

# استدلال و اثبات در هندسه



أدعُ إلى سبيلِ رَبِّكَ بِالْحِكْمَةِ وَ الْمَوْعِظَةِ الْحَسَنَةِ وَ جادلْهُمْ بِالَّتِي هِيَ أَحْسَنُ ...  
با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و  
مناظره کن! (سورة نحل، آیه ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می آورد و در عین حال نماه زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی رغم آنکه میلیاردها دانه اند، اما هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و به نظر می رسد هیچ دو تایی از آنها «هم‌نهشت» نیستند!

درس اول

استدلال

**استدلال:** دلیل آوردن و استفاده از معلومات قبلی برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مشخص نبوده است. برای

استدلال کردن می توان از روش های مختلفی استفاده کرد که میزان اعتبار هر کدام با دیگری متفاوت است .

### برخی از انواع استدلال:

بیشتر بدانیم

استدلال ; توانمندی ارزشمند ذهن انسان است. برخی از انواع استدلال عبارتند از:

الف) شهودی ( درک به کمک حواس)

ب) استقرایی ( استدلال از جزء به کل بر مبنای تعداد محدودی از مشاهدات)

ج) مثال نقض

د) استدلال تمثیلی ( یافتن نوعی شباهت بین دو چیز مثلا چون علی باهوش است پس برادرش هم باهوش است.

ه) استدلال استنتاجی ( هنگامی که در استدلال از یک نظریه کلی استفاده می کنیم تا به فرضیه های جزئی

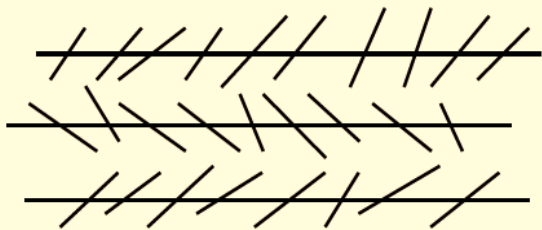
برسیم) و ...

**نکته:** معتبرترین نوع استدلال در هندسه استدلال استنتاجی است.

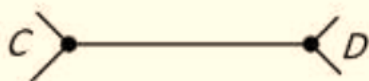
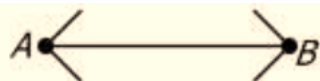
روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایقی است که درستی آن ها را پذیرفته ایم و اساس اثبات قضایای کلی می باشد.

در هندسه استفاده از ترسیم و شکل ها معمول است اما نمی توان بر اساس این روش یعنی استدلال به کمک ترسیم به طور کامل

اکتفا کنیم



مثال : با مشاهده تشخیص دهید آیا در شکل زیر خطوط رسم شده موازی می باشند؟



به تصویر مقابل دقت کنید.

به نظر شما کدام پاره خط بزرگتر است؟

با استفاده از خط کش یا کاغذ شفاف از درستی پاسخ خود اطمینان پیدا کنید.

آیا می توان با مشاهده یا استفاده از حواس از درستی یک موضوع اطمینان حاصل کرد؟ چرا؟

**خیر زیرا حواس ما خطا دارند و گاهی دچار خطای دید می شویم.**

**نکته:** ضعیف ترین استدلال ، استدلال شهودی است.

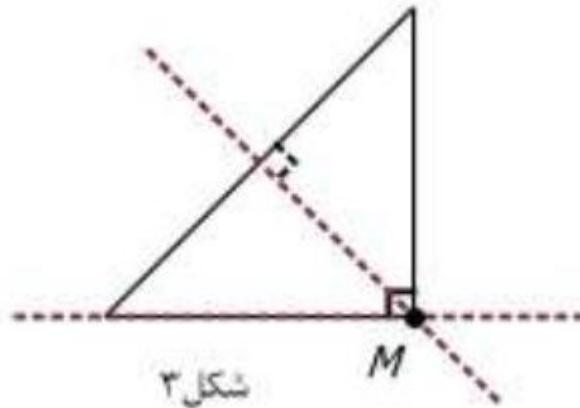
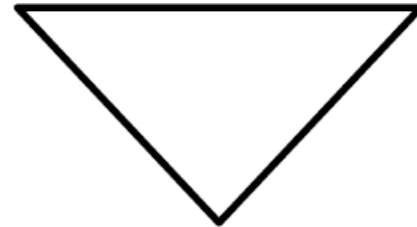
در تمام خانواده هایی که دو فرزند به نام علی و حسین دارند علی  
فرزند بزرگتر بوده است پس دوست من که علی نام دارد از  
برادرش حسین بزرگتر است. **(نامعتبر - بر پایه ی تعداد محدودی از  
مشاهدات)**

چون اعداد ۳ و ۵ و ۷ اعدادی اول و فرد هستند، بنابراین همه ی اعداد  
فرد اول هستند. **(نامعتبر - بر پایه ی تعداد محدودی از مشاهدات)**

## مثال نقض: برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم.

**مثال:** دو ارتفاع هر کدام از مثلث های زیر را رسم کنید و محل برخورد ارتفاع ها را تعیین کنید . آیا می توان گفت محل

برخورد دو ارتفاع هر مثلثی داخل مثلث است ؟ سعی کنید یک مثال نقض بیاورید.



**نکته:** استفاده از حواس پنج گانه به دلیل امکان وجود خطا ، روش مناسبی برای استدلال و نتیجه گیری نیست.

**نکته:** استفاده از شکل ، ترسیم و شهود کمک زیادی به تشخیص راه حل درست می کند ، اما یک تشخیص قابل اطمینان

نمی باشد.

**مثال:** کدام یک از استدلال های زیر منطقی و کدام غیر منطقی است :

الف) علی می گوید : هر وقت من درس نخواندم همان روز معلم از من سوال می کند؟

غیر منطقی

ب) تصادف منجر به مرگ در جاده ها ممکن است به دلیل نقض فنی ماشین باشد؟

منطقی

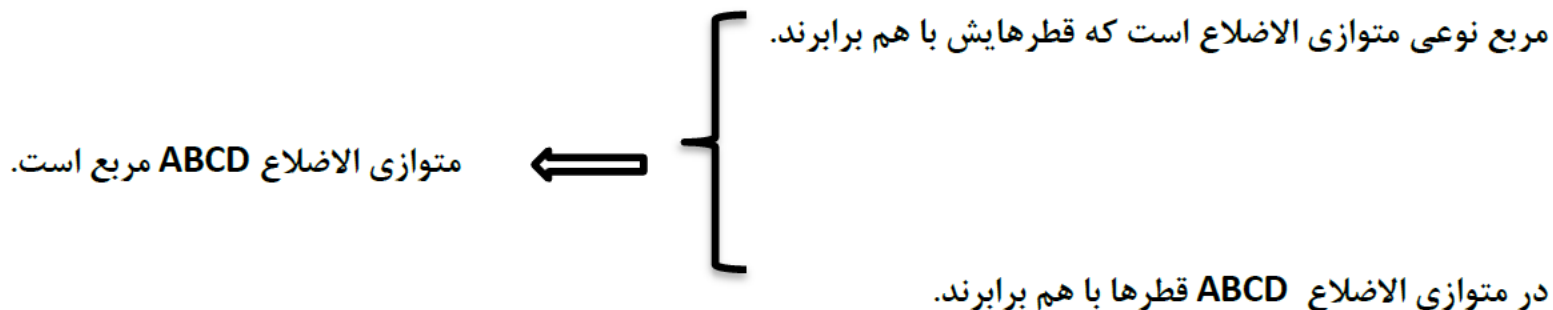
**مثال:** مشخص کنید کدام یک از استدلال های زیر قابل قبول اند .

الف) چون برخی چهارضلعی ها مربع اند ، پس همه ی چهارضلعی هایی که زاویه قائمه دارند ، مربع اند .

ب) چون تیم فوتبال ایران در چند سال اخیر قهرمان آسیا نشده است ، پس دیگر هیچ گاه قهرمان نمی شود.

ج) چون در سال های اخیر بارش باران کم بوده است ، احتمال این که دچار بحران آب شویم وجود دارد.

**مثال:** درستی یا نادرستی استدلال زیر را مشخص کنید. در صورت نادرست بودن دلیل یا مثال نقض بیاورید.



نادرست – ممکن است متوازی الاضلاع ABCD یک مستطیل باشد، چون در مستطیل قطرها با هم برابرند.



## درس دوم

آشنایی با اثبات در هندسه

**اثبات:** به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می‌گوییم.

برای اثبات درستی یک موضوع باید از دلایل منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، موضوع مورد نظر را اثبات

کرد. برای این کار ابتدا باید با قسمتهای تشکیل‌دهنده هر مسئله آشنا شویم؛

هر مسئله را میتوان به دو بخش اصلی تقسیم کرد:

**فرض مسئله:** اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده‌ها مسئله)

**حکم مسئله:** خواسته‌های مسئله را حکم مسئله می‌گویند.

**مثال:** در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید:

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند.

فرض: خواص لوزی

حکم: برابر بودن زاویه های رو به رو

ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند.

فرض: دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع

حکم: برابر بودن دو مماس

**مثال:** با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید.

←  $\left. \begin{array}{l} \text{هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است} \\ \text{مربع دارای زاویه قائمه است} \end{array} \right\}$

**نکته:** گاهی فرضهای مسئله روی یک شکل مشخص می شوند، یعنی به جای اینکه اطلاعات به صورت یک جمله به ما گفته شوند، روی شکل نوشته می شوند.

**مثال:** فرض و حکم مسئله های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر در یک مثلث دو زاویه نا برابر باشند، ضلع روبه رو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه رو به زاویه کوچکتر.

ب) در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است.

گام هایی برای حل مسئله هندسی:

- ❖ درک و فهم مسئله : که با خواندن دقیق صورت مسئله حاصل می شود .
- ❖ رسم شکل : رسم شکل مناسب به ادامه حل مسئله کمک شایانی می کند .
- ❖ تعیین فرض و حکم مسئله : داده ها (فرض) و خواسته های مسئله (حکم) را تعیین کنید.
- ❖ راهبرد حل مسئله : روش مناسب برای رسیدن به حکم مسئله را بیابید ، از کنار هم قرار دادن اطلاعات مسئله و آنچه خود می دانیم، استدلال های منطقی انجام دهید تا به حکم مسئله برسید.

**میانہ:** میانہ پارہ خطی است کہ ضلع مقابل به زاویہ را نصف می کند .

**نکته:** هر مثلث ۳ میانہ دارد کہ همواره داخل مثلث همرس هستند. نقطه همرسی میانہ ها مرکز ثقل مثلث نام دارد، کہ آن را **G** می نامیم.

**نکته:** نقطه **G** هر میانہ را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می کند.

**نکته:** هر میانہ مساحت مثلث را نصف می کند.

**نتیجہ:** اگر سه میانہ را رسم کنیم، مثلث را به ۶ بخش هم مساحت تقسیم می کند.

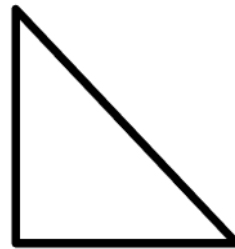
**عمود منصف:** پاره خطی است که بر ضلع عمود می شود و آن را نصف می کند .

**نکته:** هر مثلث ۳ عمود منصف همرس دارد که لزوما نقطه هم رأسی دورن مثلث نیست.



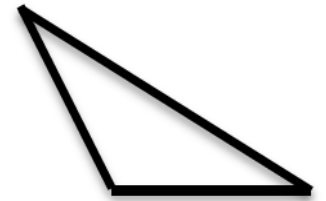
مثلث با زاویه های تند

(نقطه همرسی داخل مثلث)



مثلث قائم الزاویه

(نقطه همرسی روی وسط وتر)

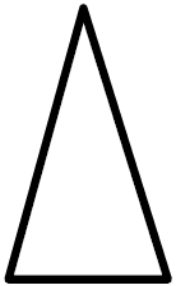


مثلث با یک زاویه باز

(نقطه همرسی بیرون مثلث)

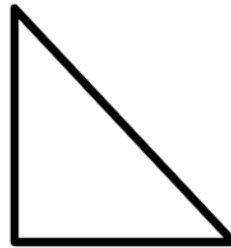
**ارتفاع:** پاره خطی است که از یک رأس به ضلع روبه رو عمود می شود .

**نکته:** هر مثلث ۳ ارتفاع دارد. این سه ارتفاع هم رأس می باشند. نقطه هم رأسی (H) بستگی به نوع مثلث دارد.



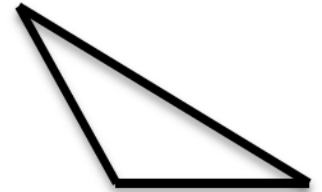
مثلث با زاویه های تند

(H داخل مثلث)



مثلث قائم الزاویه

(H روی رأس قائم)



مثلث با زاویه باز

(H بیرون مثلث)



**نیم ساز:** پاره خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند .

**نکته:** هر مثلث ۳ نیمساز داخلی دارد که همواره درون مثلث همرس می باشند.

**نکته:** نقطه همرسی نیمسازها از سه ضلع به یک فاصله است. (چون هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.)

**نکته:** در مثلث متساوی الساقین ، نیمساز وارد بر قاعده ، میانه نیز هست .

**نکته:** وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم ، اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم ، در سایر عضو های آن مجموعه نیز باشد ، می توان درستی نتیجه را به همه ی عضو های آن مجموعه تعمیم داد .

**مثال:** ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

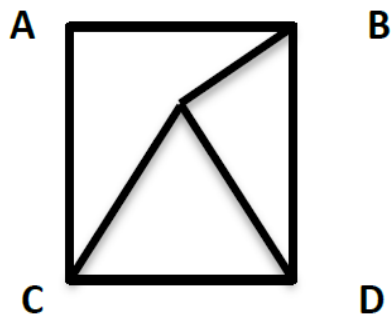
**مثال:** ثابت کنید مجموع زوایای هر مثلث برابر  $180^\circ$  درجه است.

**مثال:** ثابت کنید در هر مثلث، هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است.

**مثال:** ثابت کنید زوایای متقابل به راس باهم برابرند.

**مثال:** ثابت کنید مجموع زوایای داخلی یک مستطیل  $360^\circ$  درجه است.

**مثال:** چهارضلعی ABCD مربع و CDE مثلث متساوی الاضلاع است. ثابت کنید مثلث BEC متساوی الساقین است.



درس سوم

هم نهشتی مثلث ها

شکل های هم نهشت: اگر دو شکل را با یک یا چند تبدیل (انتقال و تقارن و دوران) بر یکدیگر منطبق کنیم. به طوری

که کامل یکدیگر بپوشانند آن دو شکل هم نهشت هستند.

نکته: در دو شکل هم نهشت اجزای متناظر دو مثلث (ضلع ها و زاویه ها) برابرند.

حالت های هم نهشتی دو مثلث: دو مثلث دلخواه در سه حالت با یکدیگر هم نهشت هستند:

(۱) دو ضلع و زاویه بین برابر (ض ض)

(۲) دو زاویه و ضلع بین برابر (ض ز)

(۳) سه ضلع برابر (ض ض ض)

حالت های هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: دو مثلث قائم الزاویه در دو حالت با یکدیگر هم نهشت هستند:

(۱) وتر و یک ضلع (وز)

(۲) وتر و یک زاویه تند (وز)

نکته: دو مثلث با سه زاویه برابر (زوز) هم نهشت نیستند.

## درس چهارم

حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛ اما می‌توان مراحل را مشخص کرد که برای حل مسئله هندسه، توصیه می‌شود.

۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهنده آن را بشناسید.

۲- اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جدول

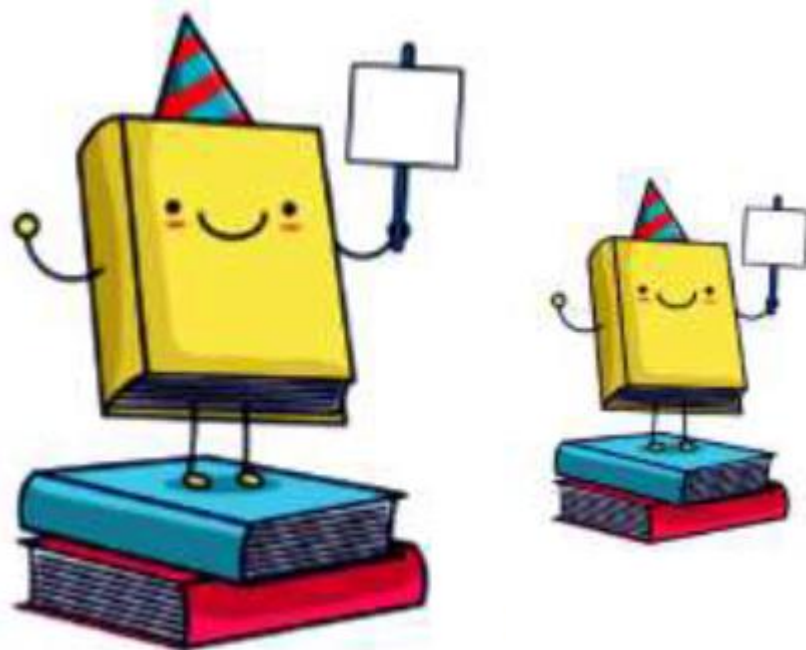
بنویسید.

۴- برای رسیدن از فرض به حکم، راه حلی پیدا کنید.

## درس پنجم

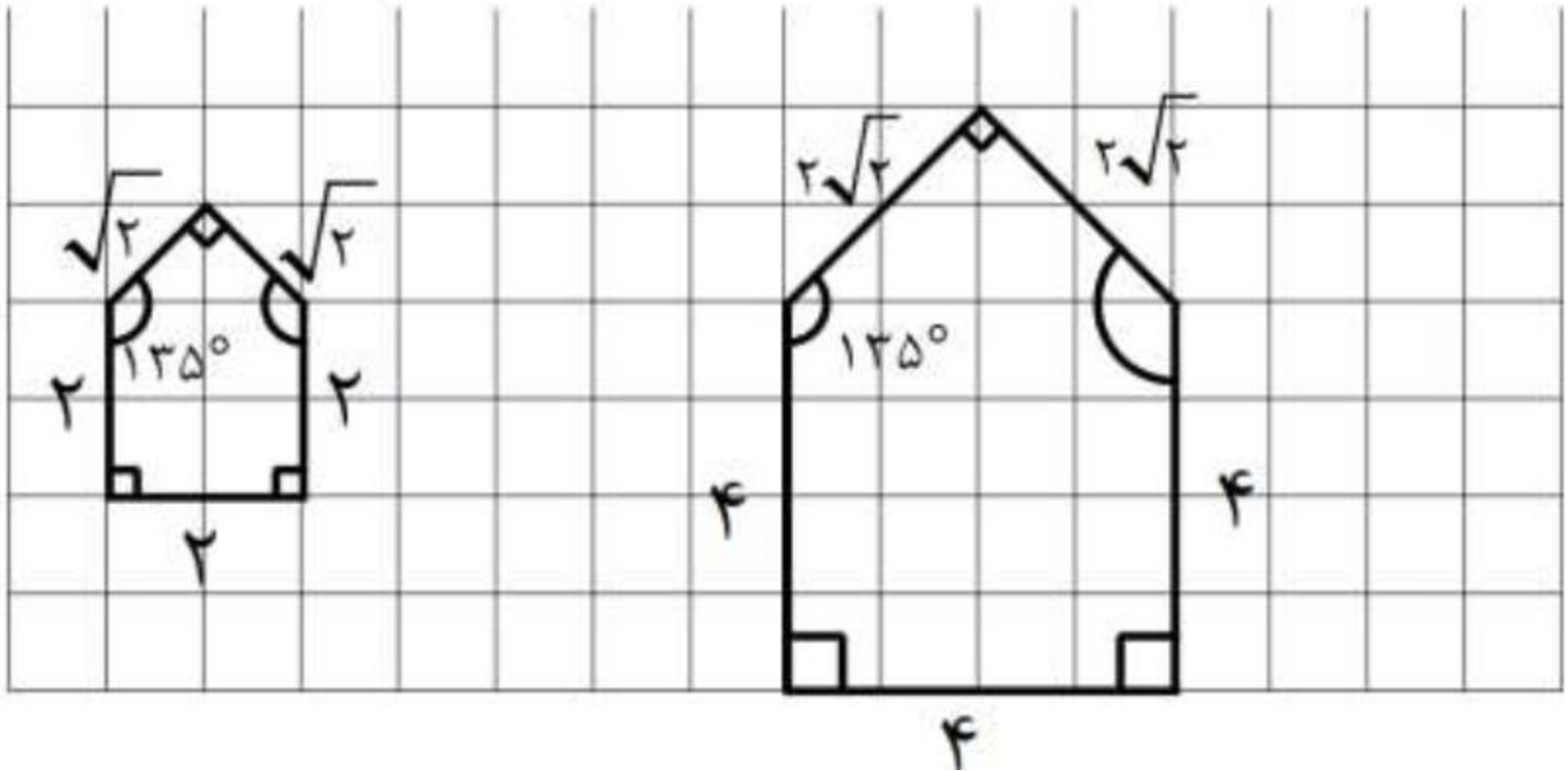
شکل های متشابه

به تصویر مقابل نگاه کنید . در مورد شباهت ها یا تفاوت های این دو تصویر چه چیزی می توان گفت؟





اندازه ی اضلاع و زوایای شکل های زیر را بنویسید و آن ها را با هم مقایسه کنید.



هرگاه در دو چندضلعی با تعداد اضلاع برابر، همه ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده یا تغییر نکرده باشند) و زوایای متناظر در هر دو شکل با هم برابر باشند آن دو چندضلعی با هم **متشابهند**.  
به نسبت بین دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، **نسبت تشابه** می گویند.

دو شکل وقتی متشابهند که سه ویژگی داشته باشند: الف) تعداد ضلع هایشان برابر باشند. ب) اندازه ی ضلع هایشان متناسب باشد. پ) اندازه ی زاویه هایشان برابر باشد.

**نکته:** دو شکل هم نهشت با هم متشابهند و نسبت تشابه آن ها ۱ است.

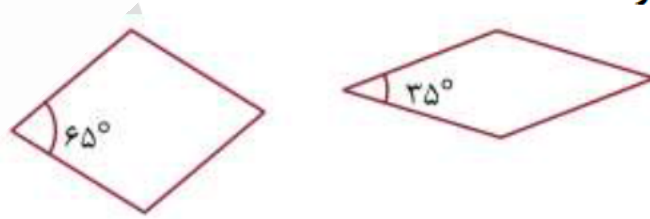
**مثال ۳:** نسبت تشابه دو مربع  $\frac{۲}{۷}$  است. اگر ضلع مربع کوچکتر ۶۰ سانتیمتر باشد ضلع مربع بزرگتر چقدر است؟

پاسخ: با استفاده از نسبت تشابه و تناسب بین اضلاع داریم:

$$\frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}} = \frac{۲}{۷} = \frac{۶۰}{x} \quad x = ۷ \times ۳۰ = ۲۱۰$$

در درس مطالعات اجتماعی با نقشه و کاربرد نقشه آشنا شدید. نقشه ها شکل های متشابه با طبیعت می باشند و در نقشه نسبت تشابه را مقیاس می نامند. در مطالعات هشتم در مورد مقیاس در نقشه مطالبی را آموخته اید.

**مثال ۶:** با یک مثال نشان دهید جملات زیر نادرستند.



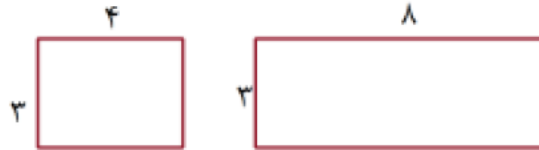
الف) هر دو لوزی دلخواه متشابهند.

در این دو شکل زوایای متناظر برابر نیستند

ب) هر دو مستطیل دلخواه متشابهند.

در این دو شکل اضلاع متناظر متناسب نیستند

(نسبت طول ها ۱ به ۲ است ولی عرض ها برابرند)



**نکته ۱:** هر دو مربع دلخواه و هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه و در حالت کلی هر دو چندضلعی منتظم با

تعداد اضلاع مساوی دلخواه با هم متشابهند.

برای تشابه دو لوزی تساوی زاویه ها کافی است چون ضلع ها به یک نسبت بزرگ یا کوچک می شوند ( با هم برابرند )

نکته : در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع ها و نیمساز ها و میانه ها و عمود منصف ها با نسبت تشابه برابر است.

نکته : نسبت محیط در هر دو شکل متشابه با نسبت تشابه برابر است.

نکته : نسبت مساحت دو شکل متشابه با مجذور نسبت تشابه برابر است.

**مثال :** نسبت تشابه دو مثلث  $\frac{3}{5}$  می باشد :

(ب) نسبت مساحت دو مثلث چند است؟  $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

(الف) نسبت میانه دو مثلث چند است؟  $\frac{3}{5}$

مثلثی به اضلاع ۵ و ۳ و ۴ با مثلثی دیگر به محیط ۳۶ متر متشابه است. اضلاع مثلث بزرگتر را محاسبه کنید.

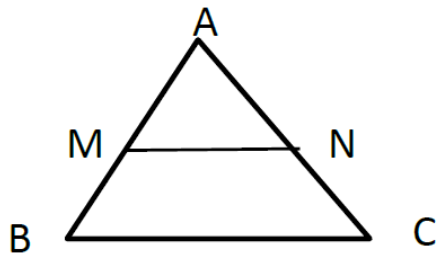
پاسخ: محیط مثلث اول برابر است با:  $p_1 = 3 + 4 + 5 = 12$

طبق نکته ۲ نسبت تشابه دو مثلث با نسبت محیط آن ها برابر است

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad \text{پس}$$

بنابراین اضلاع مثلث دوم سه برابر مثلث اول و به ترتیب ۱۵ و ۹ و ۱۲ است.

- قضیه تالس : در مثلث اگر خطی موازی با قاعده مثلث رسم کنیم و دو ضلع دیگر را قطع کند روی آنها پاره خط هایی با

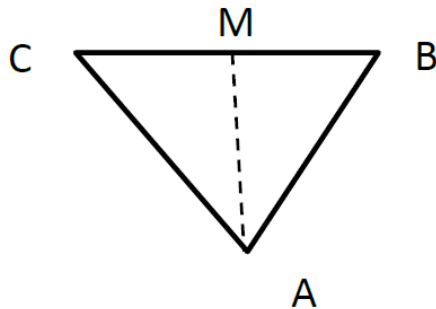


نسبت یکسان جدا می کند .

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

بنا به خاصیت های تناسب همچنین داریم  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

- در هر مثلث نسبت ضلع های مقابل به نیمسازها با نسبت دو ضلع دیگر برابر است یعنی در شکل زیر داریم



$$\frac{MB}{CM} = \frac{AB}{AC}$$

- در صورتی که در چند ضلعی زاویه های متناظر دوجه دو برابر باشند ، اضلاع متناظر دوجه دو متناسب باشند و تعداد ضلع های

آنها مساوی باشد دو چند ضلعی متشابه خواهند بود .