فصل سوم

استدلال و اثبات در هندسه

درس اول: استدلال

استدلال

با کلمه‌ی استدلال در زندگی روزمره آشنا هستیم و اغلب برای کارهایمان دلیل می‌آوریم تا درست بودن آن را اثبات کنیم، استدلال یعنی: دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته‌های قبلی برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

انواع استدلال:

۱- استدلال استقرایی: نتیجه‌گیری براساس مشاهده‌ها، حواس همگانه و آزمایش‌های باشد (معتبر نیست)

۲- استدلال استنتاجی: نتیجه‌گیری براساس قوانین و اصول پذیرفته شده می‌باشد (معتبر)

نکته: در هندسه و ریاضیات از استدلال استنتاجی استفاده می‌شود ولی این را از اهمیت استقرایی کم نمی‌کند زیرا با کمک این استدلال هم می‌توان به قضایا و قوانین خوبی دست یافت.

اثبات:

به استدلالی که موضوع مورد نظر را با درستی نتیجه بدهد. اثبات گویند

خطا در حواس همگانی:

گاهی در دیدن اشکال خطا می‌کنیم، گاهی حواس ما در تشخیص گرما و سرمای آب خطا می‌کند. خطاها گاهی به علت خطای وسایل آزمایشگاهی و گاهی به علت خطای انسانی است پس مشاهده کردن و یا استفاده از حواس برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی نیست، به کاربردن شکل‌ها و ترسیم آنها و استفاده از شهود به تشخیص راه حل و ارائه‌ی حدس‌های درست کمک می‌کند ولی نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که تشخیص ما درست بوده است.

مثال) کدام یک از استدلال‌های زیر قابل اطمینان‌تر است؟

الف) من تا به حال سرما نخورده‌ام، پس امسال تابستان هم سرما نمی‌خورم ✗ منطقی نیست

ب) مساحت یک دایره به شعاع 7cm از مساحت یک دایره به شعاع 5cm بیشتر است. ✓ منطقی است.

نکته:

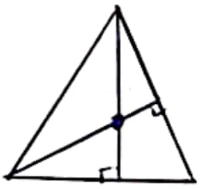
با ذکر چند مثال هرچند زیاد نمی‌توان در مورد درست بودن یک موضوع اطمینان کامل حاصل کرد

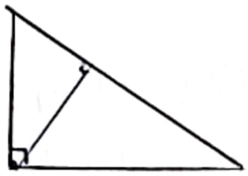
مثلاً ۱۰۰ بار یک تاس را پرتاب کرده‌ایم و عدد ۶ آمده است پس اگر بار دیگر هم پرتاب کنیم عدد ۶ می‌آید؟!! ✗

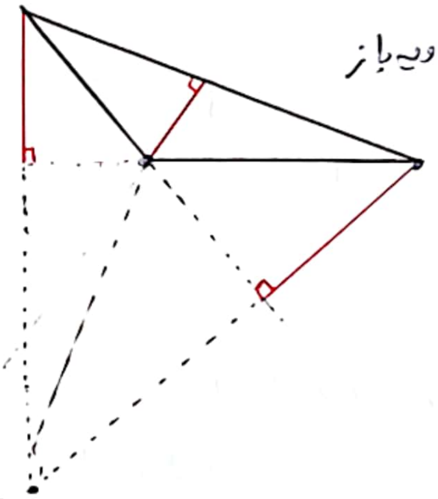
مثال نقض:

به مثال هایی که به کمک آن ها، نادرست بودن یک موضوع را نشان می دهیم.

مثال - آیا همیشه در هر مثلث محل برخورد دو ارتفاع درون مثلث می افتد؟



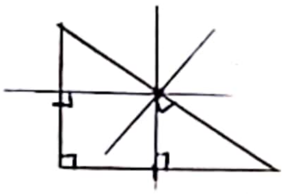


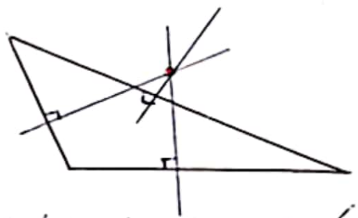


مثالی آوردیم که محل برخورد ارتفاعات بیرون مثلث است

ارتفاع: خطی که از راس بر ضلع مقابل عمود می شود

مثال: محل برخورد عمود منصف های هر مثلث همواره درون مثلث قرار دارد؟





درس دوم - آشنایی با اثبات در هندسه

در روند استدلالمان از اطلاعات مسئله (فرض و داده ها) و حقایق و اصولی که درستی آن از قبل برای ما معلوم شده است.

برای رسیدن به خواسته ی مسئله (حکم) استفاده می کنیم.

مثلا می دانیم در دایره شعاع ها برابرند
در مثلث جمع زاویه ها ۱۸۰° است
مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع برابرند

حکم ← حقایق و اصول ← فرض

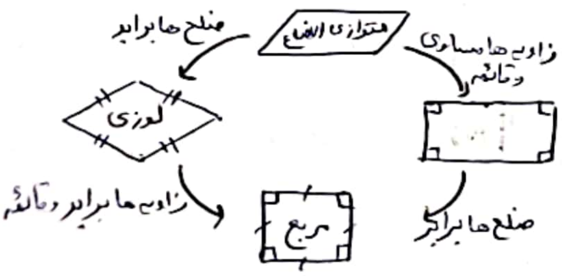
مثال: آیا در هر لوزی زاویه های روبه رو باهم برابرند؟

فرض: شکل لوزی است

حکم: زاویه های روبه رو باهم برابر است

استدلال:

لوزی نوعی متوازی الاضلاع است
در متوازی زاویه های روبه رو برابرند
⇐ در لوزی هم زاویه های روبه رو برابرند

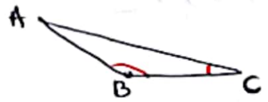


↑ رابطه ی بین چهار ضلعی ها ↑

مثال) فرض و حکم را برای مسئله‌ی زیر مشخص کنید :

اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچکتر؟

حکم　　　　فرض

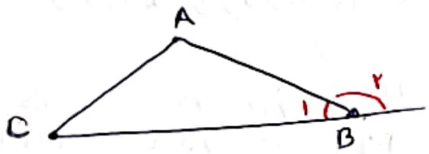


به زبان ریاضی فرض : $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\hat{B} > \hat{C}$

حکم : $AC > AB$

مثال) ثابت کنید در هر مثلث اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی : با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن برابر است.

مثال مثلث متساوی الاضلاع (مثلا) باید برای همه مثلث‌ها درست باشد



فرض : $\overset{\triangle}{ABC}$

حکم : $\hat{B}_2 = \hat{A} + \hat{C}$

استدلال :

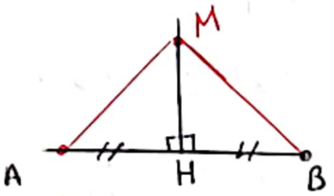
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}_1+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{B}_1+\hat{B}_2=180^\circ\end{array}\right\} \hat{A}+\cancel{\hat{B}_1}+\hat{C}=\cancel{\hat{B}_1}+\hat{B}_2$$

$$\Rightarrow B_2 = \hat{A}+\hat{C}$$

نکته : برای بررسی درستی یک مسئله‌ی کلی نمی‌توان حالت خاص درنظر گرفت و برای آن حالت خاص استدلال ارائه کرد برای مثال اگر بخواهیم مطلبی را برای هر مثلث اثبات کنیم نمی‌توانیم در اثبات از حالت‌های خاص چون قائم‌الزاویه، متساوی الساقین یا متساوی الاضلاع استفاده کنیم.

مثال) ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB ، از نقاط A و B به یک فاصله است :

نصف و عمود



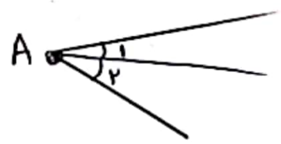
فرض : $H_1=H_2=90^\circ$ ، $AH=HB$

حکم : $AM \overset{?}{=} BM$

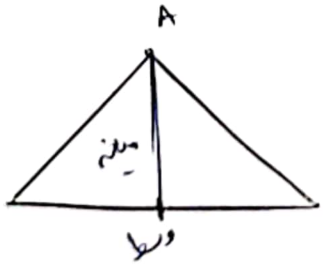
$$\left.\begin{array}{ll} & H_1=H_2=90^\circ\\ \text{فرض} & AH=BH\\ \text{ضلع مشترک} & MH=MH\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AMH} \cong \overset{\triangle}{MBH} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} MB=MA$$

نکته : وقتی خاصیتی را برای یک عضو از مجموعه‌ای ثابت کنیم اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به کار برده‌ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد می‌توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن تعمیم داد.

نیمساز : خطی که یک زاویه را نصف می‌کند :



نیمساز　　$A_1 = A_2$

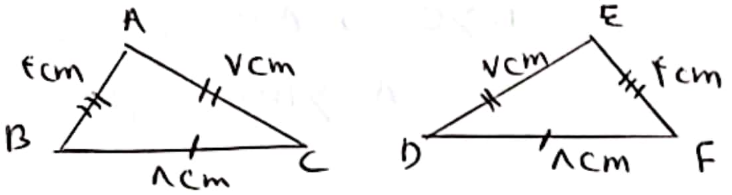


میانه : خطی که از رأس به وسط ضلع مقابل وارد می‌شود و ضلع را نصف می‌کند.

هم نهشتی مثلث ها

حالت های هم نهشتی دو مثلث: در حالت کلی به ۳ صورت می توانند هم نهشت باشند.

۱ـ داشتن سه ضلع برابر (ض ض ض)

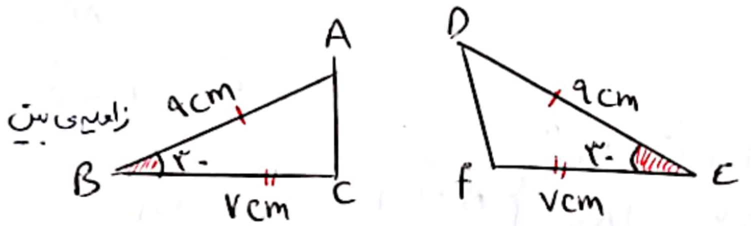


$AB = EF$

$BC = DF$ ض ض ض $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$

$AC = ED$

۲ـ داشتن دو ضلع برابر و زاویه ی مساوی بین دو ضلع (ض ز ض)

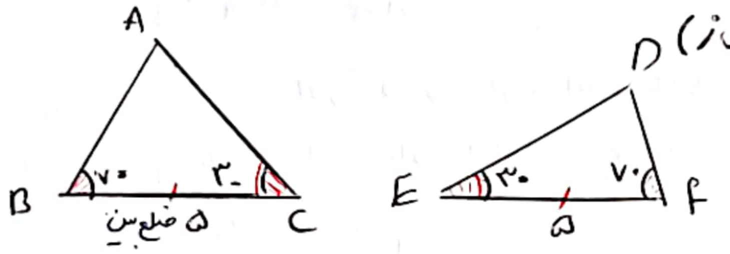


$AB = DE$

$BC = FE$ ض ز ض $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$

$\hat{B} = \hat{E}$

۳ـ داشتن دو زاویه برابر و ضلع بین دو زاویه (ز ض ز)



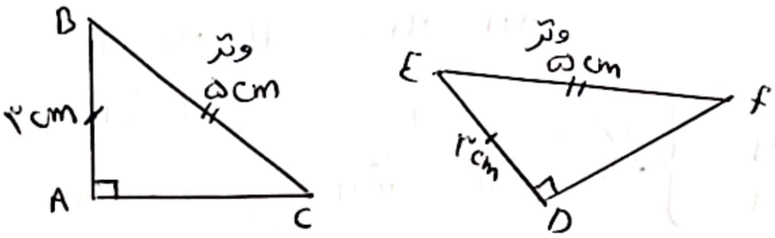
$\hat{E} = \hat{C}$

$\hat{F} = B$ ز ض ز $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$

$BC = EF$

حالت های مثلث قائم الزاویه:

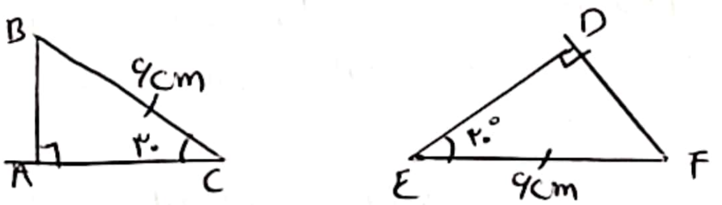
۱ـ وتر و یک ضلع برابر (و ض)



$EF = BC$

$AB = ED$ $\xrightarrow{\text{و ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{EDF}$

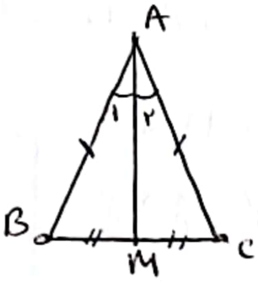
۲ـ وتر و یک زاویه ی تند (و ز)



$BC = EF$

$\hat{C} = \hat{E}$ $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{EDF}$

۱- در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$ میانه AM را رسم کرده ایم ثابت کنید ABM و ACM هم نهشت اند؟ سپس اجزای متناظر را بنویسید:



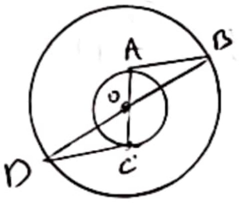
فرض:	$AB = AC , BM = CM$
حکم:	$\overset{\triangle}{ABM} \cong ACM$

ض $BM = CM$ (فرض)
ض $AB = AC$ (فرض)
ض $AM = AM$ (ضلع مشترک)

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{ABM} \cong ACM$

اجزای متناظر $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$
$A_1 = A_2$
$M_1 = M_2$

۲- در شکل زیر O مرکز دایره است ثابت کنید دو مثلث OAB و OCD هم نهشت هستند. سپس اجزای متناظر را بنویسید:
اطلاعات حکم



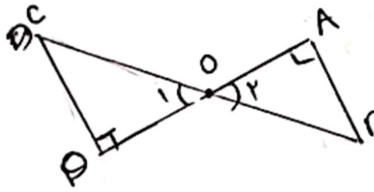
فرض	O مرکز دایره است پس شعاع ها برابر
حکم	$OAB \cong OCD$

ض $AO = CO$ (شعاع دایره کوچک)
ض $BO = DO$ (شعاع دایره بزرگ)
ز $O_1 = O_2$ (متقابل به رأس)

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$

اجزای متناظر: $AB = CD$, $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$

۳- در شکل زیر O وسط AD می باشد ثابت کنید دو مثلث OAB و OCD باهم هم نهشت اند سپس اجزای متناظر را بنویسید:



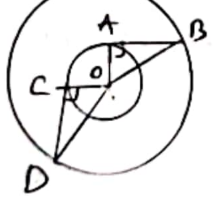
فرض	$OA = OD$
حکم	$\overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$

ز $O_1 = O_2$ (متقابل به رأس)
ض $OA = OD$ (فرض)
ز $A = D =$ (قائمه)

$\xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$

اجزای متناظر: $\hat{B} = \hat{C}$, $AB = CD$, $BO = OC$

۴- در شکل زیر O مرکز دو دایره می باشد ثابت کنید OAB و OCD هم نهشت اند؟



فرض	O مرکز دایره
حکم	$\overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$

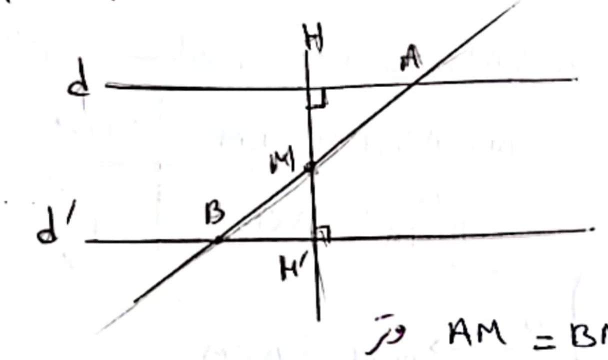
وتر $OB = OD$ (شعاع)
ضلع $AO = CO$ (شعاع)

$\xrightarrow{\text{وض}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$

اجزای متناظر = $\hat{B} = \hat{D}$, $AB = CD$, $O_1 = O_2$

۵- در شکل زیر دو خط d و d' با هم موازی اند. از نقطه‌ی M وسط AB در دو خط d, d' عمود رسم می‌کنیم

ثابت کنید $\hat{A}=\hat{B}$ و $MH=MH'$



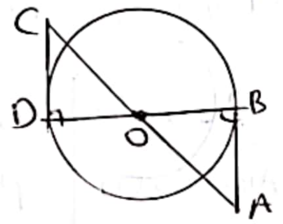
فرض	$AM=BM$ ، $d \parallel d'$
حکم	$MH \overset{?}{=} MH'$ ، $\hat{A} \overset{?}{=} \hat{B}$

وتر $AM=BM$ (فرض)

زاویه تند $M_1=M_2$ (متقابل به راس)

$\Rightarrow \overset{\triangle}{MAH} \cong \overset{\triangle}{BMH'} \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{تساوی}} \hat{A}=\hat{B}$ ، $MH=MH'$

۶- در شکل O مرکز دایره است ثابت کنید OAB و OCD هم‌نهشت اند؟



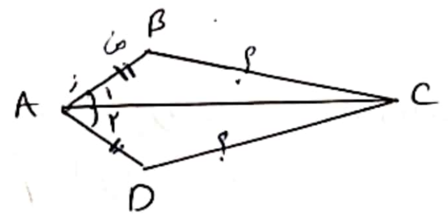
ض $BO=OD$ (شعاع)

ز $O_1=O_2$

ز $B=D=90^\circ$

$\xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$

۷- در شکل زیر پاره خط AC نیمساز زاویه‌ی A است و اضلاع AD و AB برابر اند ثابت کنید $BC=DC$ ؟



فرض:	$AB=AD$ ، $A_1=A_2$
حکم	$BC \overset{?}{=} DC$

ز $A_1=A_2$ (فرض)

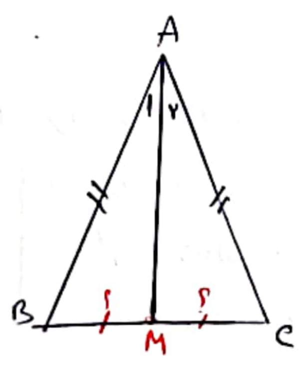
ض $AB=AD$ (فرض)

ض $AC=AC$ (ضلع مشترک)

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ACB}$

طبق تساوی اجزای متناظر $\rightarrow BC=DC$

۸- ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین، نیمساز وارد بر قاعده، میانه می‌باشد؟



فرض	$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ ، $AB=AC$
حکم	$BM \overset{?}{=} MC$

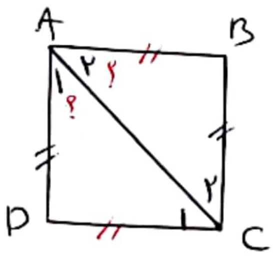
ز $A_1=A_2$

ض $AB=AC$

ض $AM=AM$

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle \cong \triangle \longrightarrow BM=MC$

۹- ثابت کنید در هر مربع، قطرها نیمساز زاویه‌های آن هستند.

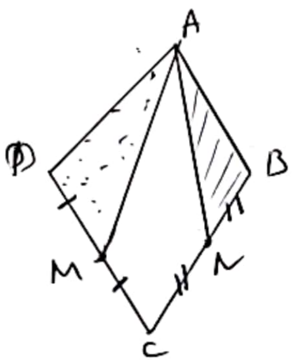


فرض	$A = B = C = D = 90$ $AB = AD = BC = DC$
حکم	$C_1 \overset{?}{=} C_2 \qquad A_1 \overset{?}{=} A_2$

ض $AB = DC$ (فرض)
ض $AB = BC$ (فرض)
ض $AC = AC$ (ضلع م)

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle \cong \triangle \xrightarrow{\text{تساوی اجزا}} A_1 = A_2 ,\ C_1 = C_2$

۱۰- در شکل $ABCD$ لوزی است نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع BC و CD هستند ثابت کنید دو مثلث ABN و ADM هم‌نهشت اند؟



فرض	$\hat{B} = \hat{D}$ ، $\hat{A} = \hat{C}$ / $AB = AD = BC = DC$
حکم	$\overset{\triangle}{ABN} \cong \overset{\triangle}{ADM}$

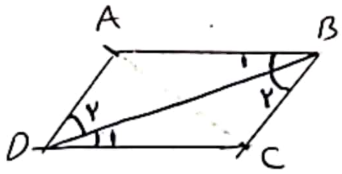
ض $AB = AD$ (فرض)
ز $\hat{D} = \hat{B}$ (فرض)
ض $BN = DM$

$\longrightarrow \triangle \cong \triangle$

$\frac{BC}{2} = \frac{CD}{2} \xrightarrow{\text{نصف}}$

نکته: در لوزی تمام اضلاع برابرند، نصف ضلع‌ها نیز با هم برابرند

۱۱- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند؟



فرض	$BC \parallel AD ,\ AB \parallel CD$
حکم	$AB \overset{?}{=} CD ,\ BC \overset{?}{=} AD$

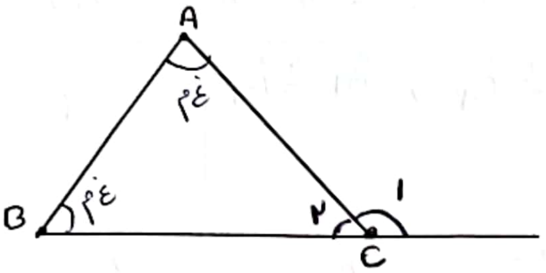
$AB \parallel CD$, BD مورب $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

$BC \parallel AD$, BD مورب $\Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{B}_2$

ز $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$
ز $\hat{D}_2 = \hat{B}_2$
ض $BD = BD$

$\xrightarrow{\text{زضز}} \triangle \cong \triangle \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{تساوی}} AB = CD ,\ BC = AD$

۱- ثابت کنید در هر مثلث، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن برابر است؟



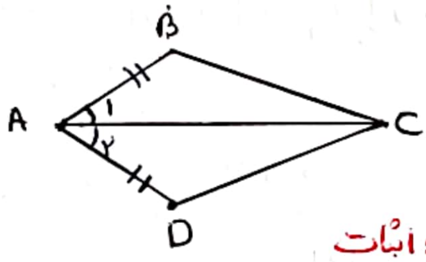
فرض	در شکل مثلث است
حکم	$C_1 \overset{?}{=} A + B$ زاویه‌ی خارجی ↓ ، داخلی غیرمجاور ↓

اثبات: فرض $A+B+C_2=180^\circ$

نیم‌صفحه $C_1+C_2=180^\circ \Rightarrow A+B+\cancel{C_2}=C_1+\cancel{C_2} \Rightarrow C_1 \overset{\checkmark}{=} A+B$

حکم اثبات شد

۲- در شکل مقابل AC نیمساز زاویه‌ی A است و اضلاع AB و AD برابراند؛ ثابت کنید مثلث‌های ABC و ADC هم‌نهشت اند؟

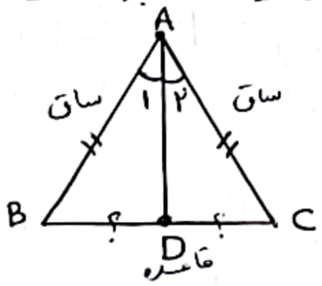


فرض	$AB=AD$ و $A_1=A_2 \Leftarrow$ A نیمساز AC
حکم	$ABC \overset{?}{\cong} ADC$

اثبات:
ز $A_1=A_2$ (فرض)
ض $AB=AD$ (فرض)
ض $AC=AC$ (ضلع مشترک)
$\xRightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABC \overset{\checkmark}{\cong} \triangle ABC$

حکم اثبات شد

۳- مثلث متساوی‌الساقین است و AD نیمساز وارد بر قاعده‌ی آن است؛ ثابت کنید نیمساز وارد بر قاعده میانه هم می‌باشد.



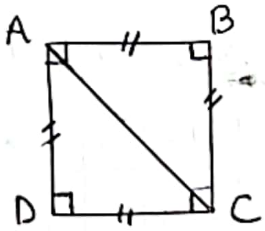
فرض	$AB=AC \Leftarrow$ مثلث متساوی‌الساقین و $A_1=A_2 \Leftarrow$ نیمساز AD
حکم	$BD \overset{?}{=} DC$

اثبات:
ض $AB=AC$ (فرض)
ز $A_1=A_2$ (فرض)
ض $AD=AD$ (ضلع مشترک)
$\xRightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABD \cong \triangle ADC \xRightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{طبق}} BD \overset{\checkmark}{=} DC$

حکم اثبات شد

Scanned with CamScanner

۴- ثابت کنید قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است؟



فرض	شکل مربع ⟸ ضلع‌ها برابر و همه‌ی زاویه‌ها 90°
حکم	$\hat{A}_1 \overset{?}{=} \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 \overset{?}{=} \hat{C}_2$

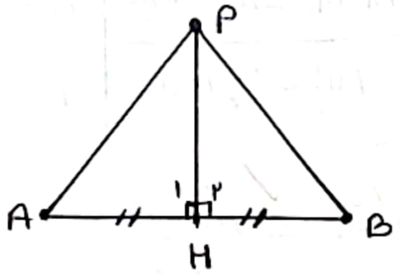
اثبات:

ض $AD = AB$ (فرض)
ض $DC = BC$ (فرض)
ز $\hat{D} = \hat{B}$ (فرض)

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{ABC} \xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{طبق}} \hat{A}_1 \overset{\checkmark}{=} \hat{A}_2,\ \hat{C}_1 \overset{\checkmark}{=} \hat{C}_2$

حکم اثبات شد

۵- نقطه‌ای مانند P روی عمود منصف پاره خط AB در نظر بگیرید و دو سر پاره خط را وصل کنید (تعمیم تکته) اثبات کنید PA و PB باهم برابراند. یا (اثبات کنید هر نقطه روی عمود منصف فاصله‌اش از دو سر پاره خط یک اندازه است؟)



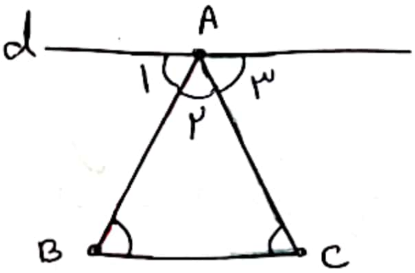
فرض	PH عمود منصف ⟸ $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ و $AH = HB$
حکم	$PA \overset{?}{=} PB$

ض $AH = HB$ (فرض)
ز $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ (فرض)
ض $PH = PH$ (ضلع مشترک)

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{PAH} \cong \overset{\triangle}{PHB} \xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{طبق}} PA \overset{\checkmark}{=} PB$

حکم اثبات شد

۶- ثابت کنید در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی 180° است؟



فرض	شکل مثلث و خط d موازی با ضلع BC رسم می‌کنیم
حکم	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \overset{?}{=} 180^\circ$

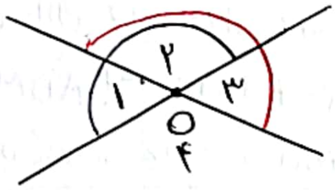
خط d موازی BC رسم می‌شود ⟹ $d \parallel BC$، مورب AB ⟹ $\hat{A}_1 = \hat{B}$
$d \parallel BC$، مورب AC ⟹ $\hat{A}_3 = \hat{C}$

اثبات: (نیم صفحه) $A_1 + A_2 + A_3 = 180$

$B + A + C \overset{\checkmark}{=} 180$

حکم اثبات شد

۷- نشان دهید زاویه‌های متقابل به راس باهم برابرند؟



فرض	زاویه‌ها متقابل به راس اند
حکم	$\hat{O}_2 \overset{?}{=} \hat{O}_4$ و $\hat{O}_1 \overset{?}{=} \hat{O}_3$

اثبات

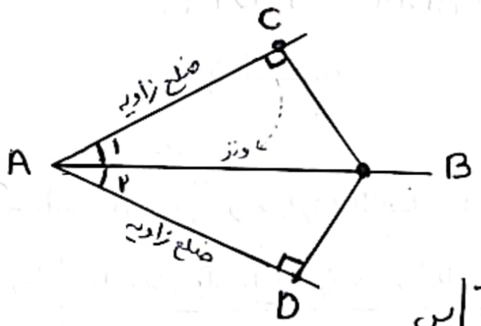
۱) $\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_2=180^\circ\\ \hat{O}_2+\hat{O}_3=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1+\cancel{\hat{O}_2}=\cancel{\hat{O}_2}+\hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 \overset{\checkmark}{=} \hat{O}_3$

حکم اثبات شد

۲) $\left.\begin{array}{l}\hat{O}_2+\hat{O}_3=180^\circ\\ \hat{O}_3+\hat{O}_4=180\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_2+\cancel{\hat{O}_3}=\cancel{\hat{O}_3}+\hat{O}_4 \Rightarrow \hat{O}_2 \overset{\checkmark}{=} \hat{O}_4$

حکم اثبات شد

۸- ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک اندازه است؟



فرض	$A_1=A_2 \Leftarrow$ نیمساز A ،AB
حکم	$BC \overset{?}{=} BD$

نکته: فاصله‌ی یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود

اثبات دو مثلث قائم الزاویه $\xrightarrow{\text{پس}}$ مثلث‌ها قائم الزاویه اند $\xrightarrow{\text{پس}}$ $\hat{C}=\hat{D}=90^\circ$ پس

اثبات:

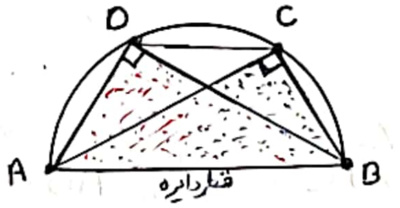
وتر $AB=AB$ (ضلع مشترک)

زاویه تند $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (فرض)

$\xrightarrow[\text{زاویه‌ی تند}]{\text{وتر و یک}} \triangle ABC \cong \triangle ADB \xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{طبق}} BC \overset{\checkmark}{=} BD$

حکم اثبات شد

۹- فعالیت صفحه‌ی ۴۵ کتاب: زاویه‌های C و D روی محیط دایره اند فاصله‌ی AB ۱۰ متر است و BC و AD ، ۶ متر است ثابت کنید $AC=BD$؟



فرض	$AD=BC=6$ و $AB=10$
حکم	$AC \overset{?}{=} BD$

نکته: اگر زاویه‌های روی محیط دایره روبه‌رو قطر باشند ⇐ اندازه‌ی آن ۹۰° است چون کمان روبه‌رو آن ۱۸۰° است.

زاویه‌های محاطی: زاویه‌هایی که روی محیط دایره اند اندازه نصف کمان روبه‌رو است.

اثبات دو مثلث قائم الزاویه ⇐ مثلث‌ها قائم الزاویه $\xRightarrow{\text{پس}}$ $\hat{C}=\hat{D}=90^\circ$ پس

اثبات:

وتر $AB=AB$ (قطر دایره)

ضلع $AD=BC$ (فرض)

$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle ADB \cong \triangle ACB \xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{طبق}} AC \overset{\checkmark}{=} BD$

حکم اثبات شد

۱۰- در شکل مقابل ABCD لوزی است؛ نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند؛ نشان دهید مثلث ADM با ABM هم‌نهشت است؟

زاویه‌های روبرو برابر $D = B$

ضلع‌ها برابر $AB = AD$

فرض	ABCD لوزی است و N،M وسط‌های اضلاع CD و CB در لوزی
حکم	$ABM \overset{?}{\cong} ADM$

نکته: در لوزی تمام اضلاع با هم برابرند اگر توسط نقاط M و N نصف شود باز هم نصفه‌ها با هم برابرند

$\Downarrow$ پس

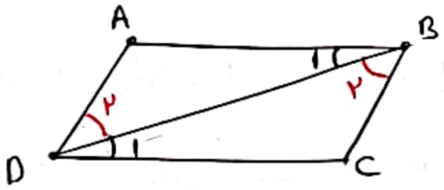
$DM = BN$

اثبات

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ض} & AD = AB \quad (\text{فرض، اضلاع لوزی}) \\ \text{ض} & DM = BN \quad (\text{فرض}) \\ \text{ز} & \hat{D} = \hat{B} \quad (\text{در لوزی زاویه‌های روبرو برابرند}) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABM} \cong ADM$$

حکم اثبات شد

۱۱- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبرو برابرند؟



فرض	شکل متوازی الاضلاع $\Leftarrow$ قضیه خطوط موازی و مورب
حکم	$AD \overset{?}{=} BC$ و $AB \overset{?}{=} DC$

طبق قضیه خطوط موازی و مورب $\Rightarrow$ $AB \parallel DC$, $\underset{\text{مورب}}{BD} \Longrightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

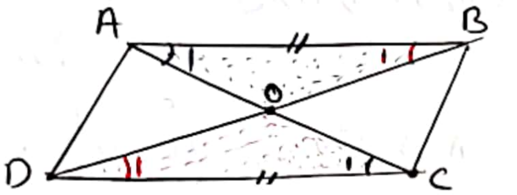
$AD \parallel BC$, $\underset{\text{مورب}}{DB} \Longrightarrow \hat{D}_2 = \hat{B}_2$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ز} & \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \quad (\text{فرض}) \\ \text{ز} & \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \quad (\text{فرض}) \\ \text{ض} & BD = BD \quad (\text{ضلع مشترک}) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{ADB} \cong \overset{\triangle}{BDC} \xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{طبق}} \begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \end{array}$$

حکم اثبات شد

۱۲ـ ثابت کنید قطرهای هر متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می کنند.



فرض	متوازی الاضلاع ← متقاطع خطوط موازی و مورب
حکم	$OB \overset{?}{=} OD$, $OA \overset{?}{=} OC$

طبق متقاطع خطوط موازی و مورب

$AB \parallel DC$, $\underset{\text{مورب}}{AC} \Rightarrow A_1 = C_1$

$AB \parallel DC$, $\underset{\text{مورب}}{BD} \Rightarrow B_1 = D_1$

اثبات:

ز $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (فرض)

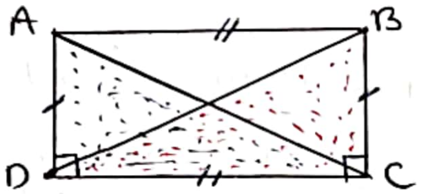
ز $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (فرض)

ض $AB = DC$ (فرض)

$\xRightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{DOC} \xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{طبق}} OB \overset{\checkmark}{=} OD$, $OA \overset{\checkmark}{=} OC$

حکم اثبات شد

۱۳ـ ثابت کنید قطرهای مستطیل با هم برابرند



فرض	شکل مستطیل ← ضلع ها برابر زاویه ها ۹۰°
حکم	$AC \overset{?}{=} BD$

اثبات:

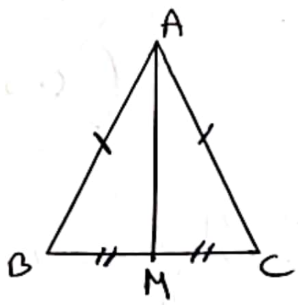
ض $AD = BC$ (فرض)

ض $DC = DC$ (ضلع مشترک)

ز $\hat{D} = \hat{C}$ (فرض)

$\xRightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BDC} \xrightarrow[\text{تساوی اجزای متناظر}]{\text{طبق}} AC \overset{\checkmark}{=} BD$

۱۴ـ در مثلث متساوی الساقین ABC میانه ی AM رسم شده است؛ مثلث های AMB و AMC به چه حالتی هم نهشت اند؟ چرا AM نیمساز زاویه ی A است؟ چرا AM عمود بر BC است؟



فرض	$AB = AC$ و $BM = MC$
حکم	$A_1 \overset{?}{=} A_2$ و $M_1 \overset{?}{=} M_2$

اثبات:

ض $AB = AC$ (فرض)

ض $BM = MC$ (فرض)

ض $AM = AM$ (فرض)

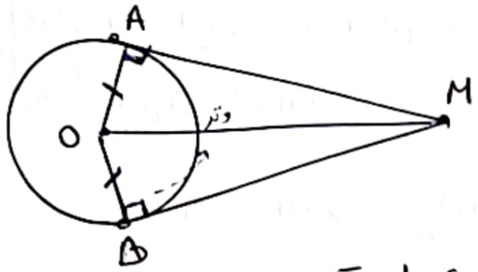
$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{AMC} \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{طبق تساوی}} A_1 \overset{\checkmark}{=} A_2$, $M_1 = M_2$

چرا AM عمود بر BC است؟

$M_1 + M_2 = 180^\circ \xrightarrow{M_1 = M_2} M_1 + M_1 = 180 \rightarrow 2M_1 = 180$

$\Rightarrow \boxed{M_1 = 90^\circ}$, $\boxed{M_2 = 90^\circ}$

۱۵- از نقطه‌ی M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کرده‌ایم، آیا اندازه‌ی این دو مماس با هم برابرند؟



فرض	رسم مماس بر دایره.
حکم	$AM \overset{?}{=} BM$

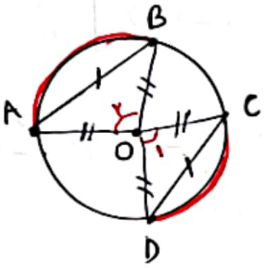
نکته: رسم مماس بر دایره ⇐ مماس در نقطه‌ی تماس با شعاع دایره برابر که عمود است پس $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

اثبات مثلث قائم الزاویه ← دو مثلث قائم الزاویه پس

اثبات:
$$\left.\begin{array}{ll} \text{وتر} & OM = OM \ (\text{ضلع مشترک}) \\ \text{ضلع} & OA = OB \ (\text{شعاع}) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} \overset{\Delta}{OAM} \cong \overset{\Delta}{OBM} \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{طبق تساوی}} AM = BM$$

حکم اثبات

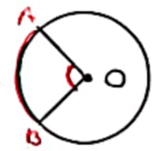
۱۶- در شکل وترهای AB و CD با هم برابراند، ثابت کنید: کمان های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ با هم برابراند؟



فرض	وترهای $AB = CD$
حکم	کمان های $\overset{\frown}{AB} \overset{?}{=} \overset{\frown}{CD}$

شعاع های دایره را رسم می کنیم

نکته: اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی در دایره با کمان روبه روش برابر است ⇐ اگر دو زاویه مرکزی برابر باشند ⇓ کمان های روبه روی آن ها هم برابراند



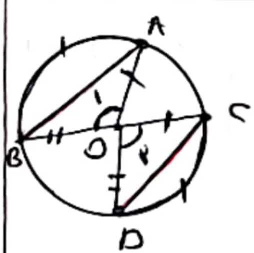
اثبات:
$$\left.\begin{array}{ll} \text{ض} & OA = OD \ (\text{شعاع}) \\ \text{ض} & OB = OC \ (\text{شعاع}) \\ \text{ض} & AB = DC \ (\text{فرض وتر}) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD} \xRightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{تساوی}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

زاویه های مرکزی برابراند ⇓

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

پس کمان های روبه رو هم برابر شدند

۱۷- در شکل کمان های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ برابراند ثابت کنید وترهای AB و CD برابراند؟



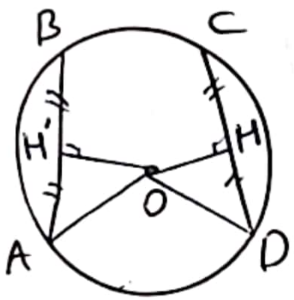
فرض	کمان ها $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ⇐پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
حکم	$AB \overset{?}{=} CD$

نکته: کمان ها برابراند پس زاویه های روبه روشان هم با هم برابراند

اثبات:
$$\left.\begin{array}{ll} \text{ز} & \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ (\text{فرض}) \\ \text{ض} & OB = OC \ (\text{شعاع}) \\ \text{ض} & OA = OD \ (\text{شعاع}) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD} \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{تساوی}} AB = CD$$

حکم اثبات شد

ثابت کنید فاصله‌ی مرکز هر دایره از دو وتر مساوی، برابر است.



فرض	$AB = CD$
حکم	$OH \overset{?}{=} OH'$

وتر $OD = OA$ (شعاع)

ضلع $DH = AH'$ (فرض)

$\xrightarrow{\text{وض}} \triangle OH'A \cong \triangle OHD$

طبق ت اجزای متناظر $\Rightarrow OH \overset{\checkmark}{=} OH'$

$AB = CD \Rightarrow DH = AH'$

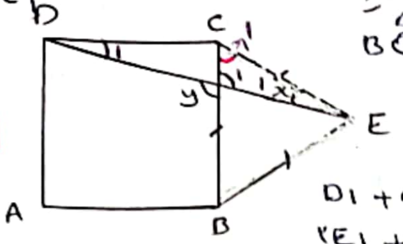
نکته: قطر عمود بر یک وتر آن را نصف می‌کند

از مرکز هر دایره بر هر وتر در دایره خطی عمود رسم کنید، وتر را نصف می‌کند.

نمونه سوالات هندسه نهم (استدلال و اثبات در هندسه) زراعتی

۱- در هر یک از شکل های زیر ABCD مربع است ، اندازه های x و y را بدست آورید :

BC = CD
CB = CE } → CD = CE ⇒ $D_1 = E_1$



$B\hat{C}E$ متساوی الاضلاع

$C_1 = ۹۰°$

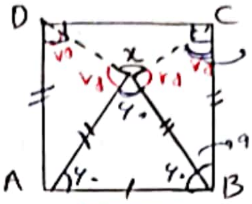
$\hat{C} = ۹۰ + ۶۰ = ۱۵۰°$

$D_1 + C + E_1 = ۱۸۰°$

$۲E_1 + \ \ = ۱۸۰ \Rightarrow E_1 = ۱۵°$

$\boxed{x = ۱۵}$

$E_1 = ۱۵° \Rightarrow y = F_1$ ، $F_1 + C_1 + E_1 = ۱۸۰° \Rightarrow y = ۶۰ + ۱۵۰ - ۱۸۰ \Rightarrow \boxed{y = ۱۰۵}$



۱۸۰ − ۳۰ = ۱۵۰ ÷ ۲ = ۷۵

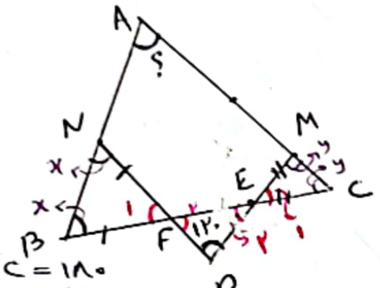
۹۰ − ۶۰ = ۳۰

x = ۳۶۰ − (۷۵ + ۷۵ + ۶۰)

x = ۳۶۰ − ۲۱۰

$\boxed{x = ۱۵۰}$

۲- در شکل مقابل اندازه ی زاویه ی $\hat{A}$ را بدست آورید :



NF = BF → $\hat{N} = \hat{B} = x$ ، EM = EC → $\hat{M} = \hat{C} = y$

$\overset{\triangle}{EMC}$: $E_1 + M + C = ۱۸۰° \to E_1 + y + y = ۱۸۰° \to E_1 = ۱۸۰ - ۲y \xrightarrow{E_1 = E_۲} E_۲ = ۱۸۰ - ۲y$ (۱)

$\overset{\triangle}{BNF}$: $B + N + F_1 = ۱۸۰ \to F_1 + x + x = ۱۸۰° \to F_1 = ۱۸۰ - ۲x \xrightarrow{F_1 = F_۲} F_۲ = ۱۸۰ - ۲x$ (۲)

$\triangle DEF$: $\hat{D} + \hat{E_۲} + \hat{F_۲} = ۱۸۰ \xrightarrow{(۱)و(۲)}$ ۱۲۰ + (۱۸۰ − ۲y) + (۱۸۰ − ۲x) = ۱۸۰ ⇒

⇒ ۱۲۰ + ۱۸۰ = ۲x + ۲y ⇒ ۳۰۰° = ۲(x + y) ⇒ x + y = ۱۵۰° ⇒ ادامه

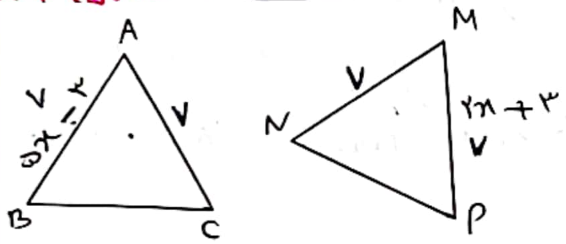
ادامه

A + B + C = ۱۸۰

A + x + y = ۱۸۰

A + ۱۵۰ = ۱۸۰ ⇒ $\boxed{A = ۳۰°}$

۳- دو مثلث مقابل متساوی الساقین و هم نهشت اند.



الف) مقدار x را بدست آورید :

۵x − ۳ = ۲x + ۳

۵x − ۲x = ۳ + ۳

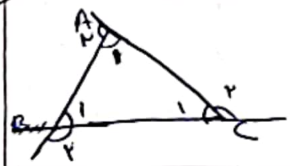
۳x = ۶ ⇒ $\boxed{x = ۲}$

ب) اگر محیط مثلث ABC برابر ۱۷ باشد اندازه ی ضلع NP چقدر است.

AB + AC + BC = ۱۷

۷ + ۷ + BC = ۱۷ ⇒ BC = ۱۷ − ۱۴ = $\boxed{۳}$

۴- ثابت کنید مجموع زاویه های خارجی هر مثلث ۳۶۰° است.



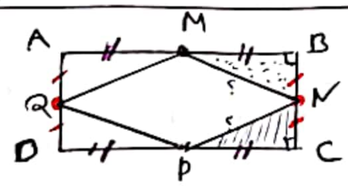
$A_1 + B_1 + C_1 = ۱۸۰$

$\underbrace{A_1 + A_۲}_{۱۸۰} + \underbrace{B_1 + B_۲}_{۱۸۰} + \underbrace{C_1 + C_۲}_{۱۸۰} = ۵۴۰$

$\underbrace{A_1 + B_1 + C_1}_{۱۸۰} + \boxed{A_۲ + B_۲ + C_۲} = ۵۴۰ \Rightarrow A_۲ + B_۲ + C_۲ = ۵۴۰ - ۱۸۰ = ۳۶۰$

۵- نقاط Q و P و N و M وسط های ضلع های مستطیل ABCD هستند.

ثابت کنید MNPQ لوزی است ؟ اضلاع مستطیل با هم برابرند دو به دو



فرض	AB = DC $\xrightarrow{\text{وسط های رسم شده}}$ MB = PC
حکم	MN $\overset{?}{=}$ NP

ض MB = PC (فرض)

ز $\hat{B} = \hat{C} = ۹۰$ (فرض)

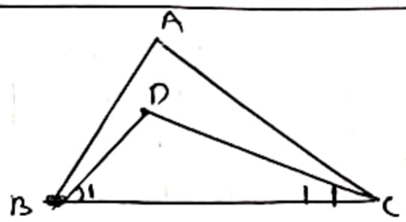
ض BN = NC (فرض)

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{MBN} \cong \overset{\triangle}{NPC}$

$\xrightarrow{\text{طت اجزای متناظر}}$ MN = NP

۶- DB و DC نیمسازهای زاویه های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هستند

ثابت کنید $\hat{D} = ۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲}$



$B_1 = B_۲$

$C_1 = C_۲$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰°$

$\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰° - \hat{A} \xrightarrow{\div ۲} \frac{B}{۲} + \frac{C}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} - \frac{A}{۲}$

$B_1 + C_1 = ۹۰ - \frac{A}{۲}$

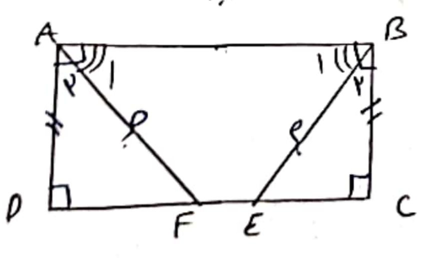
$B_1 + C_1 + D = ۱۸۰$

$B_1 + C_1 = ۱۸۰ - D$

$۱۸۰ - D = ۹۰ - \frac{A}{۲}$

۷- در مستطیل ABCD پاره خط های AE و AF طوری رسم شده که دو زاویه ی A1 و B1 برابر اند.

ثابت کنید AF و BE مساوی اند.



$A_1 = B_1$

$\cancel{A_1} + A_۲ = \cancel{B_1} + B_۲$ } ⇒ ز $\boxed{A_۲ = B_۲}$

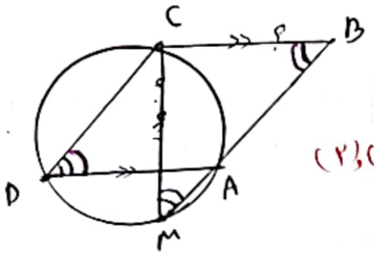
ز $\hat{C} = \hat{D} = ۹۰°$

ض AD = BC (اضلاع مستطیل)

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ADF} \cong \overset{\triangle}{BCE}$

$\xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{طت}}$ BE = AF

۸- در شکل مقابل ثابت کنید $CM = CB$ ($ABCD$ متوازی الاضلاع است)



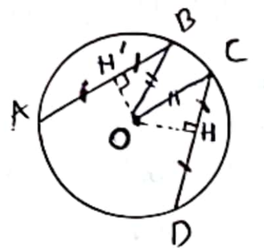
$\hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2}$, $\hat{M} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \hat{D} = \hat{M}$ (1) D و M زاویه محاطی اند

ABCD متوازی الاضلاع: پس $\hat{B} = \hat{D}$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{M} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین}]{\triangle MCB} MC = CB$

۹- ثابت کنید مرکز دایره از دو وتر مساوی ($AB = CD$) به یک فاصله است؟

نکته: از مرکز هر دایره بر هر وتر دایره خطی عمود رسم کنیم وتر را نصف می کند



$AB = CD \Rightarrow CH = BH'$

فرض	$AB = CD \rightarrow CH = BH'$
حکم	$OH \overset{?}{=} OH'$

وتر $OB = OC$ (شعاع دایره)

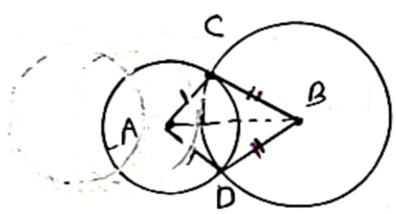
ضلع $CH = BH'$ (فرض)

$\xrightarrow{\text{وض}} \triangle OHC \cong \triangle OH'B \longrightarrow$

$\xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{ط متساوی}} OH = OH'$

۱۰- دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در C و D قطع کرده اند. ثابت کنید $A\hat{C}B = A\hat{D}B$

A را به B وصل می کنیم



فرض	$CB = BD$, $AC = AD$
حکم	$ACB \overset{?}{=} ADB$

ض $AC = AD$ (شعاع دایره)

ض $CB = BD$ (شعاع دایره)

ض $AB = AB$ (مشترک)

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ACB \cong \triangle ADB$

۱۱- ثابت کنید در هر لوزی قطرها بر هم عمود اند و همدیگر را نصف می کنند؟

نصف کردن دو قطر:

اثبات عمود بودن:

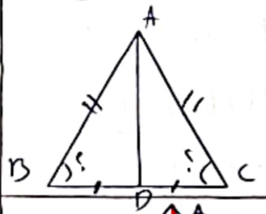
ض $AD = AB$ (لوزی فرض)

ز $A_1 = A_2$ (نیمساز در لوزی قطرها نیمساز زاویه اند AC)

ض $AM = AM$

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AMD \cong \triangle AMB \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{ط}} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \begin{cases} M_1 = M_2 \\ M_1 + M_2 = 180 \end{cases} \Rightarrow M_1 =$

۱۲- ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین ($AB = AC$)، زاویه های مجاور به قاعده با هم برابر اند؟



AD محور تقارن را رسم می کنیم

محور تقارن در مثلث متساوی الساقین قاعده را نصف می کند (میانه است)

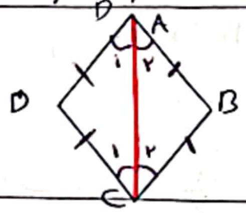
$AB = AC$ (فرض)

$BD = DC$ (فرض)

$AD = AD$ (مشترک)

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABD \cong \triangle ADC \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{ط}} \hat{B} = \hat{C}$

۱۳- ثابت کنید در هر لوزی قطرها نیمساز زاویه های آن هستند.



قطر AC را رسم می کنیم

فرض	شکل لوزی است
حکم	$A_1 \overset{?}{=} A_2$, $C_1 \overset{?}{=} C_2$

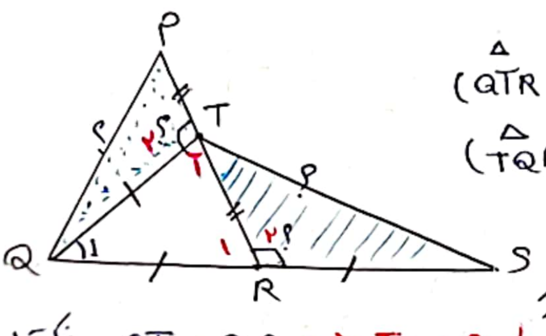
ض $AB = AD$ (فرض)

ض $BC = CD$ (فرض)

ض $AC = AC$ (مشترک)

$\triangle ADC \cong \triangle ABC \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{ط اجزای}} A_1 = A_2$, $C_1 = C_2$

۱۴- در شکل زیر ثابت کنید $PQ = TS$, $P\hat{T}Q = T\hat{R}S$



قسمت اول

($\triangle QTR$ زاویه ی خارجی) $\hat{R}_2 = \cancel{\hat{Q}_1} + \cancel{\hat{T}_1}$

($\triangle TQR$ زاویه خارجی) $\hat{T}_2 = \cancel{\hat{Q}_1} + \cancel{\hat{R}_1}$

$\Rightarrow \hat{R}_2 = \hat{T}_2$, $P\hat{T}Q = T\hat{R}S$

$R_1 = T_1$

نکته ۱: $\boxed{QT = QR \Rightarrow T_1 = R_1}$

متساوی الساقین

قسمت دوم: $PQ \overset{?}{=} TS$

ض $RT = TP$ (فرض)

ز $\hat{R}_2 = \hat{T}_2$ (قسمت اول)

ض $RS = TQ$

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle PTQ \cong \triangle TRS \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{ط}} PQ = TS$