استدلال: استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده.

تعریف اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می گویند.

حالت های مختلف استدلال در هندسه را بنویسید.

الف) مشاهده کردن و استفاده از حواس پنج گانه.

ب) ارائه ی مثال های متعدد.

ج) توجه به ابعاد ظاهری.

د) اثبات با استفاده از فرض و حکم ~~است~~ مسئله.

آشنایی اثبات در هندسه

مواردی مانند مشاهده کردن، اندازه گرفتن و ارائه ی مثال های مختلف، به درک حل یک مسئله ی هندسی کمک می کنند. اما نمی توانند به عنوان استدلال منطقی پذیرفته شود.

برای یک نتیجه گیری معتبر، از اطلاعات مسئله (فرض مسئله) و حقایق و اصولی که درستی آن ها برای ما معلوم شده است، کمک می گیریم و با استفاده از استدلال و دلایل منطقی به خواسته مسئله (حکم) می رسیم.

فرض —استدلال→ حکم

Subject   Date / /

مثال استدلال

لوزی نوعی متوازی الاضلاع است. آیا در لوزی زاویه های روبه رو برابرند؟

شکل لوزی است : فرض

در زاویه های روبه رو مساوی اند : حکم

استدلال : لوزی نوعی متوازی الاضلاع است / در متوازی الاضلاع زاوای رو به رو باهم برابرند ⟸ در لوزی زاویه های روبه رو برابرند

نکته : نیمسازهای داخلی ، هر نوع مثلثی همدیگر را در یک نقطه از داخل مثلث قطع میکنند.

نکته : هر سه میانه ی یک مثلث همدیگر را در یک نقطه از داخل آن مثلث قطع می کنند.

نکته : محل برخورد ارتفاع های یک مثلث می تواند بیرون مثلث و یا روی یکی از رئوس و یا در داخل مثلث باشد.

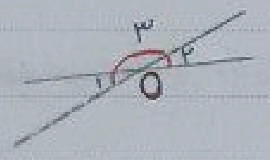
نکته : محل برخورد عمود منصف های سه ضلع یک مثلث می تواند داخل مثلث و یا روی یکی از اضلاع مثلث و یا بیرون مثلث باشد.

نکته: به مثالی که یک حکم کلی را رد می کند نقض می گویند. برای مثال اگر کسی ادعا کند هرگاه در یک شکل تمامی اضلاع روبه رو دو به دو باهم موازی و هم مساوی باشند، آن شکل متوازی الاضلاع است

یک ۶ضلعی منتظم به عنوان مثال نقض برای او رسم میکنیم

قضیه: زوایای متقابل به رأس برابرند.

اثبات: فرض میکنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ متقابل به رأس باشند. داریم:

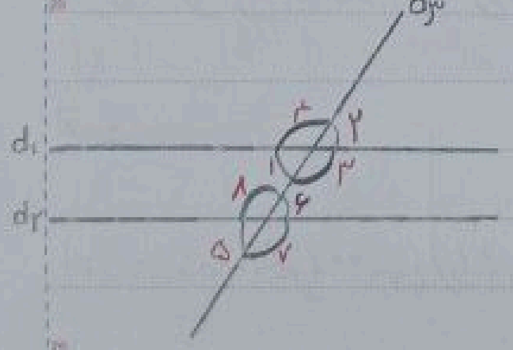


$\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180^\circ$ ~~[illegible]~~ (زوایای مکمل)

$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ$ (زوایای مکمل)

$\Rightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_3} = \hat{O}_2 + \cancel{\hat{O}_3} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

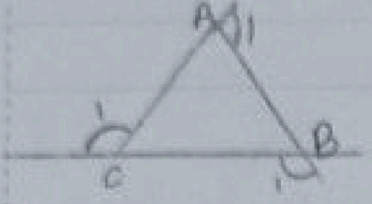
قضیه: هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آن هشت زاویه می سازد که مطابق شکل زیر زوایا چهار به چهار باهم مساویند.



$\hat{1} = \hat{2} = \hat{5} = \hat{6}$

$\hat{3} = \hat{4} = \hat{7} = \hat{8}$

نکته: مجموع زوایای خارجی در هر مثلث (و نیز در هر n ضلعی) برابر ۳۶۰° است.



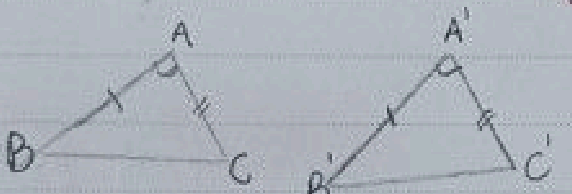
$$\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{C}_1=360^\circ$$

هم‌نهشتی مثلث‌ها: دو مثلث هم‌نهشت هستند، وقتی تمامی اجزای آن‌ها، یعنی اضلاع و زوایای آن‌ها باهم برابر باشند. به زبان ساده یعنی وقتی دو مثلث را روی هم قرار دهیم، دقیقاً بر روی یکدیگر منطبق شوند. در دو مثلث هم‌نهشت، اضلاع و زوایای متناظر برابرند.

حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها

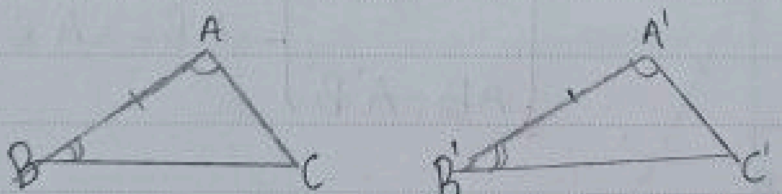
دو مثلث به سه حالت هم‌نهشت هستند

۱) برابری دو ضلع و زاویه بین (ض.ز.ض)



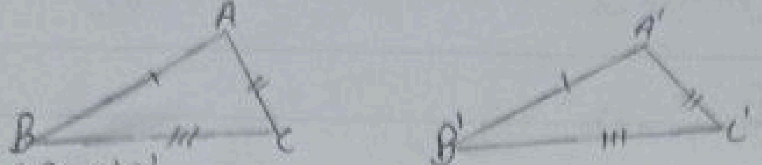
$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}' \\ AB=A'B' \\ AC=A'C'\end{cases} \longrightarrow \overset{\triangle}{ABC}=\overset{\triangle}{A'B'C'}$$

۲) برابری دو زاویه و ضلع (ز ض ز)



$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}' \\ \hat{B}=\hat{B}' \\ AB=A'B'\end{cases} \longrightarrow \overset{\triangle}{ABC}\cong\overset{\triangle}{A'B'C'}$$

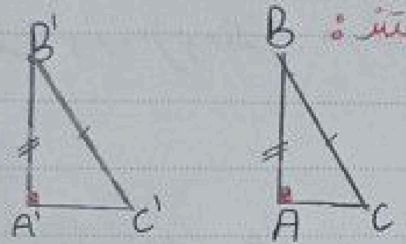
۳) برابری سه ضلع (ض ض ض)



$$\begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{cases} \rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

حالت های همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه:

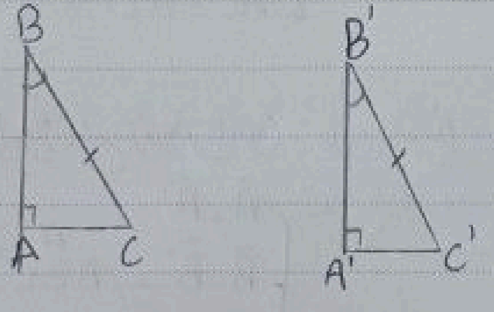
دو مثلث قائم الزاویه به حالت های زیر همنهشت هستند:



۱) برابری وتر و یک ضلع

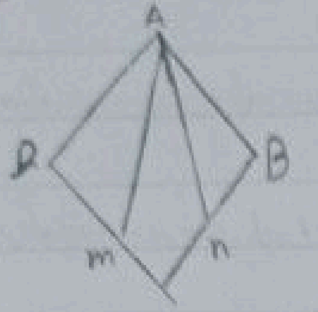
$$\begin{cases} BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{cases} \rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

۲) برابری وتر و یک زاویه ی تند



$$\begin{cases} BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{cases} \rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

لوزی ABCd مفروض است. نقاط M و N به ترتیب وسط های CD و CB هستند. با نوشتن فرض و حکم،



نشان دهید $A\overset{\Delta}{D}M \cong AB N$ و سپس اجزای متناظر را بنویسید

فرض $\begin{cases} AD = AB = BC = CD \\ BN = NC ، Dm = mC \\ \hat{A} = \hat{C} ، \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$

حکم: $A\overset{\Delta}{D}M \cong A\overset{\Delta}{B}N$

حالا همنهشتی دو مثلث را اثبات می کنیم

$$\begin{cases} BN + NC = BC \xrightarrow{BN = NC} BN = \frac{BC}{۲} \\ DM + MC = DC \xrightarrow{DM = MC} DM = \frac{DC}{۲} \end{cases}$$

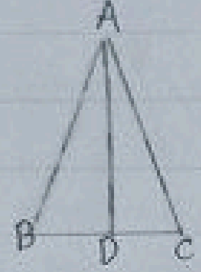
$$BC = DC \longrightarrow BN = DM$$

$$\begin{cases} BN = DM \\ AB = AD \xrightarrow{\text{فرض}} A\overset{\Delta}{B}N \cong A\overset{\Delta}{D}M \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$$

حالا اجزای متناظر دیگر دو مثلث به صورت زیر است.

$$\begin{cases} AN = AM \\ DAM = BAN \\ DMA = BNA \end{cases}$$

ثابت کنید در مثلث متساوی الساقین ABC، $(AB=AC)$، نیمساز AD، میانه نیز هست



فرض: $\begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AB=AC \\ \hat{B}=\hat{C} \end{cases}$

حکم: $BD=DC$

دو مثلث ABD و ADC را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AD=AD \\ AC=AB \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} Bd=dC$$

چون $BD=DC$ است، پس AD میانه وارد بر BC است.

همچنین میشود نوشت:

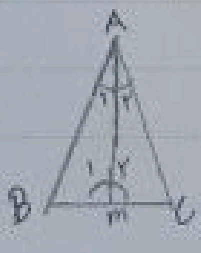
$$\begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AB=AC \\ \hat{B}=\hat{C} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} Bd=BC$$

در مثلث متساوی الساقین ABC، میانه AM را رسم می کنیم، ثابت کنید AM ارتفاع وارد بر BC است

فرض: $\begin{cases} MB=MC \\ AB=AC \end{cases}$

حکم: $\hat{M}_1=\hat{M}_2=90^\circ$

دو مثلث ABM و ACM را در نظر بگیرید

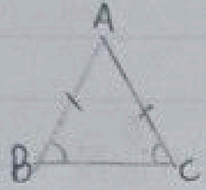


$$\begin{cases} AB=AC \\ AM=AM \\ BM=CM \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ACM} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{M}_1=\hat{M}_2$$

$$\hat{M}_1+\hat{M}_2=180^\circ \xrightarrow{\hat{M}_1=\hat{M}_2} 2M_1=180^\circ \Longrightarrow \hat{M}_1=90^\circ, \hat{M}_2=90^\circ$$

حل مسئله در هندسه (مثلث)

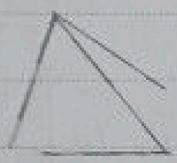
مثلث متساوی الساقین : مثلثی که دو ضلع آن با هم برابر است را مثلث متساوی الساقین می گویند. به دو ضلع برابر، ساق های مثلث و به ضلع دیگر قاعده مثلث می گویند. همچنین دو زاویه رو به رو به ساق نیز با یکدیگر برابرند.

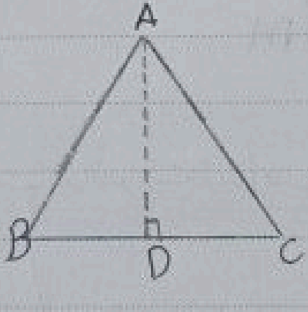


$AB = AC$

$\hat{B} = \hat{C}$

~~هم منطبق متساوی~~ در مثلث متساوی الساقین، میانه، ارتفاع، نیمساز و عمود منصف وارد بر قاعده، بر هم منطبق و برعکس. یعنی اگر میانه و ارتفاع و یا نیمساز وارد بر یک ضلع در یک مثلث بر هم منطبق باشند، آن مثلث متساوی الساقین است.





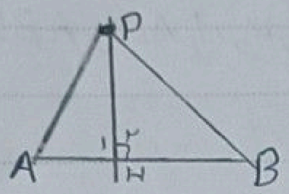
AD عمود منصف و نیم ساز و ارتفاع و میانه $\Longleftrightarrow$ مثلث ABC متساوی الساقین

Subject Date / /

هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

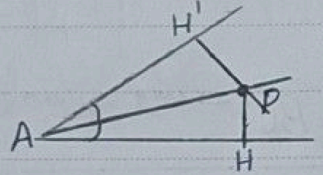
فرض: $\begin{cases} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases}$

حکم: $AP = BP$



$\begin{cases} AH = BH \\ pH = pH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\Delta}{P}H \cong B\overset{\Delta}{P}H \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} Ap = Bp$

اثبات: زاویه‌ی به رأس A و نقطه P روی نیمساز آن را در نظر بگیرید. از نقطه‌ی P به دو ضلع زاویه، عمودهای رسم می‌کنیم.



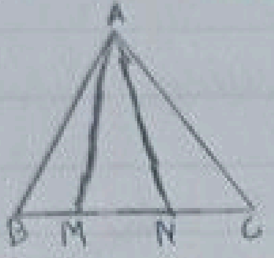
فرض: $\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{cases}$

حکم: $pH = pH'$

$\begin{cases} Ap = Ap \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{برابری یک وتر و زاویه}} ApH \cong ApH' \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} pH = pH'$

دقت کنید که pH و pH' فاصله‌ی نقطه‌ی P از دو ضلع زاویه است.

در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارند که BM = CN. نشان دهید مثلث AMN متساوی الساقین است.



فرض: $\begin{cases} BM = CN \\ AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases}$

حکم: $AM = AN$

در مثلث AMB و ANC را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} BM = CN \\ AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ACN} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AM = AN$$

متوازی الاضلاع: متوازی الاضلاع یک چهار ضلعی است که ضلع هایش دو به دو موازی اند.

ویژگی متوازی الاضلاع را نام ببرید:

۱- زوایای رو به رو با هم مساوی اند

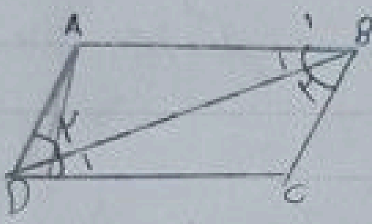
۲- اضلاع رو به رو با هم مساوی اند

۳- زوایای مجاور مکمل یکدیگرند

۴- قطرها منصف یکدیگرند

اثبات زوایای رو به رو باهم مساوی‌اند و اضلاع رو به رو باهم مساوی‌اند و زوایای مجاور مکمل یکدیگرند:

درمتوازی الاضلاع رو به روی قطر BD را رسم کنید. طبق ویژگی خطوط موازی و مورب داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب } BD \end{array}\right\} \longrightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel BC \\ \text{مورب } BD \end{array}\right\} \longrightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \qquad (2)$$

طرفین (۱) و (۲) رو حالا باهم جمع میکنیم:

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 \Longrightarrow \hat{B} = \hat{D}$$

برهمین صورت ثابت می شود $\hat{A} = \hat{C}$. پس در متوازی الاضلاع زوایای رو به رو باهم برابرند.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \xrightarrow{\hat{A} = \hat{C},\ \hat{B} = \hat{D}} 2\hat{A} + 2\hat{B} = 360 \Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

در مثلث ABD و BCD را در نظر بگیرید:

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD \end{array}\right. \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} ABD \cong CBD \xleftrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} AD = BC \\ AB = CD \end{array}\right.$$

با در نظر گرفتن دو مثلث $B\hat{M}N$ و $D\hat{P}Q$ داریم

$$\begin{cases} BM = PD \\ BN = QD \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} B\hat{M}N \cong D\hat{P}Q \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MN = PQ$$

ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ~~فاصله قطر~~ فاصله‌ی هر دو رأس مقابل از قطر، برابر است.

متوازی الاضلاع ABCD و قطر BD را در نظر بگیرید و از رئوس A و C دو عمود به قطر BD رسم کنید

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ BC = AD \end{cases} \Rightarrow \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه}} B\hat{H'}C \cong A\hat{H}D \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} CH' = AH$$

پس فاصله‌ی رأس A و C از قطر BD برابر است.