



بخشی از سقف صحن و سرای حرم مطهر سیدالشهدا امام حسین (ع)

کاربرد هندسه و خطها در فرش‌بافی، کاشی‌کاری، نگارگری، خطاطی، گچ‌بری، کتیبه‌نویسی، تذهیب و ... غیرقابل انکار و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان می‌شود.

درس اول - دوم

معادله خط - شیب خط و عرض از مبدا

معادله خط: رابطه ای است که بین نقاط تشکیل دهنده یک خط وجود دارد.

نکته: فرم کلی معادله خط به صورت $(y = ax + b)$ می باشد.

نکته: در صورتی که نمودار رابطه ی بین دو مقدار به صورت خط راست باشد. آن دو مقدار با هم رابطه خطی دارند.

مثال: آیا رابطه بین یک ضلع مربع و محیط مربع رابطه ی خطی است؟ چرا؟ بله. چون افزایش یک ضلع مربع با افزایش محیط

مربع یک مقدار ثابت است:

x	۱	۲	۳	۴
$y = 4x$	۴	۸	۱۲	۱۶

سؤال: آیا رابطه ی بین طول ضلع مربع و مساحت مربع یک رابطه ی خطی است؟

خیر زیرا اگر ضلع مربع را x و مساحت مربع را y در نظر بگیریم خواهیم داشت: $y = x^2$

ضلع	۱	۲	۳	۴
مساحت	۱	۴	۹	۱۶

یافتن نقاط روی یک خط که معادله‌ی آن معلوم است

اگر نقطه‌ای از خط داشته باشیم که فقط طول (یا فقط عرض آن) معلوم باشد به کمک معادله‌ی خط مختص دیگر آن نقطه را نیز می‌توانیم به دست آوریم.

مثال ۱: اگر نقاط $A = \begin{bmatrix} 4 \\ m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} n \\ -5 \end{bmatrix}$ نقاطی از خط به معادله‌ی $y = 2x - 3$ باشند m و n را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ m \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مختصات نقطه را در } y=2x-3 \text{ جای گذاری می‌کنیم}} m = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} n \\ -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مختصات نقطه را در } y=2x-3 \text{ جای گذاری می‌کنیم}} -5 = 2 \times n - 3 \Rightarrow -5 + 3 = 2n \Rightarrow -2 = 2n \Rightarrow n = \frac{-2}{2} = -1$$

مثال ۲: آیا نقاط $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$ روی خط به معادله‌ی $y = 3x - 2$ قرار دارند یا خیر؟

جواب: مختصات نقطه را در معادله‌ی خط جای گذاری می‌کنیم (یعنی به جای x طول نقطه و به جای y عرض از مبدأ نقطه را قرار می‌دهیم. اگر تساوی برقرار باشد نقطه روی خط واقع است و در غیر این صورت نقطه روی خط واقع نیست.)

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مختصات نقطه را در } y=3x-2 \text{ جای گذاری می‌کنیم}} 10 = 3 \times 4 - 2 \Rightarrow 10 = 10 \Rightarrow \text{چون تساوی برقرار است پس نقطه روی خط واقع می‌باشد.}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مختصات نقطه را در } y=3x-2 \text{ جای گذاری می‌کنیم}} -6 = 3 \times -2 - 2 \Rightarrow -6 = -8 \Rightarrow \text{چون این تساوی درست نیست پس نقطه روی خط قرار ندارد.}$$

۴- برای اینکه نشان دهیم نقطه ای روی یک قرار دارد یا ندارد، کفایت طول و عرض نقطه داده شده را در معادله خط داده شده به جای x و y قرار دهیم و با انجام محاسبات اگر دو عدد بدست آمده با هم برابر شدند، گوییم آن نقطه روی خط قرار دارد و اگر دو عدد بدست آمده برابر نشدند می گوییم قرار ندارد.

مثال: آیا نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط $y = -2x + 1$ قرار دارد؟ چرا؟

حل: مختصات نقطه A را در معادله به جای x و y قرار می دهیم خواهیم داشت:

$$-3 = -2(2) + 1 \rightarrow -3 = -4 + 1 \rightarrow -3 = -3 \quad \checkmark$$

مثال: آیا نقطه $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط $y = -\frac{1}{4}x + 3$ قرار دارد؟ چرا؟

حل: مختصات نقطه B را در معادله به جای x و y قرار می دهیم خواهیم داشت:

$$-3 = -\frac{1}{4}(-2) + 3 \rightarrow -3 = +1 + 3 \rightarrow -3 \neq +4 \quad \times$$

۵- در بعضی سوالات طول یا عرض نقطه و معادله خط را می دهند و مختصات نقطه را می خواهند، برای حل اینگونه سوالات کفایت طول نقطه داده شده را در معادله خط به جای x قرار داده و اگر عرض را داده باشند به جای y قرار دهیم و با حل معادله بدست آمده مقدار x و یا y را بدست آوریم.

مثال: مختصات نقطه ای از خط $y = -3x + 2$ را پیدا کنید که طول آن -2 باشد.

حل: برای حل کفایت طول نقطه داده شده یعنی -2 را در معادله خط به جای x قرار دهیم و مقدار y یعنی عرض نقطه را بدست آوریم یعنی:

$$y = -3(-2) + 2 \rightarrow y = +6 + 2 = +8 \rightarrow y = +8$$

پس مختصات نقطه خواسته شده برابر با $\begin{bmatrix} -2 \\ +8 \end{bmatrix}$ است.

شیب و عرض از مبدأ خط

اگر معادله‌ی خط به صورت $y = ax + b$ باشد (که در آن a و b عدد هستند) در این صورت به عدد پشت x یعنی a شیب خط و به عدد تنها یعنی b عرض از مبدأ خط گفته می‌شود.

عرض از مبدأ خط جایی است که آن خط محور عرض‌ها یا همان y را قطع می‌کند. مثلاً خط $y = x - 5$ محور عرض‌ها را در -5 قطع می‌کند.

اگر عرض از مبدأ موجود نباشد یعنی صفر باشد آن خط از مبدأ مختصات می‌گذرد، یعنی مبدأ گذر می‌باشد. مثلاً خط $y = \frac{3}{4}x$ مبدأ گذر می‌باشد.

شیب یک خط برابر است با تفاضل عرض‌های دو نقطه‌ی دلخواه از آن خط، تقسیم بر تفاضل طول‌های آن دو نقطه. $\text{شیب} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$

مثال: معادله خطی را بنویسید، که شیب آن -3 و از نقطه $(5, 0)$ بگذرد.

حل: شیب خط (a) برابر -3 و چون خط از نقطه $(5, 0)$ می‌گذرد پس عرض از مبدأ (b) آن 5 می‌باشد پس معادله آن برابر است با:

$$y = -3x + 5$$

رسم خطی که معادله‌ی آن معلوم است

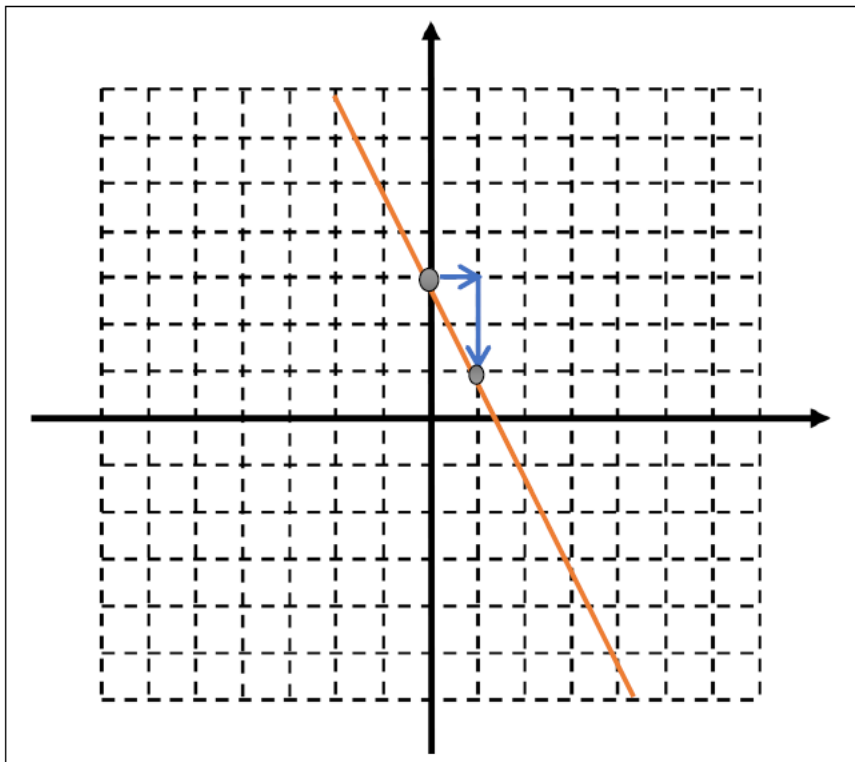
در صورتی که معادله‌ی خط داده شده باشد می‌توان آن را با پیدا کردن دو نقطه از خط رسم نمود. برای این کار یا از نقطه یابی استفاده می‌کنیم و یا به کمک عرض از مبدأ و شیب آن دو نقطه را می‌یابیم.

مثال ۴: معادله‌ی خط $y = -2x + 3$ را رسم نمایید.

روش اول: با کشیدن جدول زیر و وارد کردن دو مقدار دلخواه برای متغیر x مثلاً صفر و ۱ متغیر y مربوط به آن را پیدا می‌کنیم.

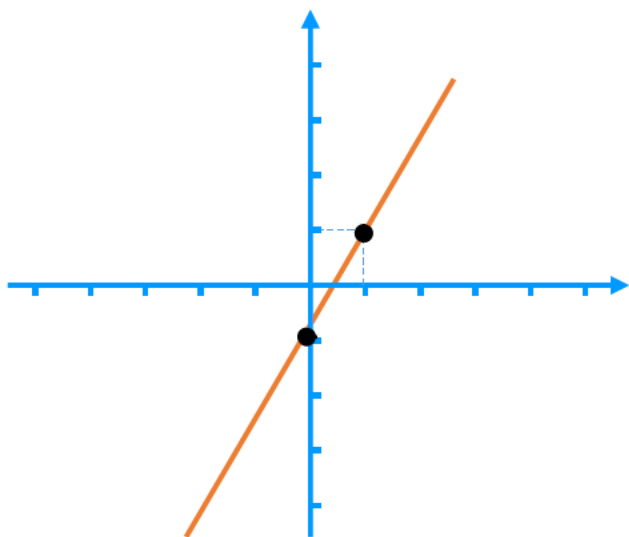
x	۰	۱
y	۳	۱
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

روش دوم: چون عرض از مبدأ خط برابر ۳+ است پس این خط محور عرض‌ها را در ۳+ قطع می‌کند یعنی از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌گذرد. همچنین چون شیب برابر با $\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{-2}{1} = -2$ است پس اگر از نقطه‌ی عرض از مبدأ یک واحد مثبت در جهت x ‌ها حرکت کنیم باید دو واحد منفی در جهت y ‌ها حرکت کنیم پس داریم $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ یعنی به نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌رسیم.



تذکرا! برای پیدا کردن نقطه‌ها بهتر است برای نقطه اول بجای متغیر x عدد صفر را گذاشته و با توجه به معادله داده شده مقدار y را بدست آوریم.

و هم چنین برای نقطه دوم بهتر است بجای x عدد یک را قرار دهیم و مقدار y را بدست آوریم، تا نقطه دوم نیز بدست آید. و در پایان دو نقطه بدست آمده را در دستگاه مختصات پیدا کرده و خطی که از آن دو نقطه می‌گذرد را رسم کنیم.



مثال: خط $y = 2x - 1$ را رسم کنید.

x	•	۱
y	$2(0) - 1 = -1$	$2(1) - 1 = 1$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

خاصیت خط های موازی



اگر دو خط موازی باشند شیب آنها برابر است و بالعکس یعنی اگر دو معادله‌ی خط با شیب یکسان داشته باشیم آن دو خط موازی می‌شوند.

مثال ۵: سه خط به معادله‌های $y = -2x + 5$ و $y = -2x$ و $y = -2x - 3$ را در نظر بگیرید. هر سه خط دارای شیب برابر -2 می‌باشند و در صورتی که آنها را رسم نماییم مشاهده می‌کنیم که همگی موازی هم هستند.

نوشتن معادله‌ی خط

برای نوشتن معادله‌ی یک خط کافی است شیب و عرض از مبدأ آن را داشته باشیم و آن را در معادله‌ی $y = ax + b$ به ترتیب به جای a و b جای‌گذاری کنیم.

مثال ۶: معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن برابر ۲ باشد و محور عرض‌ها را در -۴ قطع کند.

جواب: محور عرض‌ها را در -۴ قطع کند یعنی عرض از مبدأ برابر -۴ باشد. و لذا معادله‌ی خط به صورت $y = 2x - 4$ می‌باشد.

مثال ۷: معادله‌ی خطی بنویسید که موازی $y = \frac{3}{4}x + 5$ باشد و از نقطه‌ی $(-۱, ۰)$ بگذرد.

جواب: موازی $y = \frac{3}{4}x + 5$ باشد \Leftrightarrow شیب $= \frac{3}{4}$ و از نقطه‌ی $(-۱, ۰)$ بگذرد \Leftrightarrow عرض از مبدأ برابر -۱ است. و لذا معادله‌ی خط به صورت $y = \frac{3}{4}x - 1$ است.

مثال ۸: معادله‌ی خطی بنویسید که موازی خط $y = 4x - 3$ باشد و از نقطه‌ی $(۲, ۵)$ بگذرد.

جواب: موازی $y = 4x - 3$ باشد \Leftrightarrow شیب $= 4$ و چون این نقطه $(۲, ۵)$ طولش صفر نیست پس عرض آن یعنی ۵ عرض از مبدأ خط نمی‌باشد. برای یافتن عرض از مبدأ مختصات نقطه را در معادله‌ی خط که شیب آن نیز معلوم و برابر ۴ است وارد می‌کنیم و یک معادله بر حسب b خواهیم داشت که با حل آن معادله عرض از مبدأ به دست می‌آید.

$$y = 4x + b$$

$$5 = 4 \times 2 + b \Rightarrow 5 = 8 + b \Rightarrow 5 - 8 = b \Rightarrow -3 = b$$

$$\Rightarrow y = 4x - 3 \text{ و لذا}$$

به دست آوردن شیب خط به کمک دو نقطه از خط

اگر مختصات دو نقطه از خط معلوم باشد شیب آن خط به کمک تفاضل عرض‌ها تقسیم بر تفاضل طول‌ها به دست می‌آید. مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ دو نقطه از خط باشند شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B برابر است با:

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه } A \text{ و } B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

مثال ۹: معادله‌ی خطی بنویسید که از دو نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

جواب: چون طول نقطه‌ی B برابر صفر است پس عرض آن یعنی -3 همان عرض از مبدا خط است. همچنین شیب خط را نیز به کمک رابطه‌ی بالا پیدا می‌کنیم:

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه } A \text{ و } B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5 - (-3)}{-2 - 3} = \frac{8}{-5} = -1.6$$

و لذا معادله‌ی خط به صورت $y = -1.6x - 3$ می‌باشد.

مثال ۱۰: معادله‌ی خطی را بنویسید که محور x ها را در -4 قطع کند و از نقطه‌ی $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ بگذرد.

جواب: محور x ها را در -4 قطع کند یعنی از نقطه $D = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ بگذرد. و بنابر این

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه } C \text{ و } D = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{-6 - 0}{2 - (-4)} = \frac{-6}{6} = -1$$

همچنین چون هیچ کدام از این دو نقطه طولشان صفر نیست پس هیچکدام محل برخورد با محور عرض‌ها یعنی عرض از مبدا نیستند و لذا برای به دست آوردن عرض از مبدا مانند مثال ۵ مختصات یکی از دو نقطه‌ی C یا D را در معادله‌ی $y = x + b$ وارد می‌کنیم تا با حل کردن معادله‌ی آن b را به دست آوریم.

$$y = -x + b \xrightarrow{\text{مختصات نقطه } C = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} \text{ را جای گذاری می‌کنیم}} -6 = -2 + b \Rightarrow -6 + 2 = b \Rightarrow -4 = b$$

پس معادله‌ی خط به صورت $y = -x - 4$ خواهد بود.

نوشتن معادله ی یک خط :

حالت اول : یک نقطه مانند $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ از خط و شیب خط m معلوم باشد .

$$\text{معادله ی خط : } y - y_A = m(x - x_A)$$

حالت دوم : دو نقطه ی $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ از خط معلوم باشد :

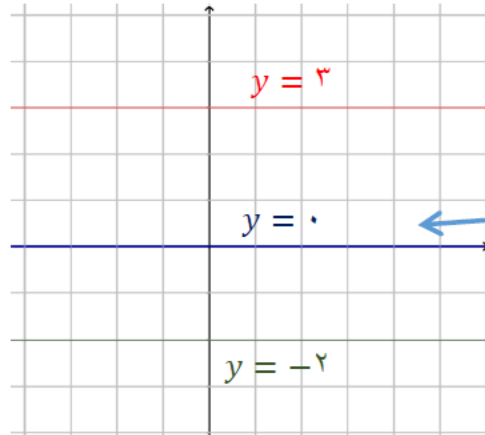
$$\text{معادله ی خط : } \begin{cases} m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ y - y_A = m(x - x_A) \end{cases}$$

خط های موازی با محورها

هرگاه معادله‌ی خط به صورت $y = b$ باشد (یعنی در معادله‌ی خط x وجود نداشته باشد) آن خط محور y ها را در b قطع می‌کند و موازی با محور x ها می‌شود.

در این حالت شیب خط برابر صفر می‌باشد.

مثال ۱۲: معادله‌ی خط‌های $y = 3$ و $y = -2$ و $y = 0$ را رسم کنید.

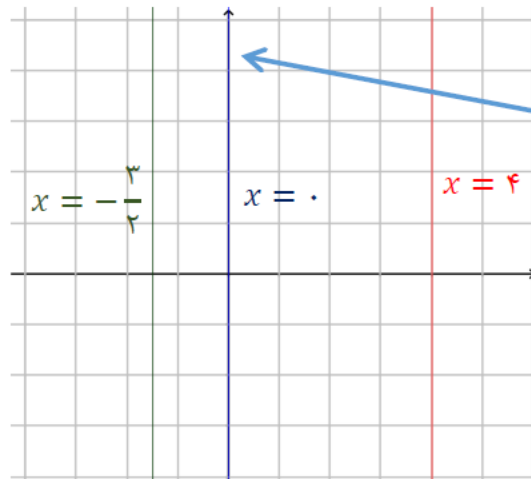


توجه: $y = 0$ معادله‌ی خط محور x ها می‌باشد.

هرگاه معادله‌ی خط به صورت $x = c$ باشد (یعنی در معادله‌ی خط y وجود نداشته باشد) آن خط محور x ها را در c قطع می‌کند و موازی با محور y ها می‌شود.

در این حالت شیب خط تعریف نشده می‌باشد.

مثال ۱۳: معادله‌ی خط‌های $x = 4$ و $x = -\frac{3}{2}$ و $x = 0$ را رسم کنید.



توجه: $x = 0$ معادله‌ی خط محور y ها می‌باشد.

نکته:

(۱) معادله ی محور طول ها (Xها): $y=0$

(۲) معادله ی محور عرض ها (Yها): $X=0$

(۳) معادله نیم ساز ناحیه اول و سوم: $y=X$

(۴) معادله نیم ساز ناحیه ی دوم و چهارم: $y=-x$

شرط عمودبودن دو خط: اگر شیب های دو خط، قرینه ی معکوس یکدیگر باشند یا حاصل ضرب شیب های دو خط مساوی ۱- باشد، آن گاه

دو خط بر هم عمودند. برای مثال خطوط $y = -3x$ و $y = \frac{1}{3}x + 2$ بر هم عمودند، زیرا:

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{قرینه ی معکوس}} -3$$

● صورت دیگر معادله ی خط: گاهی اوقات معادله ی خط را به صورت $ax + by = c$ نشان می دهند که در این معادله a ، b و c اعداد حقیقی

هستند. برای مثال معادله ی $y = 3x + 4$ را می توان به صورت $y - 3x = 4$ یا $-3x + y = 4$ نوشت که در آن، $a = -3$ ، $b = 1$ ، $c = 4$ است.