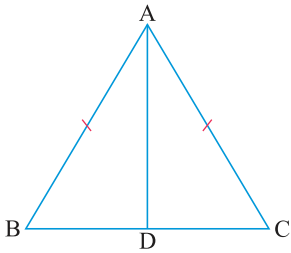
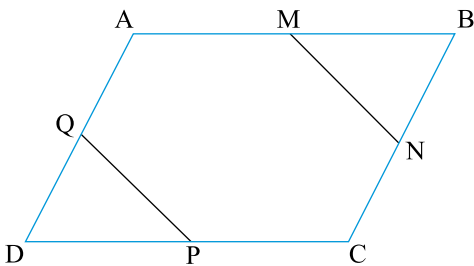


ریاضی

۱ مثلث $\triangle ABC$ متساوی الساقین است و پارخط AD نیمساز زاویه A می باشد. ثابت کنید دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle ACD$ همزهشت هستند. (حالت همزهشتی نوشته شود)



۲ در شکل زیر چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است و M, N, P, Q وسط اضلاع آن می باشند. ثابت کنید $\overline{MN} = \overline{PQ}$ است.

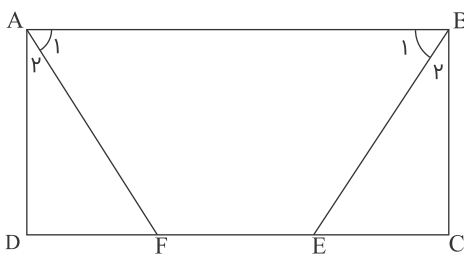


۳ ثابت کنید هر نقطه‌ای که روی نیمساز یک زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

در اثبات زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

"در مستطیل $ABCD$ ، پاره‌خط‌های AF و BE طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند. ثابت کنید AF و BE مساوی‌اند."

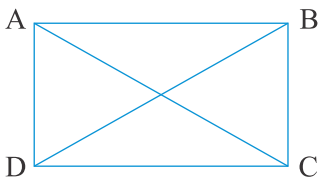
اثبات: چون $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$ و $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ$ و $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ بنابراین: $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$.



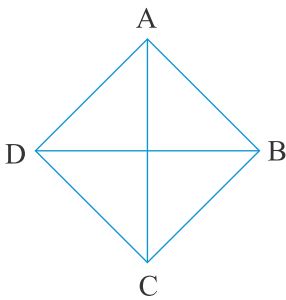
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ \dots = \dots \\ \dots = \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{بنابه حالت} \\ (\dots \dots \dots) \end{array} \rightarrow \triangle ADF \cong \triangle BCE \Rightarrow \dots = \dots$$

فرض و حکم مسائل زیر را بنویسید.

الف) آیا در مستطیل زیر، قطرهای باهم برابرند؟

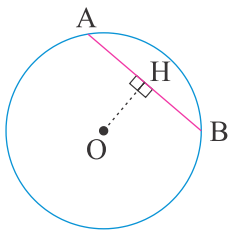


در لوزی زیر، قطرهای برهم عمودند.

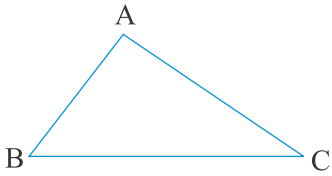


در هر مثلث، زاویه خارجی برابر است با مجموع زوایای داخلی غیرمجاور آن.

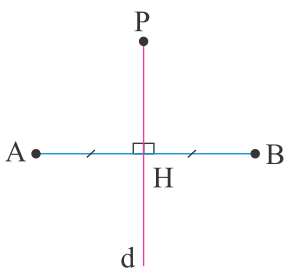
در شکل زیر، OH بر AB عمود است. ثابت کنید: $\overline{AH} = \overline{HB}$



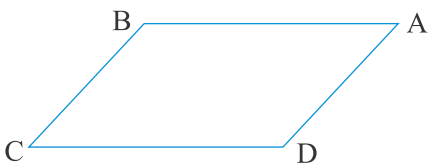
ث ثابت کنید مجموع زوایای داخلی مثلث ABC ، 180° درجه است. ث



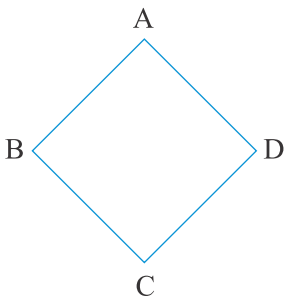
ث ثابت کنید هر نقطه مانند نقطه P بر روی عمودمنصف \overline{AB} از دو سر A و B به یک فاصله است. ج



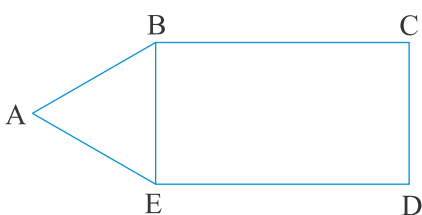
ج در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، زوایای مجاور مکمل‌اند. ج



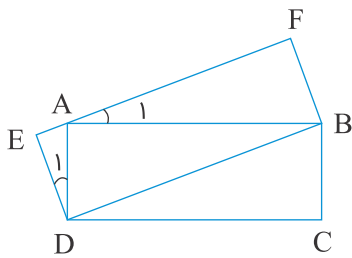
ج در چهار ضلعی زیر اگر چهار ضلع باهم برابر باشند، زوایای روبه‌رو باهم برابرند. ج



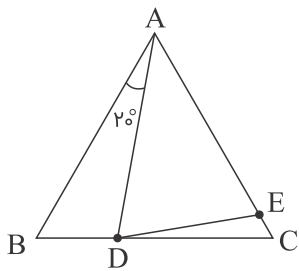
خ در شکل زیر، $\triangle ABE$ متساوی‌الاضلاع و $BCDE$ مستطیل است. ثابت کنید: $\overline{AE} = \overline{DC}$ خ



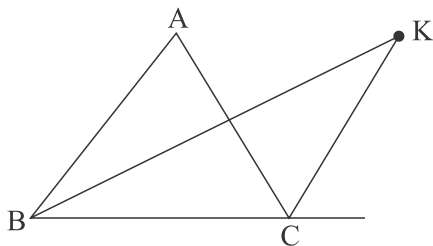
در شکل زیر $ABCD$ و $EFBD$ مستطیل هستند. ثابت کنید $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$.



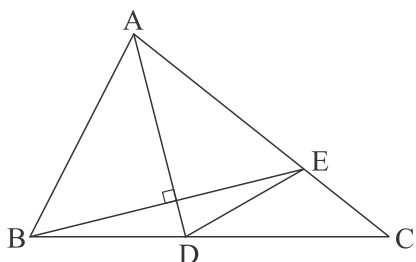
در شکل زیر $AB = AC$ و $AD = AE$ است. اندازه زاویه \hat{EDC} را بیابید. ($\hat{BAD} = 20^\circ$)



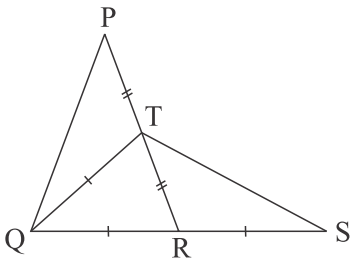
ثابت کنید اگر BK و CK به ترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی زوایای B و C باشند، $\hat{K} = \frac{\hat{A}}{2}$ است.



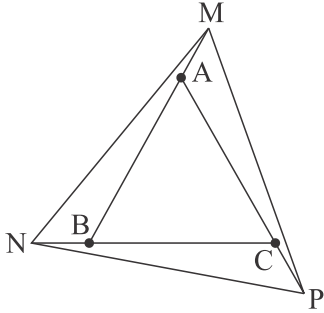
در مثلث ABC ، $\hat{A} = 80^\circ$ و $\hat{C} = 40^\circ$ است. از رأس B عمودی بر نیمساز AD رسم می‌کنیم تا AC را در E قطع کند. زاویه \hat{BED} چند درجه است؟



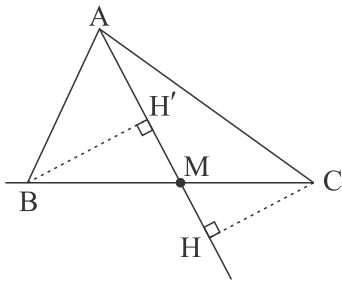
در شکل زیر ثابت کنید: $PQ = TS$



۱۰ اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به یک اندازه و مطابق شکل امتداد می‌دهیم تا نقاط M ، N و P پدید آید. ثابت کنید مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است.

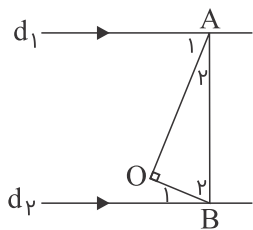


۱۱ ثابت کنید در مثلث دلخواه ABC ، رأس‌های B و C از میانهٔ نظیر ضلع BC به یک فاصله هستند.

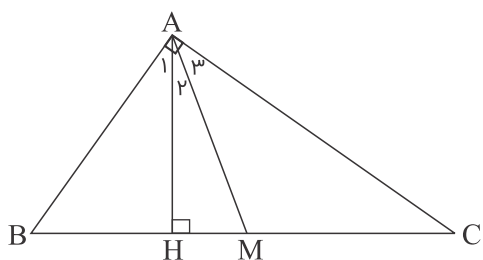


۱۲ ثابت کنید در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز وارد بر قاعده، میانه و ارتفاع هم است.

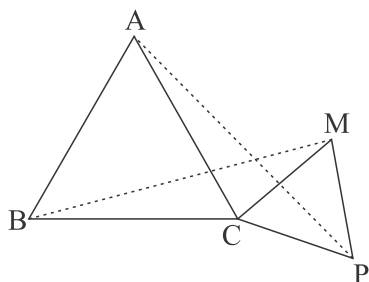
در شکل زیر، دو خط d_1 و d_2 موازی‌اند. OA و OB به گونه‌ای رسم شده‌اند که $\hat{A}_1 = 3\hat{A}_2$ و $\hat{B}_1 = 3\hat{B}_2$. اگر $\angle AOB = 90^\circ$ ، آنگاه مقدار $\hat{B}_2 - \hat{A}_2$ را بیابید.



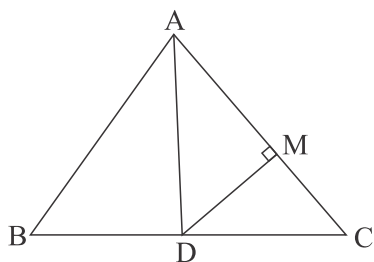
ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر برابر است با قدر مطلق تفاضل دو زاویه حاده. $\hat{A}_2 = |\hat{B} - \hat{C}|$



دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle MCP$ هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. ثابت کنید: $BM = AP$

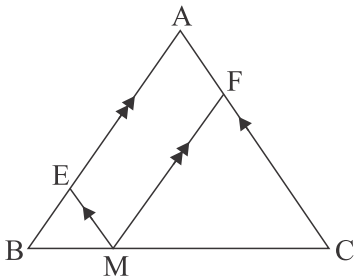


باتوجه به شکل، AD نیمساز زاویه A و $DM = 12$ ، $AD = 13$ و $AB = 14$ است. اندازه BD را بیابید.



۱۷ ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

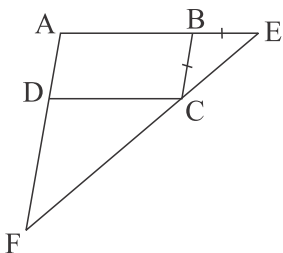
۱۸ در یک مثلث متساوی‌الساقین اندازه ساق‌ها ۶ و اندازه قاعده ۴ است. نقطه M قاعده مثلث را به نسبت ۵ به ۲ تقسیم می‌کند. از M دو خط موازی دو ساق رسم می‌کنیم تا ساق‌ها را در E و F قطع کند. $ME + MF$ را به دست آورید.



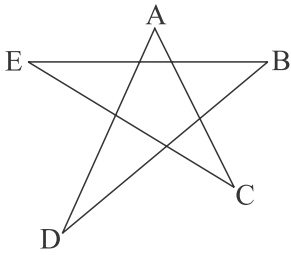
۱۹ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{C} = 90^\circ$) ارتفاع CH را رسم کرده‌ایم. باتوجه به مفروضات داده‌شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید. ($AH = 2, BH = 8$)

$BC = ?$ $AC = ?$ $CH = ?$

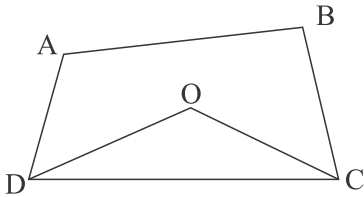
۲۰ باتوجه به شکل زیر، اگر بدانیم $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، ثابت کنید $\triangle AEF$ و $\triangle DFC$ متساوی‌الساقین هستند.



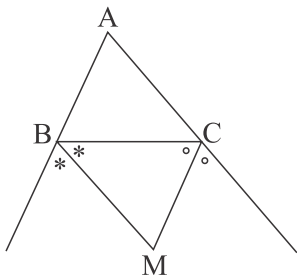
۲۱ در شکل زیر، ثابت کنید: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 180^\circ$



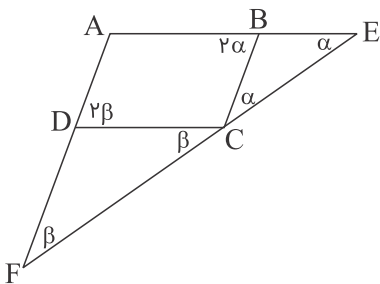
۲۲ در چهار ضلعی $ABCD$ ، CO و DO نیمسازهای زوایای C و D هستند. اگر $\hat{A} + \hat{B} = 200^\circ$ باشد، زاویه O چند درجه است؟



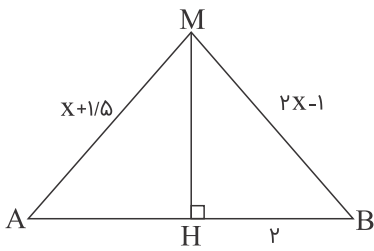
۲۳ ثابت کنید در هر مثلثی مانند ABC اگر BM و CM نیمساز زاویه‌های خارجی \hat{B} و \hat{C} باشند، داریم:

$$\hat{M} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$


۲۴ در متوازی‌الاضلاع مفروض $ABCD$ ، ضلع AB را از طرف B به اندازه BC و ضلع AD را به اندازه DC از طرف D امتداد می‌دهیم. ثابت کنید رأس C و دو نقطه جدید به‌وجودآمده، بر روی یک خط راست قرار دارند.

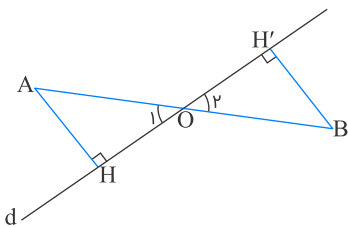


۲۵ در شکل زیر، نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. طول پاره‌خط MH را به دست آورید.

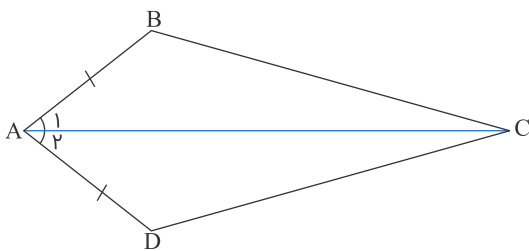


۲۶ ثابت کنید اگر در یک چهار ضلعی، قطرهای عمودمنصف یکدیگر باشند، آن چهار ضلعی لوزی است.

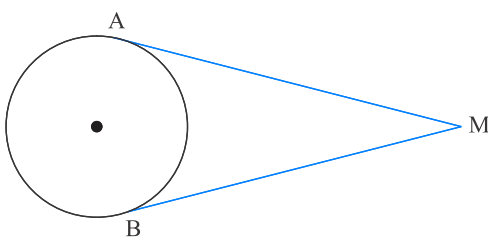
۲۷ در شکل زیر خط d از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد و فاصله دو نقطه A و B از خط d به یک فاصله است. ثابت کنید $OH = OH'$. (نوشتن فرض و حکم الزامی نیست)



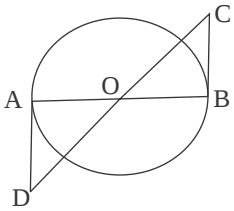
۲۸ در شکل زیر پاره‌خط AC نیمساز زاویه \hat{A} است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید $\overline{BC} = \overline{DC}$



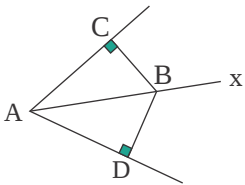
۲۹ از نقطه M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم نموده‌ایم. آیا اندازه این دو مماس برابر است؟ درستی ادعای خود را ثابت کنید.



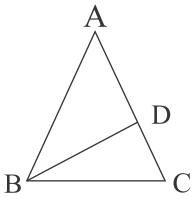
۳۰ در شکل زیر O مرکز دایره است، BC و AD بر دایره مماس هستند. نشان دهید که BC و AD برابرند.



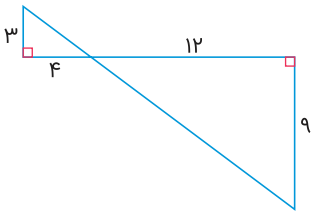
۳۱ در شکل زیر Ax نیمساز زاویه A است. ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



۳۲ مثلث $\triangle ABC$ در رأس A متساوی الساقین است. BD نیمساز زاویه B است. اگر $BD = AD$ باشد، زاویه A چند درجه است؟

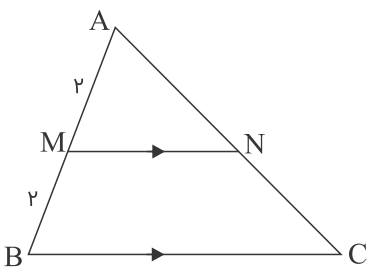


۳۳ دو مثلث زیر متشابه‌اند. نسبت تشابه این دو مثلث چند است؟



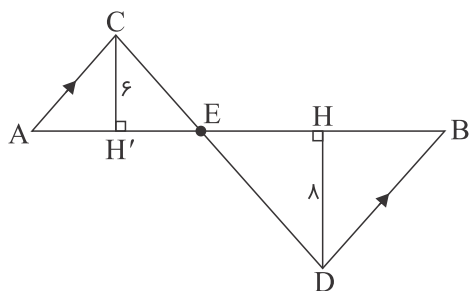
جاهای خالی زیر را با عبارات مناسب پر کنید.

۳۴ در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، $BC = 10$ ، $AM = BM = 2$ و $MN = \dots\dots\dots$ است.



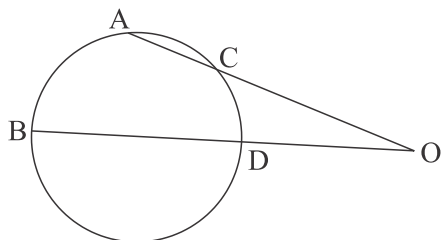
۳۵

باتوجه به اندازه‌های روی شکل و $AB = ۳۵$ ، مساحت مثلث BDE را به دست آورید. $(AC \parallel BD)$



۳۶

باتوجه به شکل زیر، ثابت کنید: $OC \times OA = OD \times OB$



به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۳۷

تصویر یک پنج ضلعی منتظم به ضلع ۱۰ سانتی‌متر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ۳۰ درصد را نشان می‌دهد. در تصویر خروجی، پنج ضلعی منتظم به ضلع چند سانتی‌متر خواهد بود؟

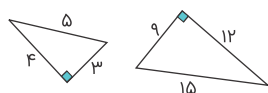
۳۸

زاویه پنج ضلعی منتظم ۱۰۸ درجه است. اندازه این زاویه در تصویر خروجی بیان شده چند درجه است؟

جاهای خالی زیر را کامل کنید.

۳۹

نسبت تشابه در دو مثلث زیر، برابر است.

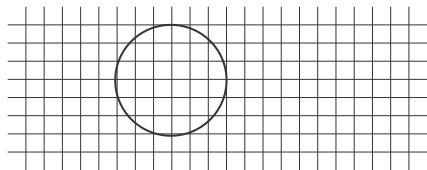


۴۰

مثلی به مختصات $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$ در محور مختصات رسم کنید. مثلث $A'B'C'$ را طوری رسم کنید که اضلاع آن دو برابر مثلث اول باشد.

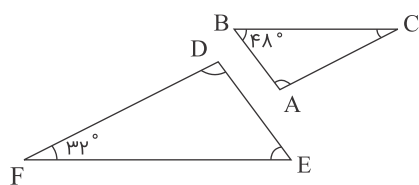
۴۱

دایره زیر را در نظر بگیرید. دایره‌ای رسم کنید که نسبت شعاع آن‌ها برابر با $\frac{1}{3}$ باشد، چند دایره می‌توان رسم کرد؟

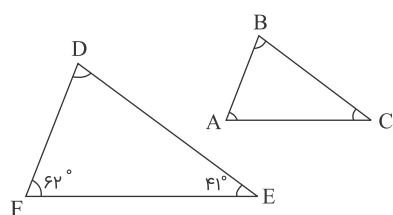


اگر در شکل‌های زیر دو مثلث باهم متشابه باشند، مقدار زاویه‌های مجهول را به دست آورید و نسبت اضلاع آن‌ها را بنویسید.

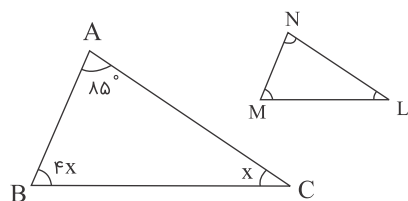
۴۲



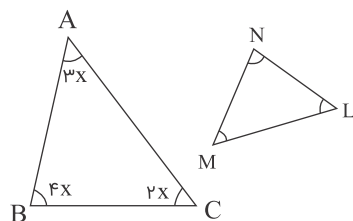
۴۳



۴۴



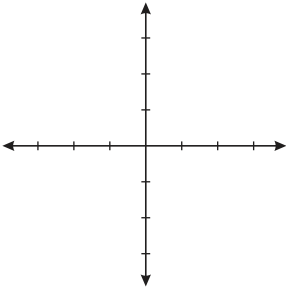
۴۵



۴۶

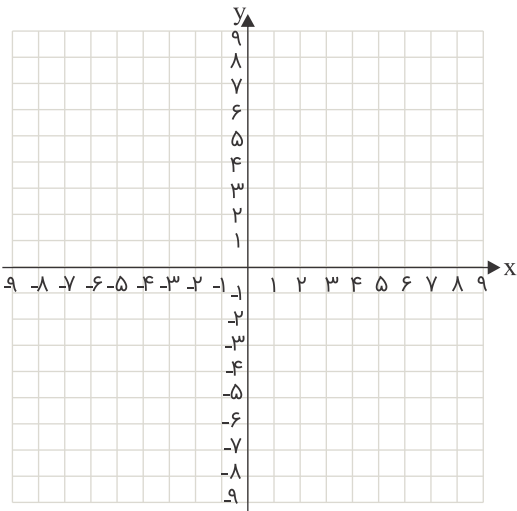
خط $y = \frac{2}{3}x - 1$ مفروض است:

الف خط را در دستگاه زیر رسم کنید.



ب عرض از مبدأ خط چقدر است؟

۴۷ خطوط زیر را رسم کنید.



$$y = \left(\frac{1}{6}\right)x - 6$$

الف

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 2$$

ب

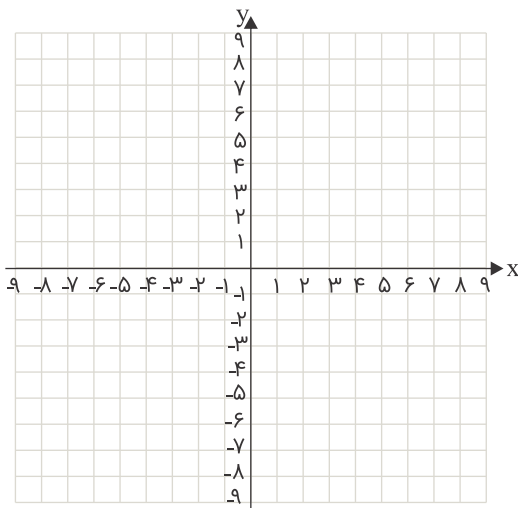
$$y = \left(\frac{1}{7}\right)x - 6$$

ب

$$y = \left(\frac{5}{7}\right)x + 6$$

ت

۴۸ خطوط زیر را رسم کنید.



$$y = \left(\frac{3}{5}\right)x - 2$$

الف

$$y = \left(-\frac{4}{5}\right)x - 6$$

ب

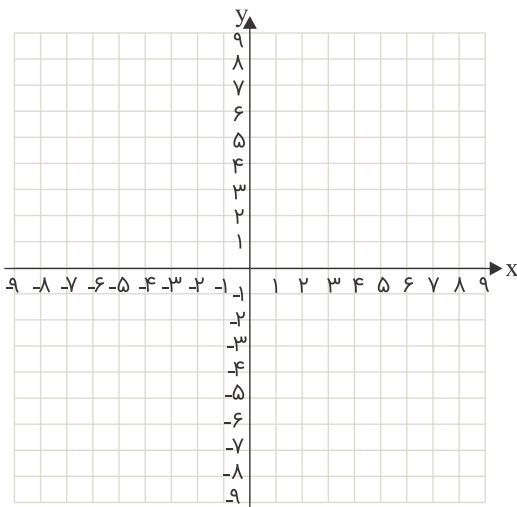
$$y = \left(-\frac{1}{5}\right)x + 2$$

ب

$$y = \left(\frac{4}{3}\right)x + 2$$

ت

خطوط زیر را رسم کنید. ۴۹



$$y = \left(\frac{2}{3}\right)x - 6$$

الف

$$y = \left(\frac{5}{6}\right)x - 1$$

ب

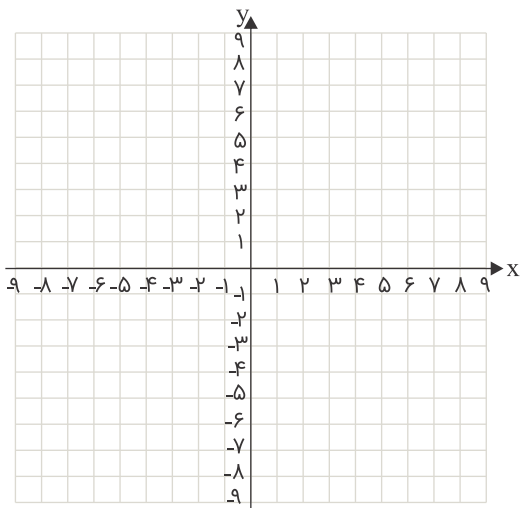
$$y = \left(-\frac{3}{2}\right)x - 5$$

ب

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)x + 6$$

ت

۵۰ خطوط زیر را رسم کنید.



$$y = \left(-\frac{1}{4}\right)x + 2$$

الف

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)x + 4$$

ب

$$y = \left(-\frac{1}{5}\right)x + 3$$

ب

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)x + 5$$

ت

۵۱ مشخص نمایید کدامیک از نقاط روی معادله خطهای داده شده قرار دارند؟

$$y = 3x - 1 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

الف

$$y = -4x + 2 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ +10 \end{bmatrix}$$

ب

$$y = \frac{2}{3}x + 3 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پ

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} \quad \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

ت

$$2x - 3y = 3 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ث

$$-3x + 2y = -1 \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

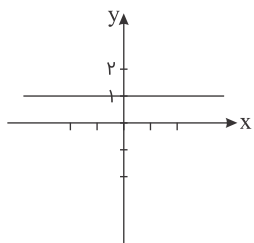
ج

$$-x + 3y = 2 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

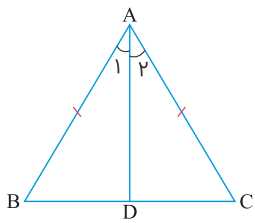
ب

۵۲ معادله خط محور طول‌ها را بنویسید.

۵۳ معادله خط زیر را بنویسید.



۱



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \overline{AD} = \overline{AD} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABD \cong \triangle ADC$$

$$\overline{MN} = \overline{PQ} \text{ حکم:}$$

فرض:

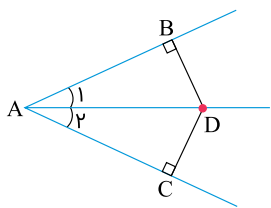
$$\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{DC} \Rightarrow \overline{MB} = \overline{DP}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC} \Rightarrow \overline{QD} = \overline{BN}$$

اثبات:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{MB} = \overline{DP} \\ \overline{BN} = \overline{QD} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle BMN \cong \triangle QPD \Rightarrow \overline{MN} = \overline{QP}$$

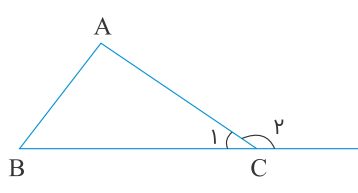
کوتاه‌ترین فاصله یک نقطه تا یک خط، خطی است که بر آن عمود می‌شود. با اثبات هم‌نهشتی دو مثلث ABD و ACD می‌توان ثابت کرد $BD = CD$ است.



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \\ AD = AD \text{ (مشترک) وتر} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ نیمساز} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{وز}} \triangle ABD \cong \triangle ACD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} BD = CD$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_r = \hat{B}_r \\ AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{بنابه حالت} \\ \text{(ز ض ز)} \end{array} \rightarrow \triangle ADF \cong \triangle BCE \Rightarrow AF = BE$$



۵ الف

فرض: ABCD مستطیل است.
حکم: $\overline{AC} = \overline{BD}$

ب

فرض: ABCD لوزی است.
حکم: $AC \perp BD$

ب

فرض: $\triangle ABC$ مثلث است.
حکم: $\hat{C}_r = \hat{A} + \hat{B}$

ت

فرض: $OH \perp AB$
حکم: $\overline{AH} = \overline{HB}$

ث

فرض: $\triangle ABC$ مثلث است.
حکم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

ج

فرض: d عمودمنصف \overline{AB} است.
نقطه P روی عمودمنصف قرار دارد.
حکم: $\overline{PA} = \overline{PB}$

چ

فرض: ABCD متوازی الاضلاع است.
حکم:

$$\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ, \quad \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{D} + \hat{C} = 180^\circ, \quad \hat{C} + \hat{B} = 180^\circ \end{array}$$

ح

فرض: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{DC}$
حکم: $\hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \hat{D}$

خ

فرض: $\triangle ABE$ متساوی الاضلاع است.
BCDE مستطیل است.
حکم: $\overline{AE} = \overline{DC}$

۵ فرض: ABCD مستطیل است.

EFBD مستطیل است.

حکم: $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$

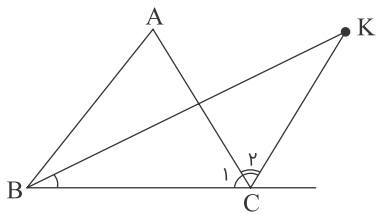
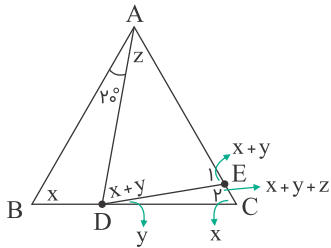
۶ زاویه‌های B و C را x در نظر می‌گیریم و $\hat{EDC} = y$ و $\hat{DAE} = z$ ؛ بنابراین داریم:

$\triangle EDC$ در $E_1 = x + y$ زاویهٔ خارجی :

$\triangle ADE$ در $E_2 = x + y + z$ زاویهٔ خارجی :

$$\left. \begin{array}{l} \triangle EDC \text{ در } : 2x + 2y + z = 180 \\ \triangle ABC \text{ در } : 2x + z + 20 = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{2x} + 2y + z = \cancel{2x} + z + 20$$

$$\Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow y = 10$$

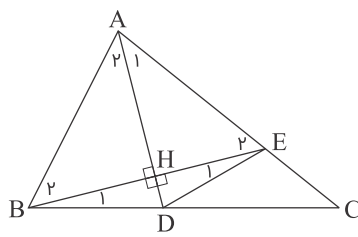


$$\hat{C}_2 = \frac{180^\circ - \hat{C}_1}{2} \Rightarrow \hat{C}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{C}_1}{2}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{A} \quad (*)$$

$$\triangle BKC : \hat{K} + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}_1 + 90^\circ - \frac{\hat{C}_1}{2} = 180^\circ$$

$$\hat{K} = 90^\circ - \left(\frac{\hat{C}_1 + \hat{B}}{2}\right) \xrightarrow{(*)} \hat{K} = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\hat{A}}{2}$$

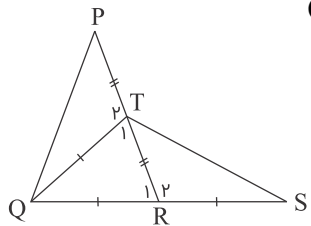


$$\hat{A}_1 = \hat{A}_\nu = 40^\circ$$

$$\hat{E}_\nu = \hat{B}_\nu = 50^\circ, \hat{B}_1 = 10^\circ$$

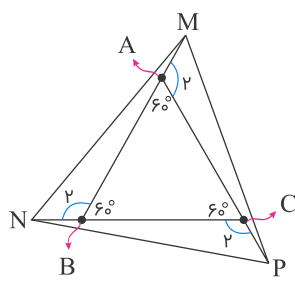
$$\left\{ \begin{array}{l} AH = AH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_\nu \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_\nu = 40^\circ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \triangle AHB \cong \triangle AHE \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} EH = BH$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EH = BH \\ \hat{H}_\nu = \hat{H}_\nu = 90^\circ \\ DH = DH \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle BHD \cong \triangle DHE \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1 = 10^\circ = \hat{B}_1\hat{E}\hat{D}$$



$$QT = QR \Rightarrow \hat{T}_1 = \hat{R}_1 \xrightarrow{\text{زوایای مکمل}} \hat{T}_\nu = \hat{R}_\nu$$

$$\left. \begin{array}{l} QT = RS \text{ فرض مسئله} \\ PT = TR \text{ فرض مسئله} \\ \hat{T}_\nu = \hat{R}_\nu \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle PQT \cong \triangle TRS \Rightarrow PQ = TS$$

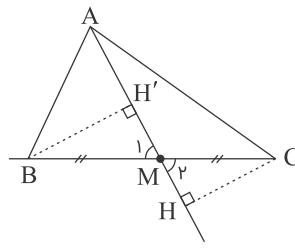


$$\left\{ \begin{array}{l} AB = BC = AC \\ AM = BN = CP \end{array} \right. \xrightarrow{+} \underbrace{AB + AM}_{MB} = \underbrace{BC + BN}_{NC} = \underbrace{AC + CP}_{AP}$$

$$\left. \begin{array}{l} MB = NC = AP \\ NB = CP = AM \\ \hat{A}_\nu = \hat{B}_\nu = \hat{C}_\nu = 120^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle MNB \cong \triangle NPC \cong \triangle AMP$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} NM = MP = NP \\ \hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60^\circ \end{array} \right.$$

$NM = MP = NP \Rightarrow \triangle MNP$ متساوی الاضلاع است

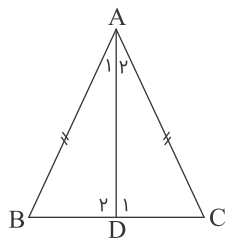


فرض : $BM = CM$

حکم : $BH' = CH$

$$\left\{ \begin{array}{l} BM = CM \text{ (AM میانه است)} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_\nu \text{ متقابل به رأس} \\ \hat{H}' = \hat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle BH'M \cong \triangle CHM$$

$$\Rightarrow BH' = CH$$

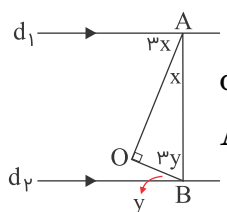


فرض : $AB = AC$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حکم : $BD = CD$, $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \text{ فرض} \\ AD = AD \text{ ضلع مشترک} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} BD = CD \Rightarrow \text{میانۀ AD است} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \frac{180}{2} = 90^\circ \Rightarrow \text{ارتفاع AD است} \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array} \right.$$



$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow 3x + 3y = 180 \Rightarrow x + y = 60$$

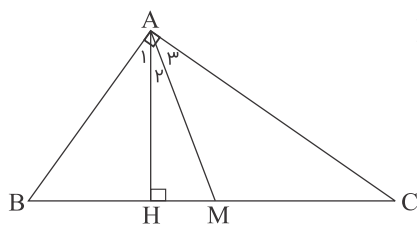
$$\angle AOB = 90 \Rightarrow x + 3y = 90$$

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ x + y = 60 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{30}{2}, x = \frac{30}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{B} - \hat{A} = 3y - x = 3 \times \frac{30}{2} - \frac{30}{2} = 60$$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

طبق نکته فوق، $MA = MB$ است، بنابراین مثلث $\triangle AMB$ متساوی‌الساقین می‌باشد. پس داریم:



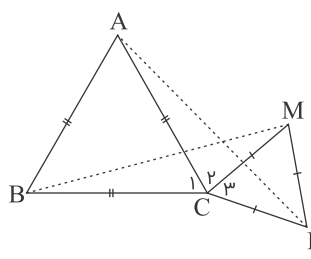
$$MA = MB \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 90^\circ$$

$$\triangle AHC : \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 90^\circ \\ \triangle AHC : \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{C} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \cancel{\hat{A}_2} + \cancel{\hat{A}_3} = \cancel{\hat{A}_2} + \cancel{\hat{A}_3} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B} - \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} - \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_2 = |\hat{B} - \hat{C}|$$



$$\hat{C}_1 = \hat{C}_3 = 60^\circ$$

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}_3 + \hat{C}_4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} BC = AC \text{ فرض مسئله} \\ CM = CP \text{ فرض مسئله} \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}_3 + \hat{C}_4 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle BCM \cong \triangle ACP \Rightarrow BM = AP$$

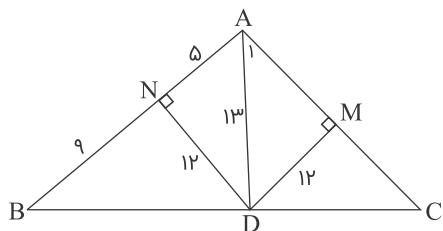
از D بر AB عمود می‌کنیم. می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز تا دو ضلع زاویه یکسان است. پس: $DN = DM = 12$

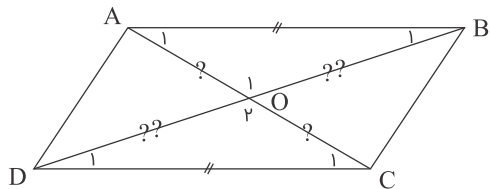
$$\text{طبق قضیه فیثاغورس} : AN^2 + DN^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow AN^2 = AD^2 - DN^2 = 13^2 - 12^2 = 25$$

$$\Rightarrow AN = 5 \Rightarrow NB = 14 - 5 = 9$$

$$\Rightarrow NB^2 + ND^2 = BD^2 \Rightarrow BD^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow BD = 15$$





فرض: متوازی‌الاضلاع ABCD
حکم: $OA = OC, OB = OD$

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ (اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع)} \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \text{ (} AB \parallel CD \text{ , مورب } AC \text{)} \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \text{ (} AB \parallel CD \text{ , مورب } BD \text{)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{فرض ز}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

مثلت متساوی‌الساقین است، پس:

$$\hat{B} = \hat{C} = x$$

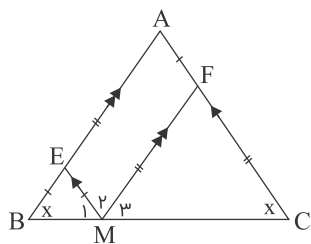
$$\begin{cases} ME \parallel AC \text{ , مورب } BC \Rightarrow \hat{M}_1 = x = \hat{C} \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین } \triangle BEM \\ MF \parallel AB \text{ , مورب } BC \Rightarrow \hat{M}_3 = x = \hat{B} \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین } \triangle MFC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BE = ME \\ CF = MF \end{cases} \quad (1)$$

از طرفی چهارضلعی AEMF دارای دو ضلع دو به دو موازی است، پس متوازی‌الاضلاع می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} ME = AF \\ MF = AE \end{cases} \quad (2)$$

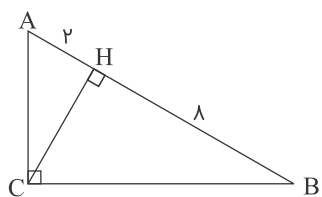
$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} BE = ME = AF \\ CF = MF = AE \end{cases} \Rightarrow ME + MF = AF + CF = AC = c$$



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ABC با ارتفاع CH روابط طولی زیر برقرار است:

$$CH^2 = AH \cdot BH, \quad AC^2 = AH \cdot AB, \quad BC^2 = BH \cdot BA$$

با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$CH^2 = AH \cdot BH \Rightarrow CH^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow CH = 4$$

$$AC^2 = AH \cdot AB \Rightarrow AC^2 = 2 \times 10 = 20 \Rightarrow AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BC^2 = BH \cdot BA \Rightarrow BC^2 = 8 \times 10 = 80 \Rightarrow BC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

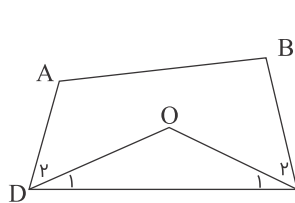
$BE = BC \Rightarrow \hat{E} = \hat{C}_1$
 $AE \parallel DC, \text{ مورب } FE \Rightarrow \hat{E} = \hat{C}_2$
 $AF \parallel BC, \text{ مورب } FE \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{F}$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{C}_1 \\ \hat{E} = \hat{C}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\hat{E} = \hat{C}_1} \hat{C}_2 = \hat{F}$$

$\hat{C}_2 = \hat{F} \Rightarrow DC = DF \Rightarrow \triangle DFC$ متساوی الساقین است.

$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{C}_1 \\ \hat{F} = \hat{C}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{E} = \hat{F} \Rightarrow AE = AF \Rightarrow \triangle AEF$ متساوی الساقین است.

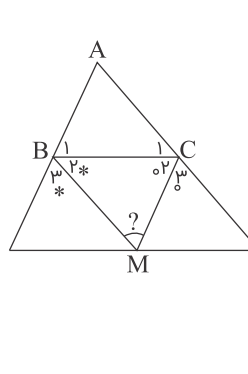
$\hat{A} + \hat{M}_1 + \hat{N}_1 = 180^\circ$
 در $\triangle MBD$: $\hat{M}_1 = \hat{B} + \hat{D}$
 در $\triangle ENC$: $\hat{N}_1 = \hat{E} + \hat{C}$
 $\hat{A} + \underbrace{\hat{M}_1}_{\hat{B} + \hat{D}} + \underbrace{\hat{N}_1}_{\hat{E} + \hat{C}} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{C} = 180^\circ$



$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$, $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$, $\hat{A} + \hat{B} = 200$
 $\underbrace{\hat{A} + \hat{B}}_{200} + \underbrace{\hat{C}_1 + \hat{C}_2}_{\hat{C}_1} + \underbrace{\hat{D}_1 + \hat{D}_2}_{\hat{D}_1} = 360$
 $2\hat{C}_1 + 2\hat{D}_1 = 360 - 200$

$2(\hat{C}_1 + \hat{D}_1) = 160 \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = 80^\circ$

$\triangle OCD$ در $\hat{O} + \underbrace{\hat{C}_1 + \hat{D}_1}_{80} = 180 \Rightarrow \hat{O} = 100$



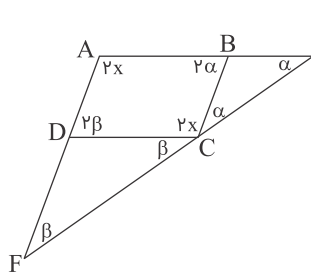
حکم : $\hat{M} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$
 $\triangle ABC$: $\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 - \hat{A}$

$$\begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180 \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = 180 \end{cases} \xrightarrow{+} \underbrace{\hat{B}_1 + \hat{C}_1}_{180 - \hat{A}} + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \underbrace{\hat{B}_3 + \hat{C}_3}_{\hat{B}_2} = 360$$

 $\Rightarrow 2\hat{B}_2 + 2\hat{C}_2 = 360 - 180 + \hat{A}$

$2(\hat{B}_2 + \hat{C}_2) = 180 + \hat{A} \xrightarrow{\div 2} \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = \frac{180 + \hat{A}}{2} = 90 + \frac{\hat{A}}{2}$

$\hat{M} + \underbrace{\hat{B}_2 + \hat{C}_2}_{90 + \frac{\hat{A}}{2}} = 180 \Rightarrow \hat{M} = 180 - 90 - \frac{\hat{A}}{2} = 90 - \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{M} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$



$A = 2x \Rightarrow C = 2x$
 $\triangle ABCD$ در $2x + 2\alpha + 2x + 2\beta = 360$
 $4x + 2\alpha + 2\beta = 360 \Rightarrow 2(2x + \alpha + \beta) = 360 \Rightarrow 2x + \alpha + \beta = 180$
 در نقطه C مجموع سه زاویه 180 درجه است؛ پس سه نقطه C, F, E بر روی یک خط راست قرار دارند.

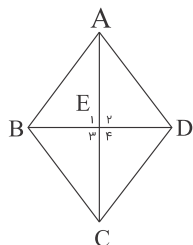
نقطه M روی عمودمنصف MH قرار دارد، پس از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی: $MA = MB$

$MA = MB \Rightarrow 2x - 1 = x + 1/5 \Rightarrow 2x - x = 1/5 + 1 \Rightarrow x = 2/5$

$MB = 4$, $HB = 2$

$MH^2 = MB^2 - HB^2 \Rightarrow MH^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$\Rightarrow MH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



استدلال:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مشترک AE} \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90^\circ \text{ فرض مسئله} \\ BE = DE \text{ فرض مسئله} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \triangle ADE \cong \triangle ABE \Rightarrow AB = AD$$

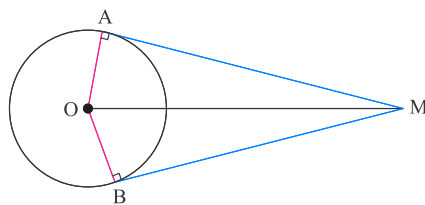
$$\left. \begin{array}{l} \text{مشترک BE} \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_3 = 90^\circ \text{ فرض مسئله} \\ AE = CE \text{ فرض مسئله} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \triangle ABE \cong \triangle CBE \Rightarrow AB = BC$$

به همین شکل ضلع چهارم هم با سه ضلع دیگر برابر است در نتیجه شکل مورد نظر لوزی است.

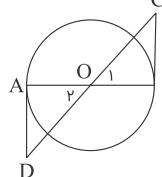
$$\left. \begin{array}{l} \text{d از وسط AB می‌گذرد} \\ OA = OB \\ \text{فاصله دو نقطه A و B از خط d به یک فاصله است} \\ AH = BH' \\ H = H' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \triangle OHA \cong \triangle OH'B \Rightarrow OH = OH'$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} \text{ نیمساز زاویه A} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \overline{AB} = \overline{AD} \text{ فرض مسئله} \\ AC = AC \text{ اشتراک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.ز.ض}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \overline{BC} = \overline{DC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{MO} = \overline{MO} \\ \overline{OA} = \overline{OB} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBM \cong \triangle OAM \text{ (وض)} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{متقابل به رأس } O_1 = O_2 \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز.ض.ز)}} \underbrace{\triangle OAD \cong \triangle OBC}_{\text{نمره } 0/25} \Rightarrow \underbrace{AD = BC}_{\text{نمره } 0/25}$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (o/25)} \\ AB = AB \text{ مشترک (o/25)} \\ \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \text{ (o/25)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{و.ز}} \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow BC = BD \text{ (o/25)}$$

$BD = AD \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_2$

$\triangle ABC$ متساوی الساقین : $\hat{B} = \hat{C}$

BD نیمساز : $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = \hat{C} = x$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow x + 2x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$

۳ یا $\frac{1}{3}$ ۳۳

پاسخ سؤال ۳۴

$MN = 5$

نکته: اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر با k باشد، نسبت ارتفاع‌های متناظر آن‌ها نیز k است. ۳۵

متقابل به رأس $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$

مورب (AC || BD , AB) $\hat{A} = \hat{B}$

دو زاویه مساوی $\xrightarrow{\text{و.ز}} \triangle ACE \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{CH'}{DH}$

$$\frac{x}{35-x} = \frac{8}{15} \Rightarrow 4x = 105 - 3x \Rightarrow 7x = 105 \Rightarrow x = 15$$

$AE = 15 \Rightarrow BE = 35 - 15 = 20$

$\Rightarrow S_{\triangle BDE} = \frac{20 \times 8}{2} = 80$

از D به A و از C به B وصل می‌کنیم. ۳۶

$\hat{A} = \hat{B} = \frac{\widehat{CD}}{2}$ محاطی

$\hat{O} = \hat{O}$

$\Rightarrow \triangle OAD \sim \triangle OBC$

$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} OC \times OA = OD \times OB$

$$\frac{30}{100} \times 10 = 3 \text{ cm}$$

۳۷

۳۸

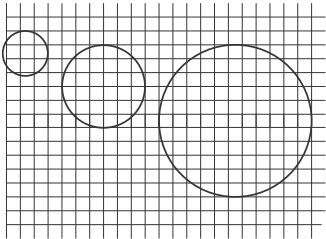
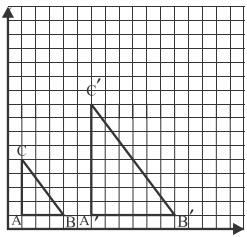
۱۰۸ درجه. در تشابه زاویه‌ها تغییر نمی‌کند.

پاسخ سؤال ۳۹

$\frac{1}{3}$ یا ۳ (۰/۲۵ نمره)

۳۹

۴۰



۴۱

دو دایره می‌توان رسم کرد.

پاسخ سؤالات ۴۲ تا ۴۵

۴۲

$$\hat{A} = \hat{D} = 180^\circ - (32^\circ + 48^\circ) = 100^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{E} = 48^\circ$$

$$\hat{C} = \hat{F} = 32^\circ$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{FE}$$

$$\hat{A} = \hat{F} = 62^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{D} = 180^\circ - (41^\circ + 62^\circ) = 77^\circ$$

$$\hat{C} = \hat{E} = 41^\circ$$

$$\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{FE}$$

۴۳

$$۴x + x = ۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ \Rightarrow x = \frac{۹۵^\circ}{۵} = ۱۹^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{N} = ۱۵^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{M} = ۴x = ۴ \times ۱۹^\circ = ۷۶^\circ$$

$$\hat{C} = \hat{L} = x = ۱۹^\circ$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{NL} = \frac{BC}{ML}$$

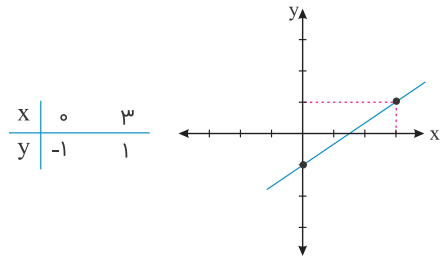
$$۴x + ۳x + ۲x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = \frac{۱۸۰^\circ}{۹} = ۲۰^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{L} = ۳x = ۳ \times ۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{N} = ۴x = ۴ \times ۲۰^\circ = ۸۰^\circ$$

$$\hat{C} = \hat{M} = ۲x = ۲ \times ۲۰^\circ = ۴۰^\circ$$

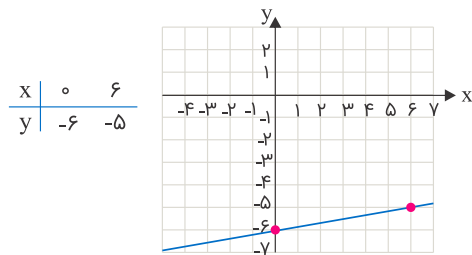
$$\frac{AB}{LN} = \frac{AC}{ML} = \frac{BC}{MN}$$



عرض از مبدأ $x=۰ \rightarrow y = -۱$

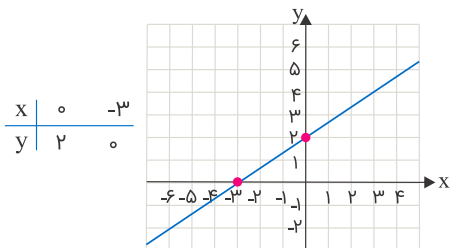
$$y = \frac{۲}{۳}x - ۱$$

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



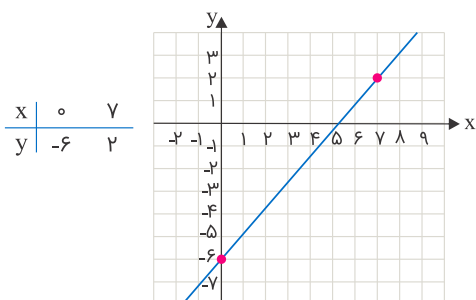
ب

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



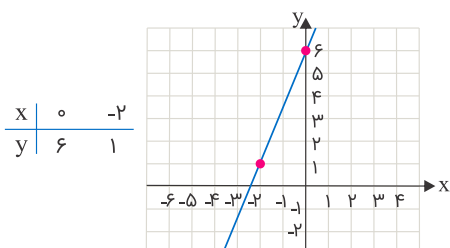
پ

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



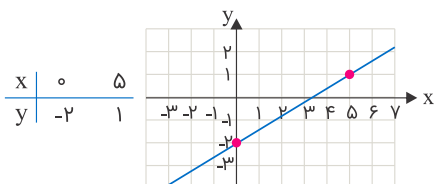
ت

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



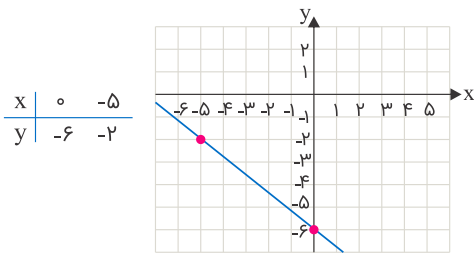
الف ۴۸

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



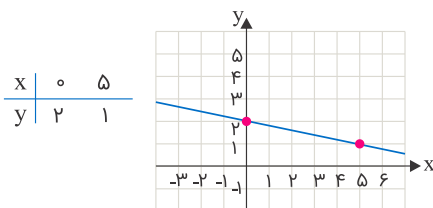
ب

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



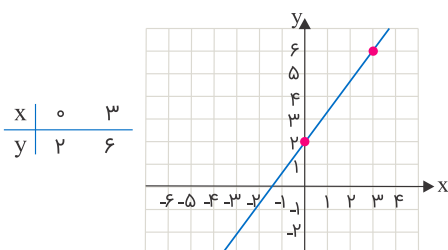
پ

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



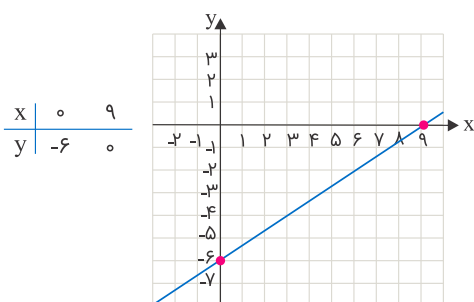
ت

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



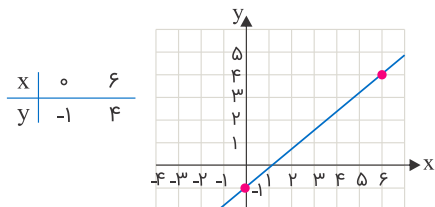
الف ۴۹

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



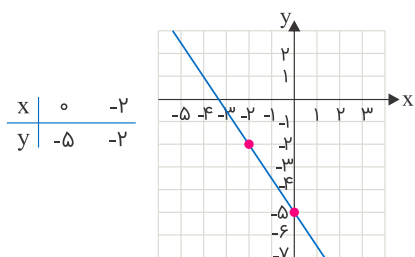
ب

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



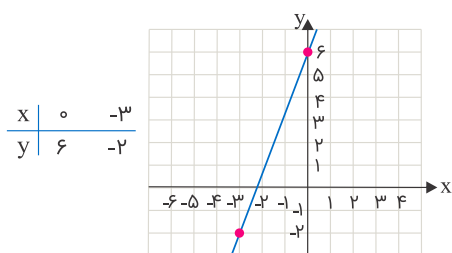
پ

با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



ت

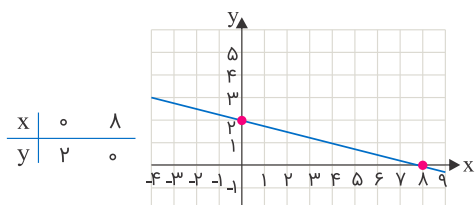
با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



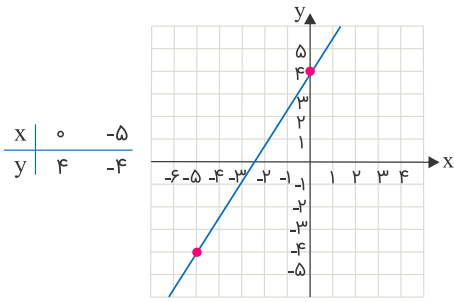
الف

۵۰

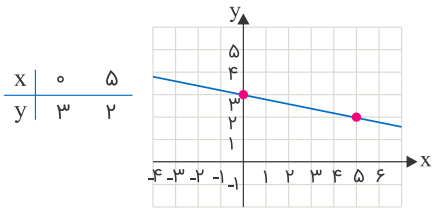
با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



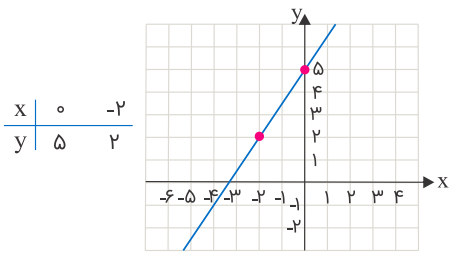
ب با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



ب با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



ت با به دست آوردن مختصات دو نقطه از معادله، خط را رسم می‌کنیم.



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب

ب

ت

الف ۵۱

ب

پ

ت

ث

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ج

ج

۵۲ معادله خط محور طول $y = 0$ است.

۵۳ $y = 1$