درسنامه و نکات کلیدی (فصل ششم)

خط و معادله های خطی

معادله خط : رابطه ای است که بین نقاط تشکیل دهنده یک خط وجود دارد.

نکته : فرم کلی معادله خط به صورت $(y = ax + b)$ می باشد.

نکته : در صورتی که نمودار رابطه ی بین دو مقدار به صورت خط راست باشد. آن دو مقدار با هم رابطه خطی دارند.

مثال : آیا رابطه بین یک ضلع مربع و محیط مربع رابطه ی خطی است؟ چرا؟ بله. چون افزایش یک ضلع مربع با افزایش محیط مربع یک مقدار ثابت است : (ضلع مربع را x و محیط مربع را y در نظر می گیریم پس خواهیم داشت : $y = ۴x$)

x	۱	۲	۳	۴
$y = ۴x$	۴	۸	۱۲	۱۶

مثال : آیا رابطه بین یک ضلع مربع و مساحت مربع رابطه ی خطی است؟ چرا؟ خیر. چون افزایش یک ضلع مربع با افزایش مساحت مربع مقدار ثابتی نیست : (ضلع مربع را x و مساحت مربع را y در نظر می گیریم بنابرین خواهیم داشت : $y = x^۲$)

x	۱	۲	۳	۴
$y = x^۲$	۱	۴	۹	۱۶

انواع معادله خط : ۱) مبدا گذر $(y = ax$: فرم کلی$)$ ۲) غیر مبدا گذر $(y = ax + b$: فرم کلی$)$

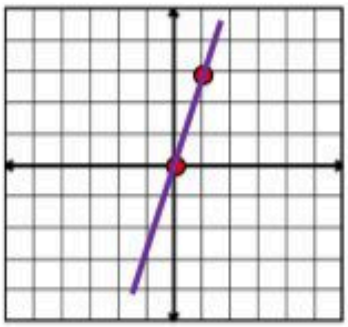
۳) خطوط موازی با محور $(y = m \quad , x = n$: فرم کلی$)$

رسم یک خط : برای رسم یک خط در دستگاه مختصات نیاز به مختصات دو نقطه است.

نکته : اگر در فرم کلی (استاندارد) معادله خط عدد قبل از x عدد صحیح باشد در جدول به جای x اعداد (صفر و ۱) قرار می دهیم و عدد قبل از x عدد کسری باشد به جای x اعداد (صفر و مخرج کسر) قرار می دهیم.

مثال : معادله خط $y = ۳x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

x	۰	۱
$y = ۳x$	۰	۳



خط مبدا گذر

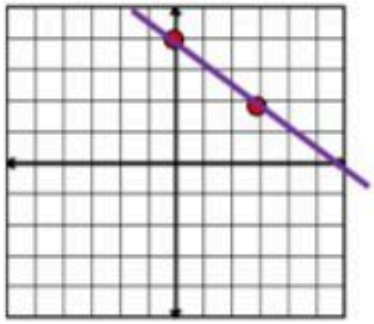
درسنامه و نکات کلیدی

(فصل ششم)

خط و معادله های خطی

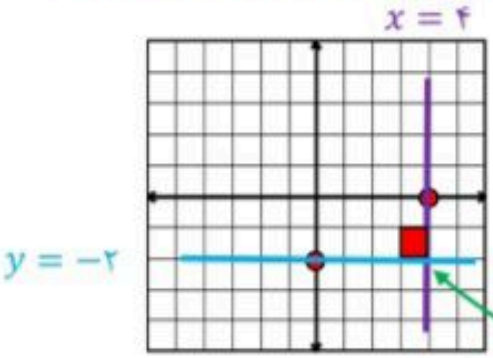
مثال : معادله خط $y = -\frac{۲}{۳}x + ۴$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

x	۰	۳
$y = -\frac{۲}{۳}x + ۴$	۴	۲



خط غیرمبدا گذر

مثال : معادلات خط $y = -۲$ و $x = ۴$ را در دستگاه مختصات رسم کنید. (برای رسم این خط ها نیاز به جدول نیست. فقط کافی است هر نقطه داده شده را در دستگاه مختصات مشخص کرد سپس خطی موازی با محور از روی آن نقطه رسم کرد.)



خط موازی با محور

زاویه ی بین خطوط موازی با محور ۹۰ درجه است.

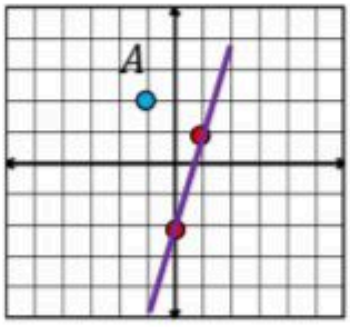
نکته : شرط این که نقطه روی یک خط قرار گیرد این است که مختصات آن نقطه در معادله خط صدق کند. که برای این کار دو روش وجود دارد : ۱) روش تحلیلی (جایگزینی مختصات نقطه در معادله خط) ۲) روش ترسیمی

مثال : آیا نقطه ی $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ روی خط $y = ۳x - ۲$ قرار دارد؟

روش تحلیلی : قرار ندارد چون دو طرف تساوی برابر نیست : $(x = -۱ , y = ۲) \Rightarrow ۲ = ۳(-۱) - ۲ \Rightarrow ۲ \neq -۵$

روش ترسیمی : خط داده شده را در دستگاه مختصات رسم کرده سپس نقطه A را نیز در دستگاه مختصات مشخص می کنیم :

x	۰	۱
$y = ۳x - ۲$	-۲	۱



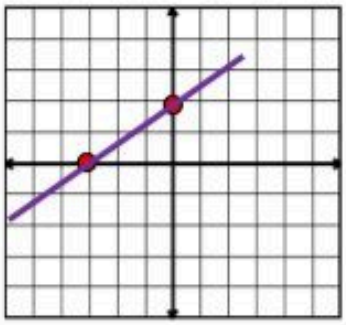
درسنامه و نکات کلیدی

(فصل ششم)

خط و معادله های خطی

نکته : برای رسم معادلات خطی که به صورت $(ax + by = c)$ هستند. در جدول یک بار به جای x و یک بار به جای y صفر قرار می دهیم.

مثال : معادله خط $2x - 3y = -6$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.



x	۰	-3
$2x - 3y = -6$	۲	۰

شیب خط: زاویه ای بین سمت راست محور طول ها با خط داده شده را می گویند.

عرض از مبدا : نقطه ای که خط داده شده محور عرض ها را در آن نقطه قطع می کند را عرض از مبدا می گویند.

نکته : در فرم کلی معادله خط $(y = ax + b)$ ضریب x یعنی عدد a شیب خط و عدد b عرض از مبدا نام دارد.

مانند : در معادله خط $y = -\frac{1}{3}x + 1$ عدد $\left(\text{شیب خط} : -\frac{1}{3}\right)$ و عدد $\left(\text{عرض از مبدا} : 1\right)$ می باشد.

نکته : برای به دست آوردن شیب خط و عرض مبدا باید معادله خط به فرم کلی $(y = ax + b)$ مرتب شود.

مثال : شیب خط و عرض از مبدا معادله های خطی زیر را به دست آورید.

الف) $-5x + 2y = -6 \Rightarrow \left(\text{عرض از مبدا: } -3 \text{ , شیب خط: } \frac{5}{2}\right) \Leftarrow y = \frac{5}{2}x - 3 \Leftarrow \frac{2y}{2} = \frac{5x}{2} - \frac{6}{2} \Leftarrow 2y = 5x - 6$

ب) $2y = -4x \qquad \left(\text{عرض از مبدا : } 0 \text{ , شیب خط : } -2\right) \Leftarrow y = -2x \Leftarrow \frac{2y}{2} = \frac{-4x}{2}$

طول از مبدا : نقطه ای که خط داده شده محور طول ها را در آن نقطه قطع می کند را طول از مبدا می گویند.

نکته : برای به دست آوردن طول از مبدا در معادله خط به جای y صفر قرار می دهیم.

مثال : طول از مبدا معادله خط $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y = -5$ را به دست آورید.

$$y = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}(0) = -5 \Rightarrow \frac{2}{3}x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{\frac{2}{3}} = -\frac{15}{2} \Rightarrow \text{طول از مبدا} : -\frac{15}{2}$$

درسنامه و نکات کلیدی

(فصل ششم)

خط و معادله های خطی

نکته : دو خط در صورتی موازی هستند که شیب دو خط برابر باشند. **مانند :** $(y=-۳x\ ,y=-۳x+۵)$

نکته : دو خط در صورتی بر هم عمود هستند که شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر باشند یا حاصل ضرب دو شیب خط برابر با عدد -۱ شود. **مانند :** $\left(y=۲x+۳\ ,\ y=-\frac{۱}{۲}x-۲\right)$

شیب دو خط برابر

مثال : معادله خطی بنویسید که با خط $x-۳y=۵$ موازی و از نقطه ی $A=\begin{bmatrix}\cdot\\-۲\end{bmatrix}$ بگذرد. ابتدا معادله خط را مرتب کرده تا شیب خط مشخص شود : عرض از مبدا

$$-۳y=-x+۵\Longrightarrow\frac{-۳y}{-۳}=-\frac{x}{-۳}+\frac{۵}{-۳}\Longrightarrow y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۵}{۳}\Longrightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

$$y=ax+b\xrightarrow{\left(a=\frac{۱}{۳},b=-۲\right)}y=\boxed{\frac{۱}{۳}x-۲}$$ معادله خط جدید

شیب دو خط قرینه و معکوس

مثال : معادله خطی بنویسید که با خط $y=-\frac{۱}{۵}x+۲$ عمود باشد و از نقطه ی $B=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}$ بگذرد. شیب خط مشخص است پس باید عرض از مبدا را به دست آوریم :

$$y=ax+b\xrightarrow{(a=۵\ ,x=-۱\ ,y=۲)}۲=۵(-۱)+b\Longrightarrow b=۷$$

$$y=ax+b\xrightarrow{(a=۵\ ,b=۷)}y=\boxed{۵x+۷}$$ معادله خط جدید

نکته : برای به دست آوردن شیب خطی که از دو نقطه می گذرد از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$a=\frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

مثال : معادله خطی بنویسید که از نقاط $A=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}$ بگذرد.

$$a=\frac{۴-۳}{-۱-۲}=-\frac{۱}{۳}\quad,y=ax+b\xrightarrow{\left(a=-\frac{۱}{۳},x=۲\ ,y=۳\right)}۳=-\frac{۱}{۳}(۲)+b\Longrightarrow b=\frac{۱۱}{۳}$$

$$y=ax+b\xrightarrow{\left(a=-\frac{۱}{۳},b=\frac{۱۱}{۳}\right)}y=\boxed{-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۱}{۳}}$$ معادله خط جدید

نکته : معادله خط محور طول ها $(y=۰)$ و معادله خط محور عرض ها $(x=۰)$ و معادله خط نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ و معادله خط نیمساز ربع دوم و چهارم $(y=-x)$ می باشد.

درسنامه و نکات کلیدی

(فصل ششم)

خط و معادله های خطی

دستگاه معادلات خطی : برای حل دستگاه معادلات خطی از روش های زیر می توان استفاده کرد :

الف) روش حذفی : در این روش یکی از متغیرها را حذف کرده سپس با جایگزینی متغیر دوم به دست می آید.

مثال : دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید. (روش حذفی)

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ -۴x + y = -۷ \end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} ۴x + ۶y = ۱۴ \\ -۴x + y = -۷ \end{cases} \Rightarrow ۷y = ۷ \Rightarrow y = ۱$$

$$۲x + ۳(۱) = ۷ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

جواب دستگاه دو مجهولی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

ب) روش جایگزینی (تبدیلی) : در این روش یکی از معادلات را بر حسب یک متغیر مرتب کرده و مقدار آن را در معادله دوم قرار می دهیم.

مثال : دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید. (روش جایگزینی)

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ -۴x + y = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = -۳y + ۷ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}y + \frac{۷}{۲} \\ -۴\left(-\frac{۳}{۲}y + \frac{۷}{۲}\right) + y = -۷ \Rightarrow ۶y - ۱۴ + y = -۷ \Rightarrow ۷y = ۷ \Rightarrow y = ۱ \end{cases}$$

(بر حسب x مرتب می کنیم)

(مقدار x را در معادله پایینی قرار می دهیم)

$$x = -\frac{۳}{۲}(۱) + \frac{۷}{۲} \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲} + \frac{۷}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow x = ۲$$

جواب دستگاه دو مجهولی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

نکته : برای حل بعضی از مسایل می توان از دستگاه دو مجهولی استفاده کرد و به یکی از روش های آن را حل کرد.

مثال : سن برادر علی ۳ برابر سن او است. و اختلاف سن آن ها ۱۸ سال است. سن هر یک را به دست آورید. (روش جایگزینی)

(سن برادر علی را x و سن علی را y فرض می کنیم.)

$$\begin{cases} x = ۳y \\ x - y = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳y \\ ۳y - y = ۱۸ \Rightarrow ۲y = ۱۸ \Rightarrow y = ۹ \end{cases}$$

سن علی

$$x = ۳(۹) = ۲۷ \Rightarrow x = ۲۷$$

سن برادر علی