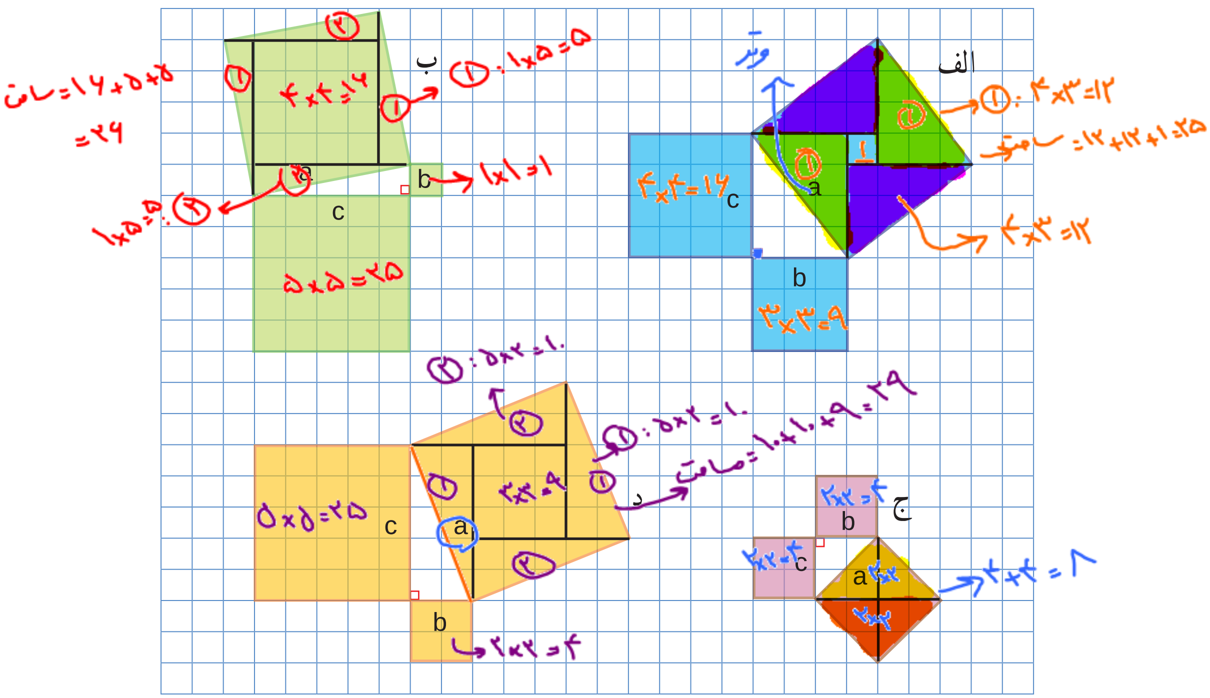
فعّالیت

۱ــ روی هر ضلع مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ زیر یک مربع رسم کرده‌ایم. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع‌های ساخته شده را به‌دست آورید و جدول را کامل کنید.



	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a (وتر) : a^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع b : b^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع c : c^2
الف ← ۱۶+۹=۲۵	۲۵	۹	۱۶
ب ← ۲۵+۱=۲۶	۲۶	۱	۲۵
ج ← ۴+۴=۸	۸	۴	۴
د ← ۲۵+۴=۲۹	۲۹	۴	۲۵

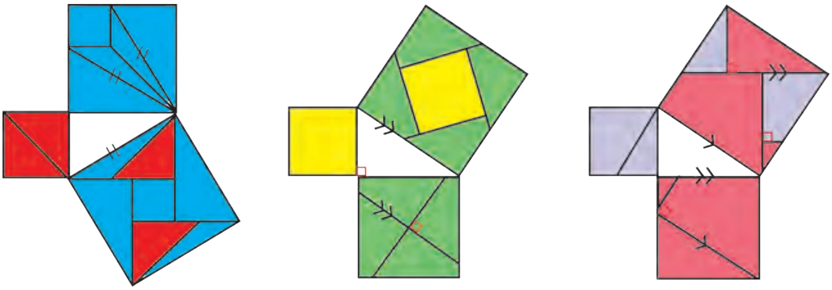
چه ارتباطی بین عددهای هر سطر می‌بینید؟

مجموع مساحت‌ها مربع‌ها ساخته شده روی اضلاع c و b، با مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a برابر است.

$c^2+b^2=a^2$

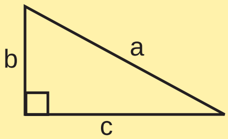
۲ــ به هر یک از شکل‌های زیر با دقت نگاه کنید. در هر شکل، روشی برای نمایش دادن رابطهٔ میان مساحت مربع‌های تشکیل شده روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه آمده است.

شما هم روی کاغذ، یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی تشکیل دهید؛ سپس با استفاده از یکی از این روش‌ها مربع‌های ساخته شده روی دو ضلع کوچک آن را طوری به قطعه‌های کاغذی تقسیم کنید که بتوان با این قطعه‌ها مربع روی وتر را کاملاً پوشاند.



رابطهٔ میان مجذور (مربع) اندازهٔ ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه به **رابطهٔ فیثاغورس** معروف است.

این رابطه بیان می‌کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

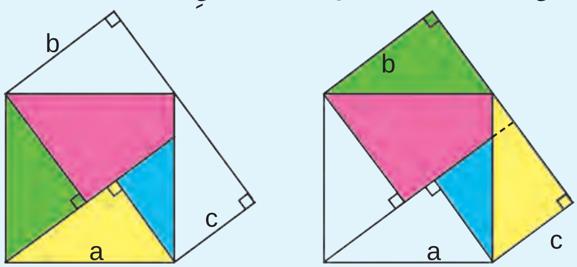


$$a^2=b^2+c^2$$

عکس این رابطه هم درست است یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

خواندنی

ابوالعباس نیریزی، ریاضی‌دان ایرانی در حدود هزار سال پیش، درستیِ رابطهٔ فیثاغورس را به‌صورت زیر نشان داد.



در شکل، چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ هم نهشت[1] دیده می‌شود.

در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ مثلث ساخته شده‌اند و در سمت چپ، مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده‌ایم. چرا مساحت ناحیهٔ رنگی در این دو شکل برابر است؟

۱ــ تعریف هم‌نهشتی در صفحه ۸۸ داده شده است.

$* \ (\sqrt{a})^2 = a$

$13^2 = 12^2 + 5^2$

$169 = 144 + 25$

$169 = 169$ ✓

$(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$

$3 = 2 + 1$

$3 = 3$ ✓

$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$9^2 = (7/2)^2 + (5/4)^2$

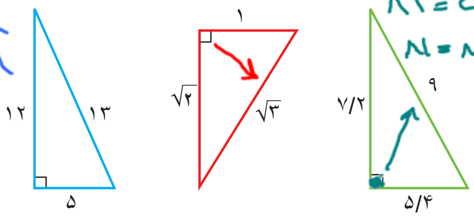
$81 = 51/84 + 29/16$

$81 = 81$

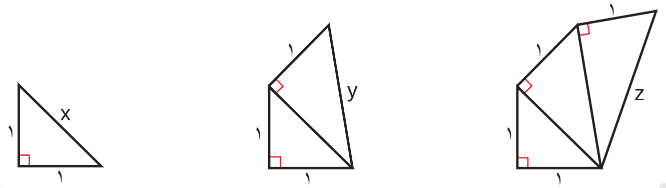
کار در کلاس

۱ــ درستیِ رابطهٔ فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو بررسی کنید.

$\sqrt{2}$
$\times \sqrt{2}$

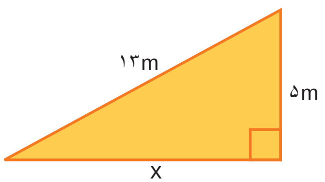


۲ــ به ترتیب طول x، y و z را به‌دست آورید.



فعّالیت

۱ــ در هر مثلث قائم الزاویه، اندازهٔ دو ضلع داده شده است. اندازهٔ ضلع مجهول را مانند نمونه پیدا کنید.



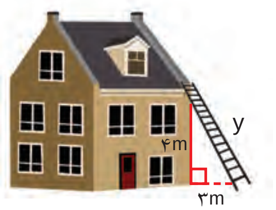
$13^2 = x^2 + 5^2$

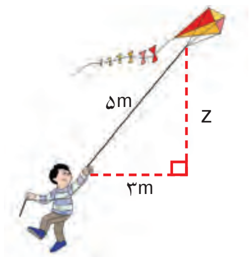
$169 = x^2 + 25$

$x^2 = 169 - 25 = 144$

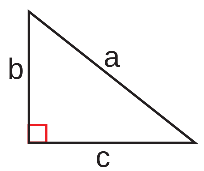
$x = \sqrt{144}$

$x = 12$





۲ــ تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید.

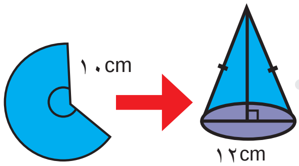


$a^2 = \_\_\_ + \_\_\_$

$b^2 = \_\_\_ - \_\_\_$

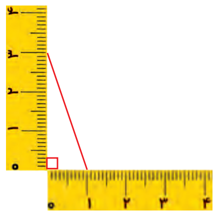
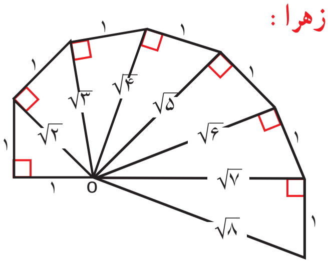
$c^2 = \_\_\_ - \_\_\_$

کار در کلاس



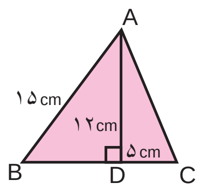
۱ــ علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، مخروطی به قطر قاعدهٔ ۱۲ سانتی‌متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

۲ــ معلم ریاضی از دانش‌آموزان خواست پاره‌خطی به طول $\sqrt{۱۰}$ سانتی‌متر رسم کنند. در اینجا پاسخ سه دانش‌آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و دربارهٔ ویژگی‌های آنها گفت‌وگو کنید. کدام دانش‌آموز از روش هندسی و کدام‌یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

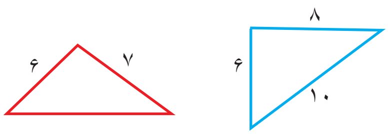
مهسا :	سیما :	زهرا :
به کمک ماشین حساب $\sqrt{۱۰}$ را حساب می‌کنم. $\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱۶$ حالا به کمک خط‌کش یک پاره‌خط به‌طول تقریباً ۳/۱ سانتی‌متر رسم می‌کنم.	 مثلثی قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنم. $۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰$ پس وتر آن $\sqrt{۱۰}$ سانتی‌متر خواهد شد.	 به همین ترتیب، ساختن مثلث‌های قائم‌الزاویه را ادامه می‌دهم تا $\sqrt{۱۰}$ ساخته شود.

تمرین

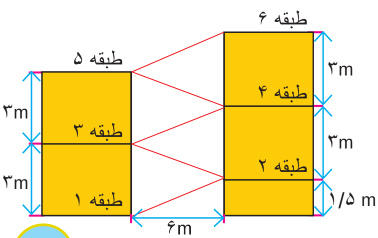
۱ــ محیط مثلث ABC را حساب کنید.



۲ــ کدام مثلث قائم‌الزاویه است؟



۳ــ شکل روبه‌رو نمایی از یک توقفگاه طبقاتی را نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقهٔ بعدی می‌رساند، چقدر است؟



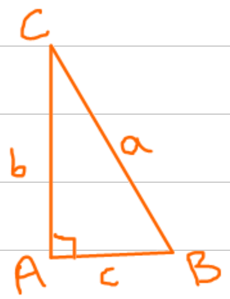
فصل ۶

(درس اول):

مثلث قائم الزاویه: مثلثی است که در آن یک زاویه قائمه (90°) وجود دارد.

بزرگترین ضلع مثلث قائم الزاویه (ضلع روبرو به زاویه 90°) وتر نام دارد و دو ضلع دیگر را ضلع‌های زاویه قائمه می‌نامیم.

رابطه فیثاغورس: در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور (مربع، توان ۲) وتر با مجموع مجذورهای (مربع‌ها، توان ۲ های) دو ضلع دیگر برابر است.

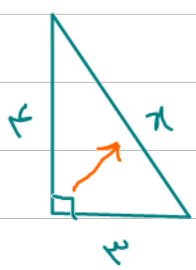


$$\hat{A}=90^\circ \Rightarrow a^2=b^2+c^2$$

عکس رابطه فیثاغورس: اگر در مثلثی، مجذور (مربع) یک ضلع با مجموع مجذورهای (مربع‌های) دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

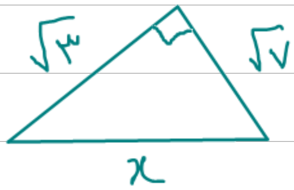
$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}=90^\circ$$

مثال: مقادیر مجهول را به دست آورید.



$$x^2=3^2+4^2$$
$$x^2=9+16$$
$$x^2=25$$
$$x=\sqrt{25}=5$$

$$x^2=15^2+8^2$$
$$x^2=225+64$$
$$x^2=289$$
$$x=\sqrt{289}=17$$

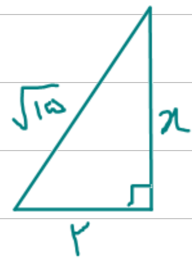


$$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7})^2$$

$$x^2 = 3 + 7$$

$$x^2 = 10$$

$$x = \sqrt{10}$$



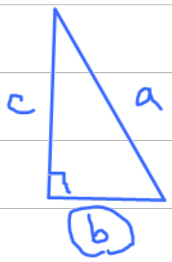
$$(\sqrt{15})^2 = x^2 + 2^2$$

$$15 = x^2 + 4$$

$$x^2 = 15 - 4$$

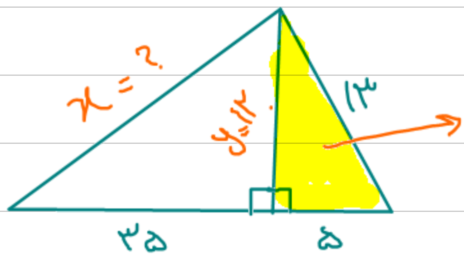
$$x^2 = 11$$

$$\boxed{x = \sqrt{11}}$$



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b^2 = a^2 - c^2 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$

مثال: محیط شکل های زیر را بیابید.



$$y^2 + 5^2 = 13^2$$

$$y^2 + 25 = 169$$

$$y^2 = 169 - 25$$

$$y^2 = 144$$

$$y = \sqrt{144} = 12$$

$$x^2 = 12^2 + 35^2$$

$$x^2 = 144 + 1225$$

$$x^2 = 1369$$

$$x = \sqrt{1369} = 37$$

محیط $= 5 + 35 + 37 + 13 = 90$