrightarrow در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
 در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند.

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
 یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط

عمود می‌شود.

راهنمایی: یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس دلیل آن را که این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است، بیان کنید.