

درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند:

منشوری، کره و هرمی.

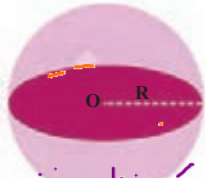


کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کره است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کره را نام ببرید.

فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.



با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

کره مجموعه نقاطی از فضا است که همه آن نقاط از یک نقطه در فضا به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع کره می‌گوییم.

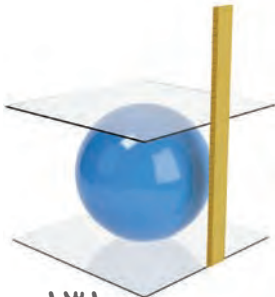
۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه

حجم کره را پیدا کنیم.

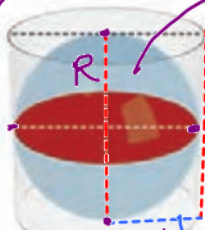
● یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

● مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر

کره را اندازه بگیرید.



کره محاط در استوانه
بسیار حجم



مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید، به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

استوانه محاط بر کره
ارتفاع استوانه: $2R$
شعاع قاعده استوانه: R

$R = \text{شعاع کره} = \text{شعاع قاعده استوانه}$

حجم استوانه: $V = S \cdot h = \pi r^2 h = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$

توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را بپريد تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود، با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.



- الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟ $\frac{3}{2}$ برابر
- ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟ $\frac{3}{2}$ برابر
- ج) بنابراین حجم کره $\frac{2}{3}$ برابر حجم استوانه است.
- د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد،

دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

$$V_{\text{کره}} = \frac{2}{3} V_{\text{استوانه}} = \frac{2}{3} (2\pi R^3) = \frac{4}{3} \pi R^3$$
 حجم کره‌ای به شعاع R از دستور $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

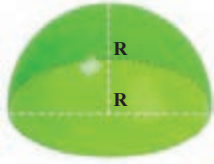
- ۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع 10 سانتی‌متر محاط شده است.
 - الف) حجم کره را به دست آورید.
 - ب) حجم استوانه را به دست آورید.
 - ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.
- ۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر را به دست آورید.



مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بیوشاند.

این دو دایره کاغذی را هر طور که دوست دارید، برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرند و سطح نیم کره نیز دیده نشود.

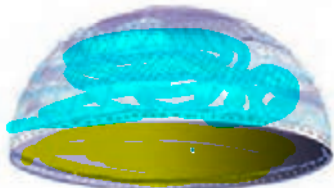
آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بیوشانید؟ درباره مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفت‌وگو کنید.



ثابت می‌شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).
الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با: _____
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: _____

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با: $S=4\pi R^2$

کار در کلاس

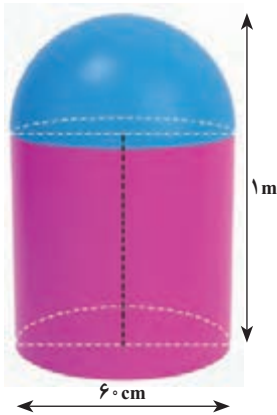


۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع 10 سانتی متر را پیدا کنید.

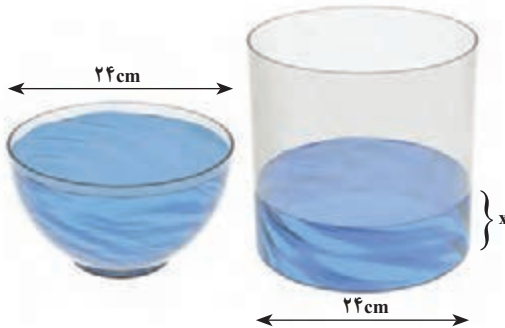
۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع 10 سانتی متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

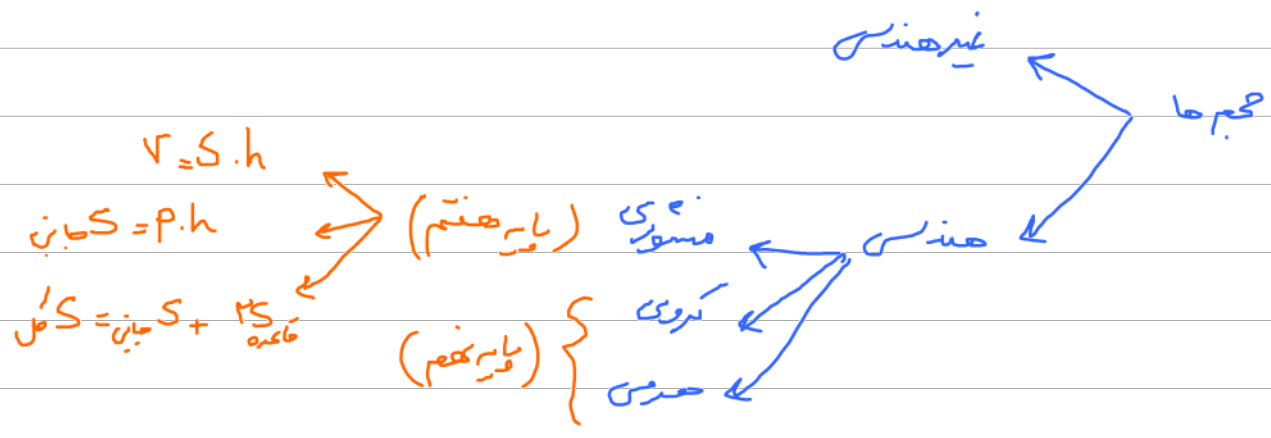
- ۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.
 الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.
 ب) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع با نماد علمی بنویسید.
 ج) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود $۱/۶۴۸/۰۰۰$ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.



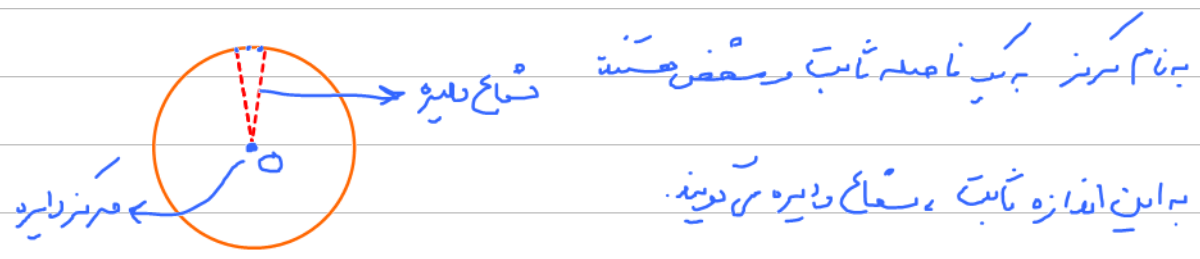
- ۲- یک استوانک^۱ (کپسول) گاز از قرار گرفتن یک نیمکره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده استوانک ۶۰ سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم استوانک را بر حسب متر مکعب به دست آورید.
 اگر بخواهیم سطح کل این استوانک را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است، به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد؟



- ۳- پیمانه‌ای به شکل نیمکره و به قطر دهانه ۲۴ سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

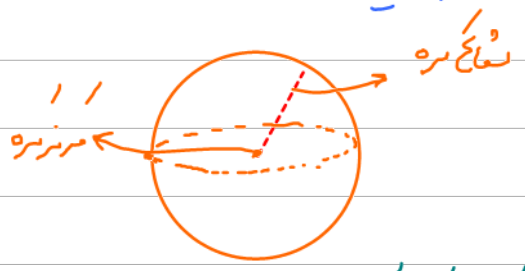


دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که همه بر آن نقطه‌ها از یک نقطه ثابت در همان صفحه،



کره: مجموعه نقاطی از صفحه است که همه بر آن نقطه‌ها از یک نقطه ثابت در صفحه،

به نام مرکز کره، به یک فاصله ثابت و مشخص هستند به این اندازه ثابت، شعاع کره می‌گویند.



نیم کره: اگر دایره را نصف کنیم، به هر سمتی آن دو نیم کره گفته می‌شود.

اگر کره توپر نصف شود به نیم کره توپر داریم.

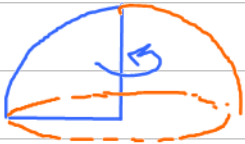
اگر کره توخالی نصف شود به قطاع کروی توپر داریم. مثل عله (عروق عین)

دایره عقیم: اگر یک کره را با صفحه‌ای عمود برش قطع کنیم به دو نیم کره (ساده) تقسیم شود.
 سطح مقطع هر نیم کره یک دایره است. این دایره بزرگترین دایره در کره است به آن دایره عقیم می‌گویند.

* از دوران یک دایره با نیم دایره حول قطب آن یک کره ایجاد می‌شود



* از دوران یک ربع دایره حول شعاع آن، نیم کره ایجاد می‌شود.



$\frac{4}{3} \pi R^3$	کره	} حجم
$\frac{2}{3} \pi R^3$	نیم کره	
$4\pi R^2$	کره	} مساحت
$3\pi R^2$	نیم کره توپه (برای نیم کره، عمق صین)	

مثال: حجم کره‌ای به شعاع ۱۰ را بدست آورید.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (10)^3 = \frac{4000\pi}{3}$$

مثال: حجم نیم کره‌ای به قطر ۴ cm را بدست آورید. ($\pi = 3$)

۲ = شعاع

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \times 3 \times (2)^3 = 16 \text{ cm}^3$$

مثال: مساحت کمره‌ای به قطر 4cm راباید.

3 = شعاع

$$S_{\text{کمره}} = 4\pi R^2 = 4\pi (3)^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

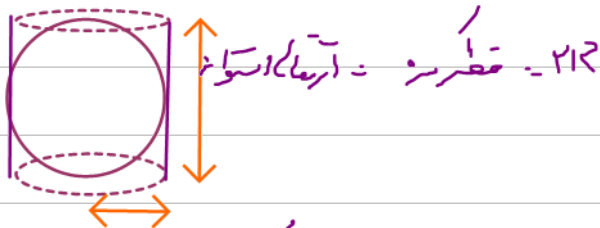
مثال: مساحت نیم کمره‌ای توپر به شعاع 2 راباید.

$$S_{\text{نیم کمره توپر}} = 2\pi R^2 = 2\pi (2)^2 = 8\pi$$

مثال: مساحت یک عمود صحن به قطر 1cm راباید (3=π)
 4cm = ارتفاع

$$S_{\text{نیم کمره توپال}} = 2\pi R^2 = 2\pi (0.5)(4) = 4\pi$$

* اگر یک کمره بدون یک استوانه طوری قرار گیرد که از اضلاع، بالا و پایین بر آن مساحت نبود، کمره در استوانه محاط شده و استوانه بر کمره محاط می‌شود.



R = شعاع کمره = شعاع استوانه

مثال: در یک استوانه‌ای به شعاع 2 سانتی‌متر محاط شده است. (3=π)

شعاع کمره = 2
ارتفاع استوانه = 4

الف) حجم کمره را بدست آورید.

$$V_{\text{کمره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (2)^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$$

ب) حجم استوانه را بدست آورید.

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi (2)^2 (4) = 16\pi \text{ cm}^3$$

ج) حجم فضای بین کمره و استوانه:

