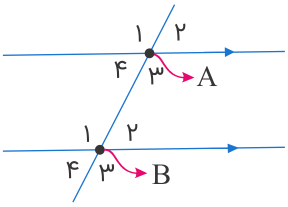
مدرسه علوی شعبه غرب	پایه هشتم	درس هندسه هشتم
دبیر آقای ابراهیمی	تاریخ ۱۴۰۲	مبحث جمعبندی
نام و نام‌خانوادگی		

۱ در شکل زیر زاویه‌های مساوی را مشخص کنید.



۲ در یک چهار ضلعی اندازهٔ یکی از زاویه‌ها برابر با میانگین اندازهٔ بقیهٔ زاویه‌ها است. اندازهٔ آن زاویه چند درجه می‌باشد؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰
۳) ۷۰ ۴) ۹۰

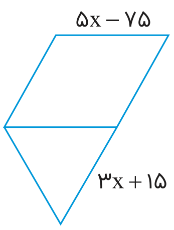
۳ از تقاطع نیمسازهای زوایای خارجی زاویه‌های تند یک مثلث قائم‌الزاویه، چه زاویه‌ای پدید می‌آید؟

۱) ۳۵° ۲) ۴۵°
۳) ۶۰° ۴) ۷۵°

۴ مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی منتظم ۱۹۸۰° می‌باشد. کدام گزینه در مورد این شکل درست است؟

۱) مرکز تقارن دارد، اما محور تقارن ندارد. ۲) مرکز تقارن دارد و محور تقارن هم دارد.
۳) مرکز تقارن ندارد، اما محور تقارن دارد. ۴) مرکز تقارن ندارد و محور تقارن هم ندارد.

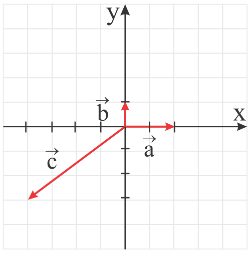
۵ در شکل زیر مثلث، متساوی‌الاضلاع و چهار ضلعی، متوازی‌الاضلاع است. x چند واحد می‌باشد؟



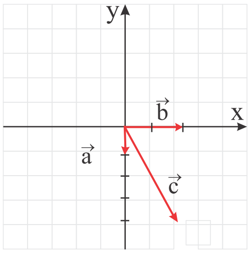
۱) ۹۰
۲) ۴۵
۳) ۱۱۰
۴) ۸۰

در شکل‌های زیر بردار $\vec{c}$ را برحسب بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

الف



ب



۷ در معادله‌های مختصاتی زیر، مختصات بردار $\vec{x}$ را تعیین کنید.

الف

$$\vec{x} - \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix} = -۳\vec{i} + ۷\vec{j}$$

ب

$$۲\vec{i} - ۵\vec{j} + \vec{x} = ۳\vec{i} - ۴\vec{j} + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

پ

$$۴\vec{i} - ۱۱\vec{j} + ۳\vec{x} = ۲\vec{i} - ۵\vec{j} + \vec{x}$$

ت

$$\begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۷ \end{bmatrix} - ۳\vec{i} + ۵\vec{j} + ۳\vec{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} + \vec{i} - ۲\vec{x} - ۳\vec{j}$$

۸ در هر قسمت مختصات بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را مشخص کنید.

الف

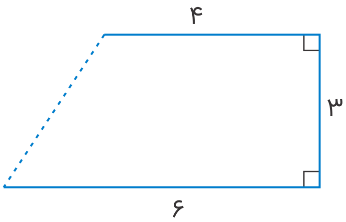
$$\begin{cases} \vec{a} = -۳\vec{i} + ۵\vec{j} \\ \vec{b} = ۲\vec{a} - ۳\vec{j} \\ \vec{c} = ۲\vec{a} + ۳\vec{b} \end{cases}$$

ب

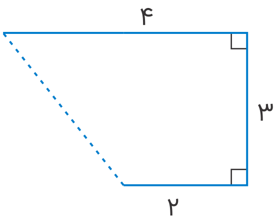
$$\begin{cases} \vec{a} = ۲(۲\vec{i} - \vec{j}) + ۳\vec{i} \\ \vec{b} = ۳\vec{a} - ۵\vec{i} + ۳\vec{j} \\ \vec{c} = ۲(\vec{a} - \vec{b}) \end{cases}$$

۹ در هرکدام از شکل‌های زیر، طول پاره‌خطی را که خط‌چین کشیده شده، محاسبه نمایید.

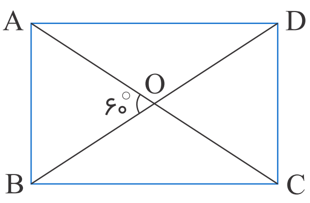
الف



ب



۱۰ در مستطیلی زاویهٔ بین قطرها ۶۰ درجه و طول هر قطر آن ۸ cm می‌باشد، محیط مثلث $B\hat{O}C$ کدام است؟



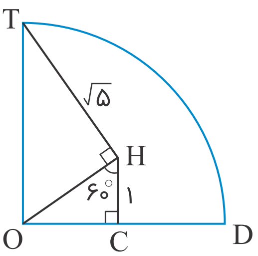
۱) $۸\sqrt{۳}$

۲) $۸ + ۴\sqrt{۳}$

۳) $۷ + ۴\sqrt{۳}$

۴) $۲ + ۴\sqrt{۳}$

۱۱ در ربع دایرهٔ زیر، باتوجه‌به اندازه‌های روی شکل، اندازهٔ CD چقدر است؟ (در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ °۳۰ نصف وتر است)



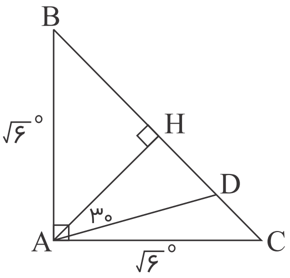
۱) $۳ - \sqrt{۳}$

۲) $۳ + \sqrt{۳}$

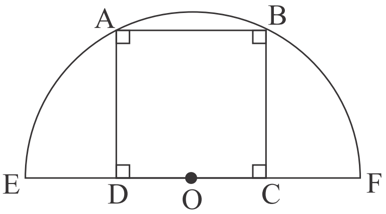
۳) $۲ - \sqrt{۲}$

۴) $۲ + \sqrt{۲}$

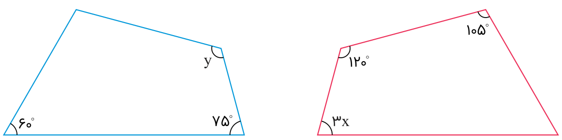
۱۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، AH ارتفاع وارد بر وتر و $H\hat{A}D = ۳۰^\circ$ است. اندازهٔ HD چقدر است؟



۱۳ در شکل زیر، O وسط CD و $DE = CF = \sqrt{۵} - ۱$ است. مساحت مربع را حساب کنید.



۱۴ دو شکل زیر، با یک تقارن محوری بر هم منطبق می‌شوند. مقادیر x و y کدام‌اند؟



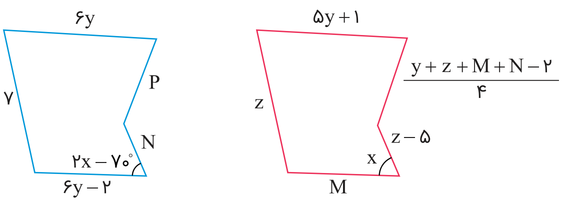
۱) $y = ۱۰۵^\circ$ و $x = ۲۵^\circ$

۲) $y = ۱۲۰^\circ$ و $x = ۲۰^\circ$

۳) $y = ۱۲۰^\circ$ و $x = ۲۵^\circ$

۴) $y = ۱۰۵^\circ$ و $x = ۲۰^\circ$

۱۵ دو شکل زیر با انتقال بر هم منطبق می‌شوند. حاصل $x + y + z + M + N + P$ کدام است؟



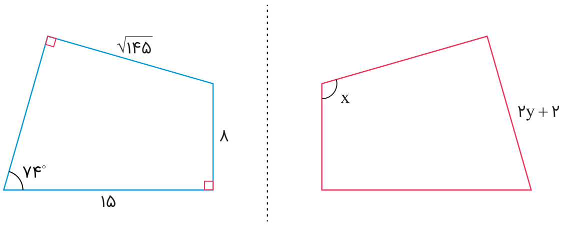
۱) ۸۰

۲) ۸۲

۳) ۸۵

۴) ۸۷

۱۶ شکل سمت چپ را نسبت به خط‌چین قرینه کرده‌ایم. در شکل سمت راست مجموع مقادیر $x+y$ کدام است؟



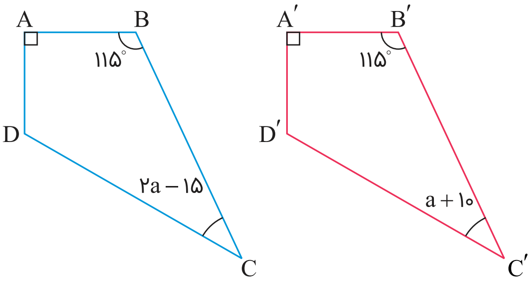
۱) ۱۰۶

۲) ۱۱۱

۳) ۱۰۸

۴) ۱۰۲

۱۷ چهار ضلعی‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ هم‌نهشت‌اند. زاویهٔ ADC چند درجه است؟



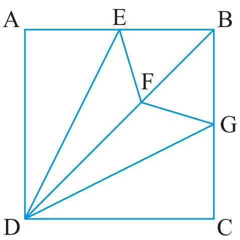
۱) ۱۲۰

۲) ۱۳۰

۳) ۱۱۵

۴) ۱۴۰

۱۸ در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ مربع است. تمام اشکال به‌وجودآمده در شکل دوبه‌دو باهم هم‌نهشت هستند. چند رابطهٔ هم‌نهشتی برای تمام سه ضلعی‌ها و چهار ضلعی‌های روی شکل می‌توان نوشت؟



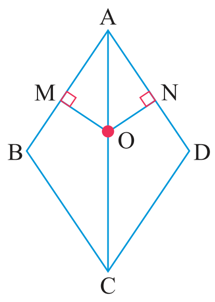
۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

۱۹ چهار ضلعی ABCD لوزی است. دلیل هم‌نهشتی دو مثلث AOM و AON کدام است؟



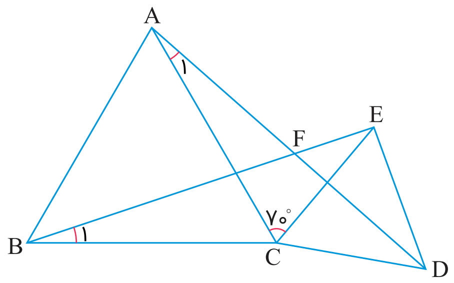
۱) ض‌زض

۲) زض‌ز

۳) ض‌ض‌ض

۴) موارد (۱) و (۲)

۲۰ در شکل زیر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ECD}$ متساوی‌الاضلاع هستند. زاویه $A\hat{F}B$ چند درجه است؟



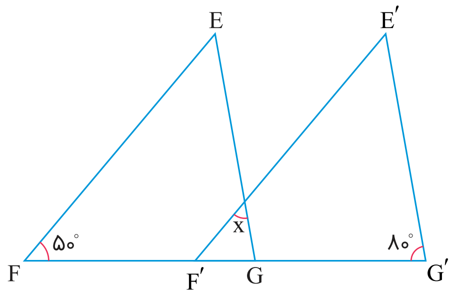
۱) ۴۰°

۲) ۴۵°

۳) ۵۰°

۴) ۶۰°

۲۱ دو مثلث EFG و $E'F'G'$ هم‌نهشت می‌باشند، اندازهٔ زاویهٔ x چند درجه است؟



۱) ۵۰°

۲) ۶۰°

۳) ۸۰°

۴) ۴۵°

۲۲ کدام‌یک از جمله‌های زیر درست است؟

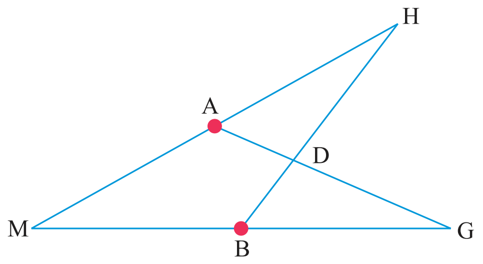
۱) اگر مساحت دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۲) از دو مثلث مساوی، اگر یکی متساوی‌الساقین باشد، دیگری نیز متساوی‌الساقین است.

۳) یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌تواند با یک مثلث قائم‌الزاویه هم‌نهشت باشد.

۴) یک مثلث قائم‌الزاویه هیچ‌گاه با یک مثلث متساوی‌الساقین هم‌نهشت نیست.

۲۳ در شکل زیر نقاط A و B طوری قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ M برابر است. اگر $AH = BG = ۴۳$ و $BH = ۸۸$ باشد، طول AG کدام است؟



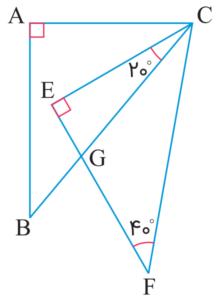
۱) ۸۸

۲) ۸۳

۳) ۴۸

۴) ۴۵

۲۴ مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و FEC باهم هم‌نهشت‌اند و $BC = FC$ است. اندازهٔ زاویهٔ FGC چند درجه است؟



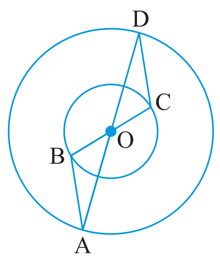
۱) ۹۰°

۲) ۱۱۰°

۳) ۷۰°

۴) ۱۰۰°

۲۵ در شکل زیر O مرکز دو دایره است. به کدام حالت دو مثلث OAB و OCD هم‌نهشت هستند؟



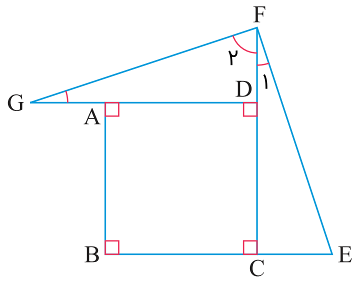
۱) ض‌ض‌ض

۲) ض‌زض

۳) زض‌ز

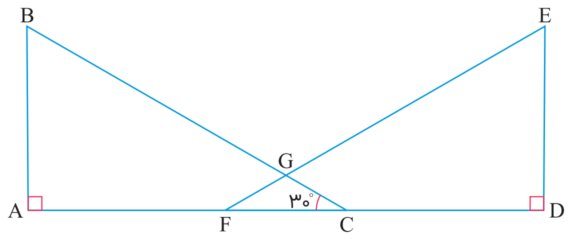
۴) ززز

۲۶ چهار ضلعی ABCD مربع است و $CE = DF = AG$ می‌باشد. زاویه EFG کدام است؟



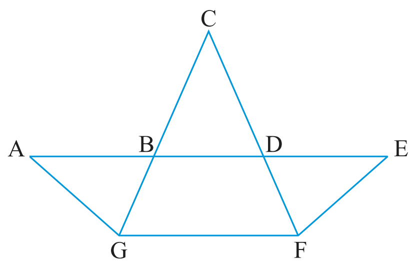
۱) ۷۵
۲) ۸۰
۳) ۸۵
۴) ۹۰

۲۷ در شکل زیر دو مثلث ABC و DEF قابل انطباق‌اند. اندازهٔ زاویهٔ EGC چقدر است؟



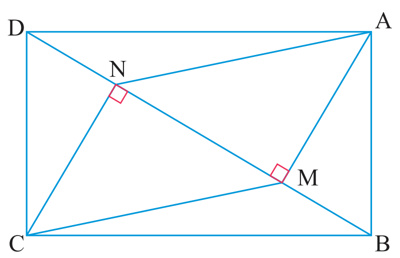
۱) ۳۰ درجه
۲) ۶۰ درجه
۳) ۱۲۰ درجه
۴) ۱۵۰ درجه

۲۸ در شکل زیر، چهار ضلعی‌های AEFG و BDFG ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند. دلیل تساوی مثلث‌های ABG و DEF کدام است؟



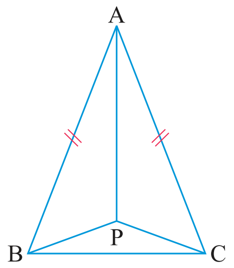
۱) (ض‌ض‌ض)
۲) (ز‌ض‌ز)
۳) (ض‌ز‌ض)
۴) دلایل کافی برای تساوی دو مثلث وجود ندارد.

۲۹ در مستطیل ABCD (شکل زیر) AM و CN را بر قطر BD عمود کرده‌ایم. چند جفت مثلث هم‌نهشت در شکل می‌بینید؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۳۰ در شکل زیر $P\hat{A}B = P\hat{A}C$ و $AB = AC$ است. اگر $A\hat{P}C = 110^\circ$، آنگاه $P\hat{B}C$ چند درجه است؟



۱) 20°

۲) 40°

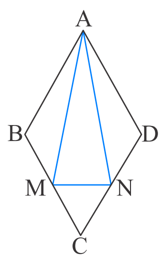
۳) 70°

۴) 75°

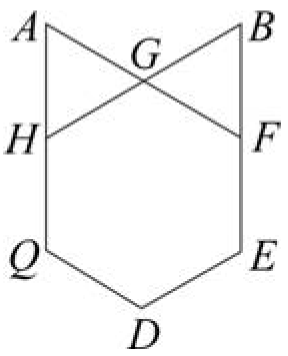
۳۱ ثابت کنید در مثلث متساوی‌الساقین، میانهٔ وارد بر قاعده، زاویهٔ بین دو ساق را نصف می‌کند.

۳۲ ثابت کنید قطرهای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، باهم برابرند.

۳۳ در لوزی زیر، M وسط BC و N وسط DC است. ثابت کنید دو مثلث ABM و ADN همنهشت هستند.



۳۴ باتوجه‌به شش ضلعی منتظم HQDEFG، به کدام حالت دو مثلث AHG و BGF باهم برابر هستند؟



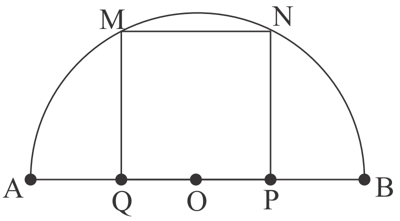
۱) (ض‌زض)

۲) (زض‌ز)

۳) (ض‌ض‌ض)

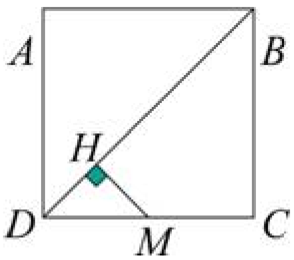
۴) هر سه حالت

۳۵ در نیم‌دایره‌ای به قطر $AB = ۲R$ مربعی محاط می‌کنیم که یک ضلع آن بر AB واقع باشد. مساحت مربع را برحسب R بنویسید.



۳۶ از نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده‌ایم. ثابت کنید دو مثلث ایجادشده همنهشت هستند.(نقطهٔ A روی خط a و نقطهٔ B روی خط b می‌باشد و پاره‌خط AB مورب است)

۳۷ در شکل زیر چهار ضلعی $ABCD$ مربع است و HB با هر ضلع مربع برابر است، در این صورت اندازهٔ زاویهٔ $H\hat{M}B$ کدام است؟



۱) ۳۰

۲) ۲۲/۵

۳) ۴۵

۴) ۶۷/۵

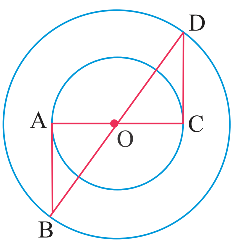
۳۸ چه تعداد از عبارات زیر صحیح است؟

- هر دو مستطیل دلخواه متشابه‌اند.
- هر دو مثلث متساوی‌الساقین که یک رأس قائمه دارند، متشابه‌اند.
- هر دو مثلث متشابه، همنهشت هستند.
- چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن، مکمل باشند، یک متوازی‌الاضلاع است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳۹ در اثبات مسئلهٔ "در شکل زیر O مرکز دایره و AB و CD مماس بر دایره کوچک است، ثابت کنید $AB = CD$" از کدام حالت همنهشتی نمی‌توان استفاده کرد؟



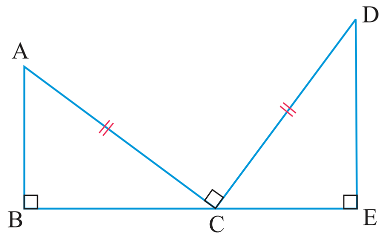
۱) وتر و یک ضلع

۲) وتر و یک زاویهٔ تند

۳) ض‌زض

۴) ض‌ض‌ض

۴۰ در شکل زیر $AC = CD$ است. دو مثلث ABC و CDE بنا به کدام حالت همنهشت هستند؟



۱) وتر و یک زاویهٔ تند

۲) وتر و یک ضلع

۳) ز ض ز

۴) گزینهٔ ۱ و ۳

۴۱ در اثبات "در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آن‌ها باهم برابرند." از کدام حالت هم‌نهشتی استفاده شده است؟

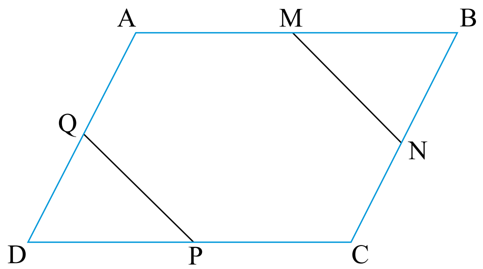
۱) (ض‌زض)

۲) (زض‌ز)

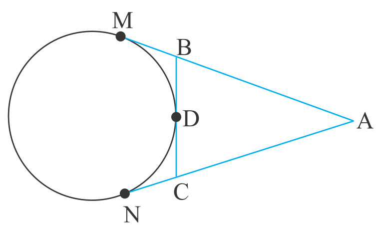
۳) (ض‌ض‌ض)

۴) (ض‌زض) و (ض‌ض‌ض)

۴۲ در شکل زیر چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و M، N، P و Q وسط اضلاع آن می‌باشند. ثابت کنید $\overline{MN} = \overline{PQ}$ است.



۴۳ در شکل زیر، $\overline{AM}$، $\overline{AN}$ و $\overline{BC}$ بر دایره مماس هستند. اگر $\overline{AM} = ۱۰$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



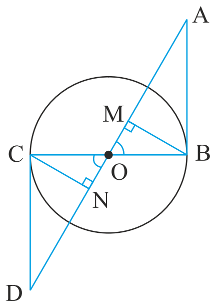
۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۱۵

۴) ۳۰

۴۴ در شکل زیر، چند جفت مثلث هم‌نهشت وجود دارد؟ (AB و CD مماس بر دایره و O مرکز دایره)



۱) یک

۲) دو

۳) سه

۴) چهار

۴۵ مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع $\sqrt{۲}$، چندبرابر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی به وتر ۶ است؟

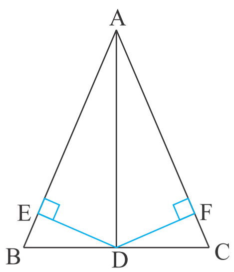
۱) $\sqrt{۲}$

۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴۶ در شکل زیر، با اضافه‌شدن کدام‌یک از فرض‌های زیر، می‌توان همنهشتی دو مثلث ADE و ADF را نتیجه گرفت؟



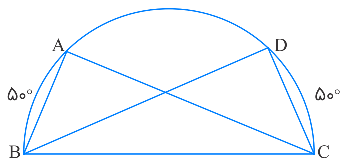
۱) مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲) $BE = CF$

۳) نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ A است.

۴) AD میانهٔ وارد بر ضلع BC است.

۴۷ دلیل همنهشتی دو مثلث ABC و BDC کدام است؟ (BC قطر نیم‌دایره است)



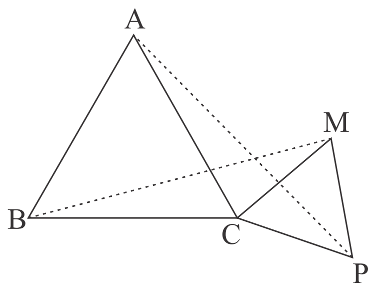
۱) وتر و یک ضلع قائمه

۲) وتر و یک زاویهٔ حاده

۳) دو زاویه و ضلع بین

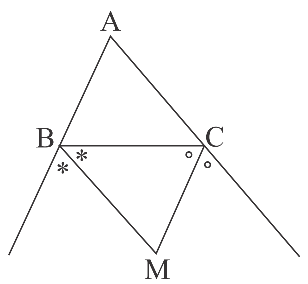
۴) هر سه گزینه

۴۸ دو مثلث $\overset{\Delta}{\mathrm{ABC}}$ و $\overset{\Delta}{\mathrm{MCP}}$ هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. ثابت کنید: $\mathrm{BM} = \mathrm{AP}$

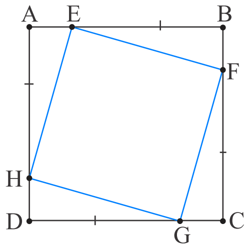


۴۹ ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

۵۰ ثابت کنید در هر مثلثی مانند ABC اگر BM و CM نیمساز زاویه‌های خارجی $\hat{\mathrm{B}}$ و $\hat{\mathrm{C}}$ باشند، داریم: $\hat{\mathrm{M}} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{۲}$



۵۱ در شکل زیر اگر $ABCD$ مربع باشد، برای شکل $EFGH$ کدام صحیح‌تر است؟



۱) لوزی

۲) مربع

۳) مستطیل

۴) متوازی‌الاضلاع

۵۲ از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی هر متوازی‌الاضلاع چه شکلی به وجود می‌آید؟

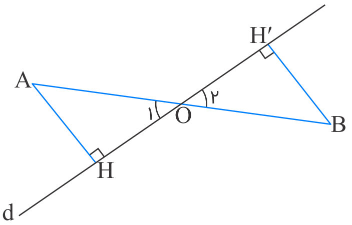
۱) لوزی
۲) مربع
۳) متوازی‌الاضلاع
۴) مستطیل

۵۳ ثابت کنید اگر در یک چهار ضلعی، قطرها عمودمنصف یکدیگر باشند، آن چهار ضلعی لوزی است.

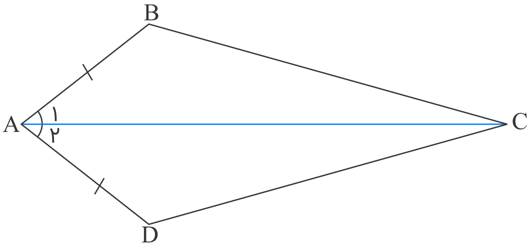
۵۴ در مثلثی به ابعاد ۵ و ۸ و $\sqrt{۴۱}$، طول بلندترین ارتفاع مثلث، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۶/۴
۲) ۴/۸
۳) ۷/۲
۴) ۵/۴

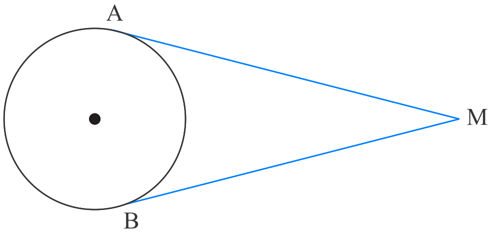
۵۵ در شکل زیر خط d از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد و فاصله دو نقطه A و B از خط d به یک فاصله است. ثابت کنید $OH = OH'$. (نوشتن فرض و حکم الزامی نیست)



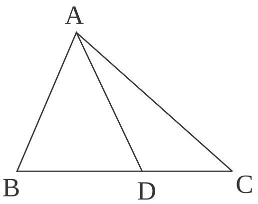
۵۶ در شکل زیر پاره‌خط $\overline{AC}$ نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است و اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ برابرند. ثابت کنید $\overline{BC} = \overline{DC}$.



۵۷ از نقطهٔ M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم نموده‌ایم. آیا اندازهٔ این دو مماس برابر است؟ درستی ادعای خود را ثابت کنید.



۵۸ در شکل زیر $AB = AD$ و طول پاره‌خط‌های BD و AB و AC به ترتیب ۴ و ۵ و ۱۳ واحد بیشتر از طول پاره‌خط DC است. طول پاره‌خط DC چقدر است؟



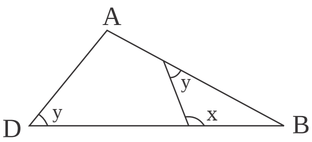
۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) ۸

۳) $۹\sqrt{۳}$

۴) ۱۲

۵۹ باتوجه‌به شکل زیر $\frac{A}{B}$ کدام گزینه است؟



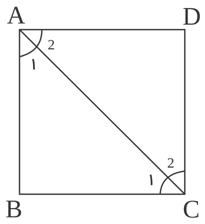
۱) $\frac{x}{۱۸۰ - (x + y)}$

۲) $\frac{۳y}{۱۸۰ - x}$

۳) $\frac{۱۸۰ - (x + y)}{x}$

۴) $\frac{۱۸۰ - (۲x - y)}{y}$

۶۰ در مسئلهٔ "ثابت کنید قطر AC از مربع $ABCD$، نیمساز زاویه‌های A و C است." کدام حالت، برای اثبات همنهشتی مثلث‌های ADC و ABC <u>نادرست است</u>؟



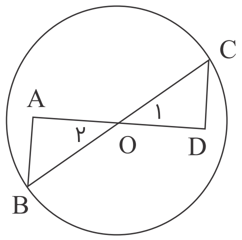
۱) (ض‌زض)

۲) وتر و یک ضلع

۳) (زض‌ز)

۴) (ض‌ض‌ض)

۶۱ باتوجه‌به شکل زیر، با در نظر گرفتن کدام گزینه به‌عنوان فرض مسئله <u>نمی‌توان</u> همنهشتی دو مثلث را نتیجه گرفت؟ (O مرکز دایره است و دو زاویهٔ O_1 و O_2 متقابل به رأس هستند)



۱) $AB \parallel CD$

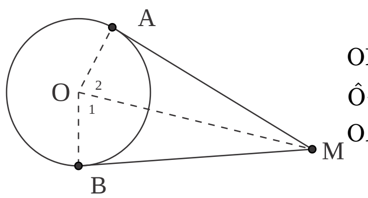
۲) $\overline{AB} = \overline{CD}$

۳) $\hat{A} = \hat{D}$

۴) $\overline{AO} = \overline{OD}$

۶۲ از نقطهٔ M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کرده‌ایم. در زیر اثباتی آورده شده است که نشان می‌دهد اندازهٔ این دو مماس باهم برابر هستند (O مرکز دایره است).

اثبات: ابتدا همنهشتی دو مثلث OAM و OBM را اثبات می‌کنیم.



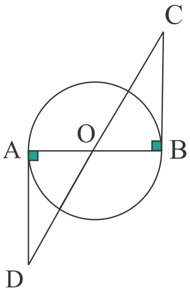
$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض.ز.ض)}} \overset{\Delta}{OAM} \cong \overset{\Delta}{OBM}$$

از تساوی اجزای متناظر این دو مثلث نتیجه می‌گیریم که $AM = BM$ است.

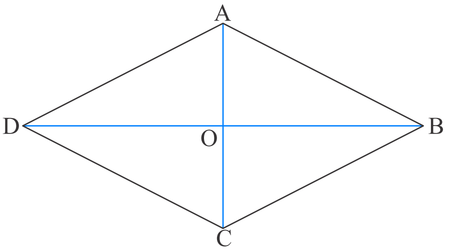
الف اشکال استدلال داده‌شده را بیابید و آن را اصلاح کنید.

ب آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به هر نقطهٔ دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طورکلی طول دو مماسی که از هر نقطهٔ واقع در خارج دایره بر دایره رسم می‌شود، مساوی است؟ چرا؟

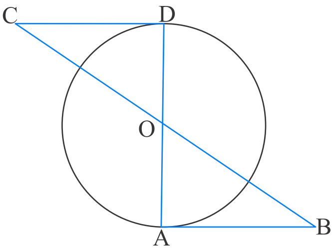
۶۳ در شکل زیر O مرکز دایره است. نشان دهید $AD = BC$.



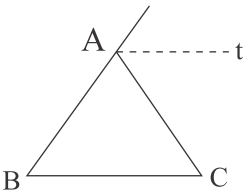
۶۴ می‌دانیم هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است و در همه متوازی‌الاضلاع‌ها، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.
با استفاده از این موضوع ثابت کنید در یک لوزی قطرها بر هم عمود هستند.



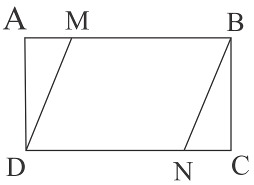
۶۵ در شکل زیر نقطه O مرکز دایره است و AB و CD بر دایره مماس هستند. ثابت کنید دو مثلث CDO و ABO همنهشت‌اند.



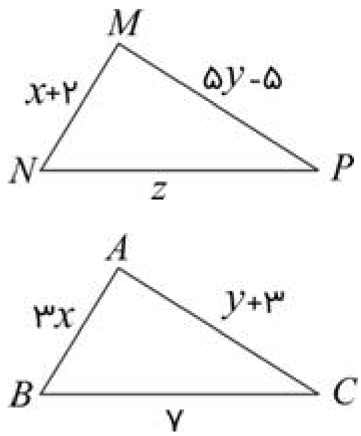
۶۶ مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ در رأس A متساوی‌الساقین است. At موازی BC رسم شده است. ثابت کنید At نیمساز زاویه خارجی A است.



۶۷ چهار ضلعی ABCD مستطیل است. اگر AM=NC باشد، ثابت کنید چهار ضلعی MBND متوازی‌الاضلاع است.



۶۸ دو مثلث ABC و MNP باهم همنهشت‌اند. کدام گزینه نادرست است؟



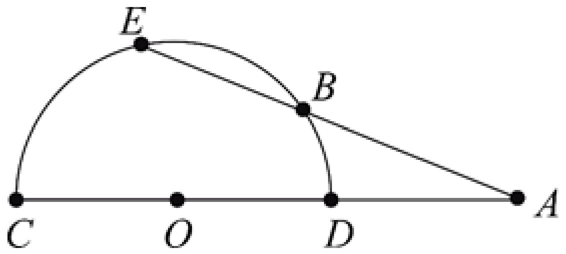
۱) $\mathrm{z} = ۷ , \mathrm{x} = ۱$

۲) $\overline{\mathrm{AB}} = ۳ , \mathrm{y} = ۲$

۳) $\overline{\mathrm{MP}} = ۵ , \mathrm{z} = ۷$

۴) $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{N}} , \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{P}}$

۶۹ در شکل زیر، AB برابر شعاع نیم‌دایره بوده و اگر $\hat{\mathrm{A}} = ۱۵^\circ$ درجه باشد، کمان CE چند درجه است؟



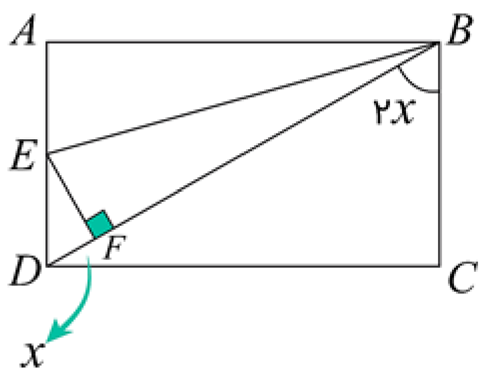
۱) ۷۵

۲) ۶۰

۳) ۴۵

۴) ۳۰

۷۰ چهار ضلعی ABCD مستطیل است و نقطهٔ F روی قطر آن طوری قرار گرفته است که BF با طول مستطیل برابر است. اندازهٔ زاویهٔ $\mathrm{E\hat{B}C}$ کدام است؟



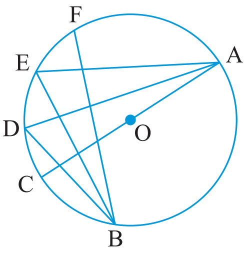
۱) ۵۷/۵

۲) ۶۵

۳) ۶۷/۵

۴) ۷۵

۷۱ در شکل زیر AD نیمساز زاویهٔ EAC و BE نیمساز زاویهٔ FBD است. اگر زاویهٔ FBE برابر ۲۰ درجه باشد، کمان AE چند درجه است؟



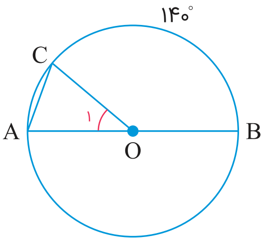
۱) ۹۰°

۲) ۱۰۰°

۳) ۱۱۰°

۴) ۱۲۰°

۷۲ باتوجه‌به شکل زیر زاویهٔ C چند درجه است؟



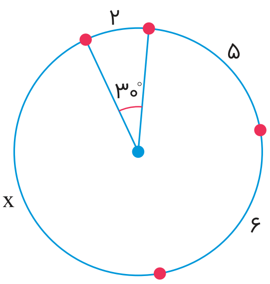
۱) ۶۰°

۲) ۶۵°

۳) ۷۰°

۴) ۷۵°

۷۳ دایره‌ای مطابق شکل به چهار کمان به نسبت ۲، ۵، ۶ و x تقسیم شده است. زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان با نسبت ۲ برابر با ۳۰ درجه است. x کدام است؟



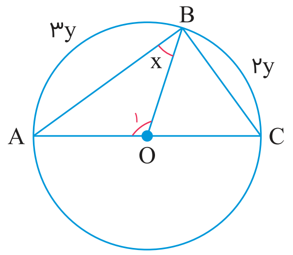
۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

۷۴ در شکل زیر اندازهٔ $x+y$ برحسب درجه کدام است؟



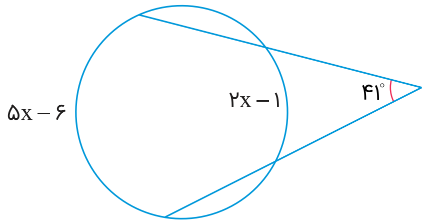
۱) ۳۶

۲) ۱۰۸

۳) ۷۲

۴) ۵۴

۷۵ در شکل زیر x کدام است؟



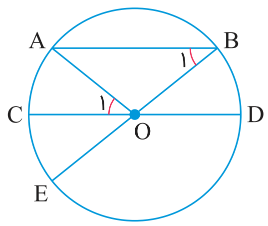
۱) ۳۰

۲) ۲۹

۳) ۳۱

۴) ۲۸

۷۶ در شکل زیر وترهای AB و CD موازی هستند و اندازهٔ کمان AE برابر با ۴۰ درجه است. اندازهٔ زاویهٔ O_1 چند درجه است؟



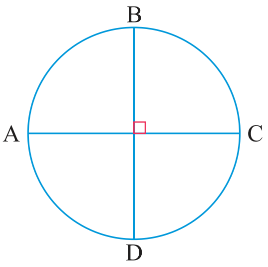
۱) °۴۰

۲) °۲۰

۳) °۱۵

۴) °۲۵

۷۷ در شکل زیر دو قطر عمود بر هم رسم کرده‌ایم. اگر $r = ۱$ باشد، طول $B\overset{\frown}{A}C$ چقدر است؟



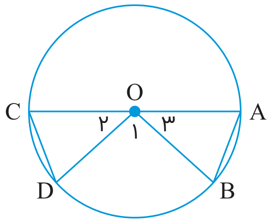
۱) $\frac{\pi}{۴}$

۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) $\frac{۳\pi}{۴}$

۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۷۸ در شکل زیر اندازهٔ وترهای AB و CD با هم مساوی است و AC قطر دایره است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{O}_۱$ کدام است؟ $(\overset{\frown}{AB} = ۴۲^\circ)$



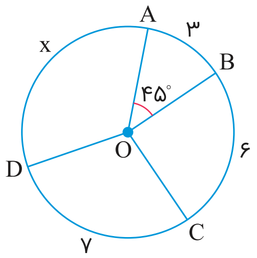
۱) ۸۰

۲) ۸۶

۳) ۱۰۰

۴) ۹۶

۷۹ دایره‌ای مطابق شکل زیر به چهار کمان به نسبت‌های داده‌شده تقسیم شده است. x چه کسری از محیط دایره است؟ (O مرکز دایره است)



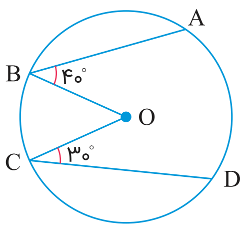
۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۰ در شکل زیر اگر O مرکز دایره باشد، مقدار $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$ کدام است؟



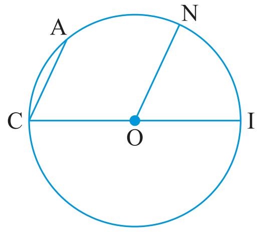
۱) ۱۲۰

۲) ۱۳۰

۳) ۱۴۰

۴) ۱۵۰

۸۱ در شکل زیر، CI قطر دایره است و $CA||ON$، اگر $\overset{\frown}{AC} = ۵۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ NOI چند درجه است؟



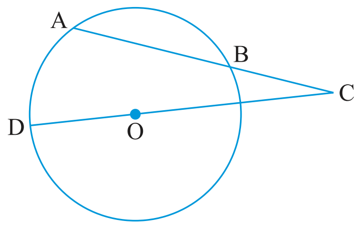
۱) ۵۵

۲) ۶۰

۳) ۶۵

۴) ۷۰

۸۲ در شکل زیر BC مساوی شعاع دایره است. اگر $\hat{C} = ۲۰^\circ$ باشد، کمان AD چند درجه است؟



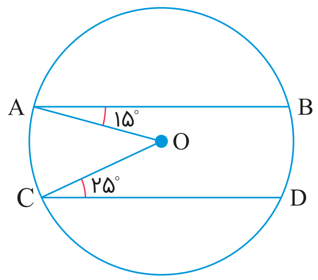
۱) ۴۰

۲) ۴۵

۳) ۵۰

۴) ۶۰

۸۳ در شکل زیر، اندازهٔ $\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC}$ چند درجه است؟



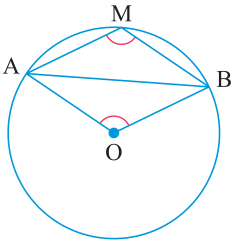
۱) ۷۵

۲) ۸۰

۳) ۹۰

۴) ۱۱۰

۸۴ نقطهٔ O مرکز دایره و نقطهٔ M واقع بر محیط آن را به دو سر وتر AB از این دایره وصل می‌کنیم. درصورتی‌که دو زاویهٔ AOB و AMB مساوی باشند، اندازهٔ هریک از این دو زاویه کدام است؟



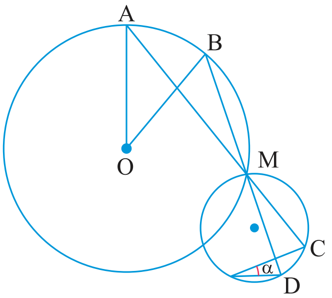
۱) ۱۱۰° و ۱۱۰°

۲) ۱۲۰° و ۱۲۰°

۳) ۱۱۵° و ۱۱۵°

۴) ۱۲۵° و ۱۲۵°

۸۵ در شکل زیر $\hat{O} = ۴۰^\circ$. زاویهٔ α چند درجه است؟ (O مرکز دایره است)



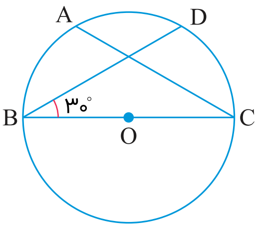
۱) ۴۰

۲) ۳۰

۳) ۲۵

۴) ۲۰

۸۶ در شکل زیر BC قطر دایره، D وسط کمان AC و $D\hat{B}C = ۳۰^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ ACB چند درجه است؟



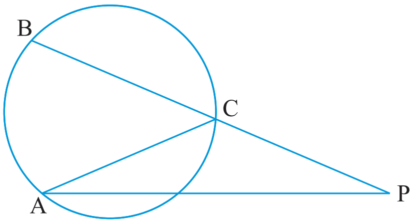
۱) ۲۰

۲) ۶۰

۳) ۴۵

۴) ۳۰

۸۷ اگر زاویهٔ P برابر با ۲۳ درجه باشد و مثلث ACP متساوی‌الساقین باشد، آنگاه کمان AB چند درجه است؟



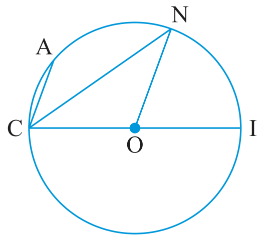
۱) ۶۹

۲) ۷۴

۳) ۸۶

۴) ۹۲

۸۸ در شکل زیر CI قطر دایره و $CA||ON$. اگر زاویهٔ ACO برابر با ۷۰ درجه باشد، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ CNO کدام است؟



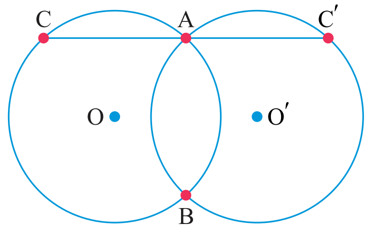
۱) $۲۷/۵^\circ$

۲) ۳۰°

۳) ۳۵°

۴) $۳۲/۵^\circ$

۸۹ در شکل زیر، دو دایرهٔ مساوی متقاطع‌اند. قاطع CAC' را رسم می‌کنیم. مثلث CBC' همواره ....



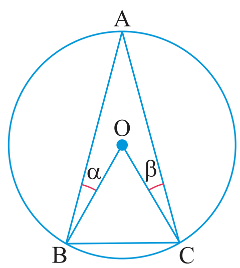
۱) متساوی‌الاضلاع است.

۲) قائم‌الزاویه است.

۳) متساوی‌الساقین است.

۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۹۰ در شکل زیر مثلث OBC متساوی‌الساقین است. حاصل $\alpha + \beta$ چند درجه است؟ (O مرکز دایره است)



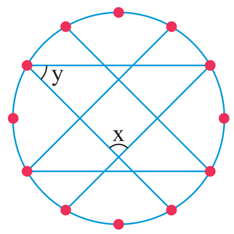
۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۳۰

۴) ۴۰

۹۱ در شکل زیر، دایره را به ۱۲ کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم. اندازهٔ زاویهٔ $x + y$ کدام است؟



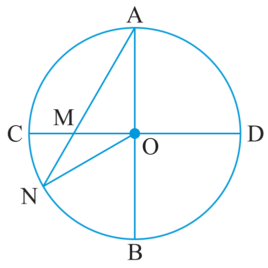
۱) ۱۰۰

۲) ۱۳۵

۳) ۱۲۰

۴) ۹۰

۹۲ در شکل زیر، دو قطر CD و AB برهم عمودند و $\mathrm{OM}=\mathrm{MN}$. اندازهٔ کمان BN چقدر است؟



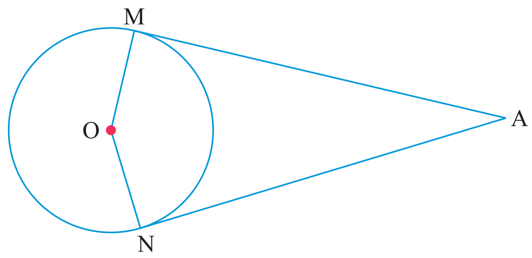
۱) ۵۰°

۲) ۳۰°

۳) ۶۰°

۴) ۴۵°

۹۳ محیط چهار ضلعی AMON، $۲۰\,\mathrm{cm}$ و شعاع دایره $۳\,\mathrm{cm}$ است. با فرض اینکه AM و AN بر دایره مماس هستند، اندازهٔ AM کدام است؟



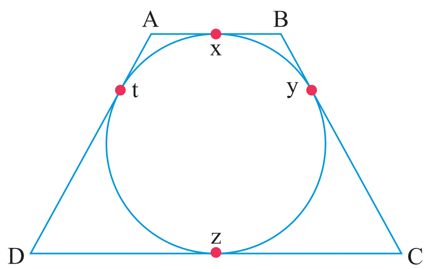
۱) ۱۴

۲) ۷

۳) ۳/۵

۴) ۴

۹۴ ذوزنقهٔ زیر متساوی‌الساقین است. اگر $\mathrm{AB}=۱۰$ و $\mathrm{CD}=۳۰$ باشد، طول ساق ذوزنقه کدام است؟



۱) ۲۰

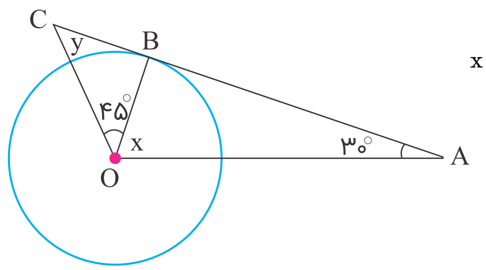
۲) ۲۵

۳) ۳۰

۴) ۳۵

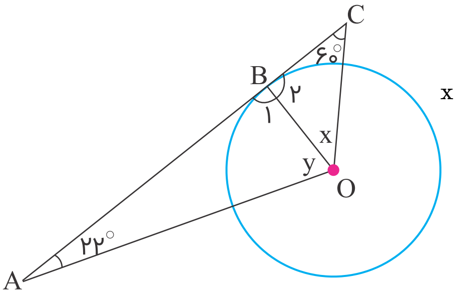
۹۵ اگر پاره خط AC مماس بر دایره باشد، اندازهٔ زاویه‌های خواسته‌شده در شکل‌های زیر را مشخص کنید.

الف



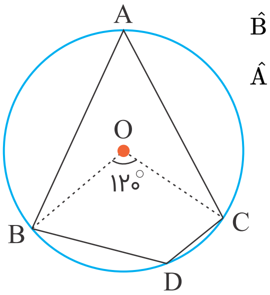
$x=?$ $\qquad y=?$

ب



$x = ?$ $y = ?$

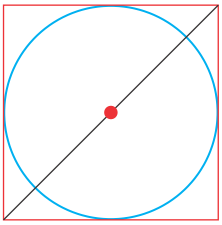
۹۶ باتوجه‌به شکل زیر، اندازهٔ زاویه‌ها و کمان‌های خواسته‌شده را به دست آورید.



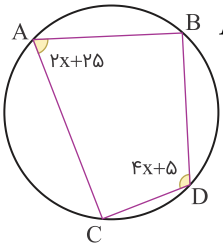
$\hat{B} + \hat{C} = ?$ $\widehat{BAC} = ?$

$\hat{A} = ?$ $\hat{D} = ?$

۹۷ در شکل زیر قطر مربع ۳۰ سانتی‌متر است. اگر دایره بر چهار ضلع مربع مماس باشد، شعاع دایره را مشخص کنید.

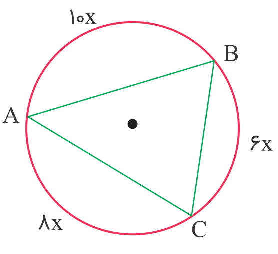


۹۸ باتوجه‌به شکل، مقدارهای خواسته‌شده را به دست آورید.

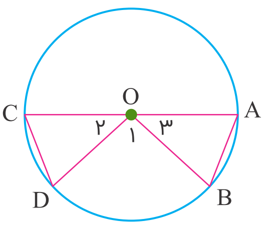


$\hat{A} = ?$ $\widehat{BAC} = ?$

۹۹ در شکل زیر، ابتدا مقدار x را مشخص کرده و سپس اندازهٔ زاویه‌ها و کمان‌ها را به دست آورید.

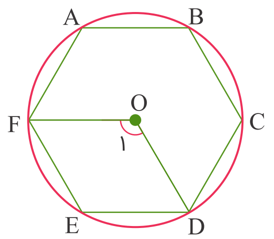


۱۰۰ در شکل زیر اندازهٔ وترهای AB و CD باهم مساوی است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{O}_1$ را مشخص کنید.

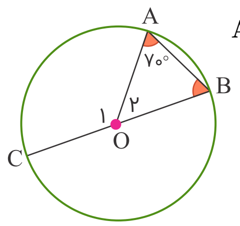


$\widehat{AB} = ۴۲°$

۱۰۱ شش ضلعی $ABCDEF$ منتظم است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{O}_1$ را حساب کنید.

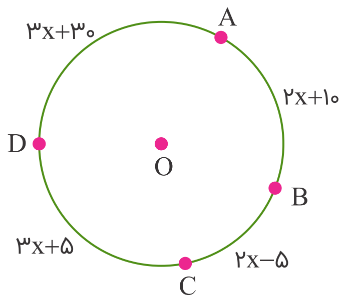


۱۰۲ اندازهٔ زاویه و کمان خواسته‌شده را به دست آورید.

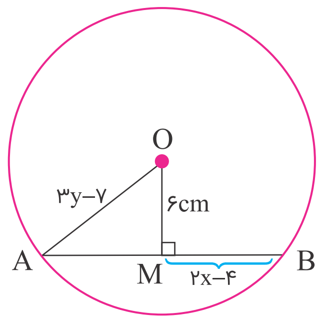


$\overset{\frown}{AC} = ?$ $\quad$ $\hat{O}_2 = ?$

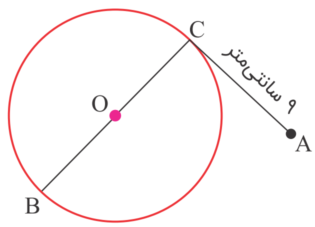
۱۰۳ در شکل زیر، اندازهٔ هریک از کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{DA}$ را مشخص کنید. (اندازهٔ کمان‌ها بر حسب x روی آن‌ها نوشته شده است)



۱۰۴ در شکل زیر، وتر AB برابر ۱۶ سانتی‌متر است. مقادیر x و y را بیابید.



۱۰۵ در شکل زیر AC بر دایره مماس است. فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ B را مشخص کنید. (شعاع دایره ۶ سانتی‌متر است)



۱

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{A}_۳=\hat{B}_۱=\hat{B}_۳\\ \hat{A}_۲=\hat{A}_۴=\hat{B}_۲=\hat{B}_۴\end{cases}$$

۲

گزینه ۴

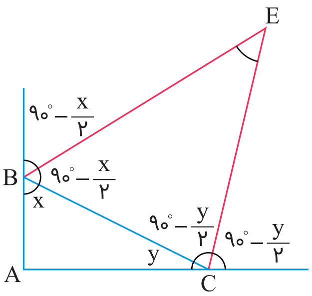
اگر اندازهٔ آن زاویه برابر با x درجه باشد، آنگاه مجموع بقیهٔ زاویه‌ها $۳x$ می‌شود. حال مجموع چهار زاویه را حساب می‌کنیم:

$$x+۳x=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۴x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۹۰^\circ$$

۳

گزینه ۲

اندازهٔ زوایای تشکیل‌شده به‌کمک نیمساز دو زاویه برابر با $۹۰^\circ-\frac{y}{۲}$ و $۹۰^\circ-\frac{x}{۲}$ خواهد بود. داریم:



$$\hat{A}+\hat{x}+\hat{y}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۹۰^\circ} \hat{x}+\hat{y}=۹۰^\circ$$

$$۹۰^\circ-\frac{\hat{x}}{۲}+۹۰^\circ-\frac{\hat{y}}{۲}+\hat{E}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{E}=\frac{\hat{x}}{۲}+\frac{\hat{y}}{۲}=\frac{\hat{x}+\hat{y}}{۲}=\frac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$

۴

گزینه ۳

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ=۱۹۸۰^\circ \Rightarrow n-۲=۱۱ \Rightarrow n=۱۳$$

چون n فرد است پس شکل مرکز تقارن ندارد، اما ۱۳ محور تقارن دارد.

۵

گزینه ۲

چون مثلث متساوی‌الاضلاع است و در یک ضلع با متوازی‌الاضلاع مشترک است و از آنجاکه اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع باهم برابرند، بنابراین دو ضلعی که اندازهٔ آن‌ها روی شکل مشخص شده‌اند، باهم برابرند، پس:

$$۵x-۷۵=۳x+۱۵ \Rightarrow ۲x=۹۰ \Rightarrow x=۴۵ \quad \text{واحد}$$

۶

الف

$$\vec{c}=-۲\vec{a}-۳\vec{b}$$

ب

$\vec{c} = ۴\vec{a} + \vec{b}$

۷ الف

$$\vec{x} - \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

ب

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix} + \vec{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

پ

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱۱ \end{bmatrix} + ۳\vec{x} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix} + \vec{x} \Rightarrow ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ \\ -۱۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

ت

$$\begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ \\ ۵ \end{bmatrix} + ۳\vec{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix} - ۲\vec{x} \Rightarrow ۵\vec{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۳ \\ ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow ۵\vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۲۰ \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$$

۸ الف

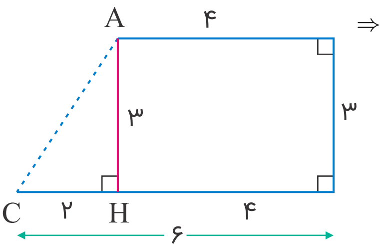
$$\begin{cases} \vec{a} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۵ \end{bmatrix} \\ \vec{b} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۱۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۷ \end{bmatrix} \\ \vec{c} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۱۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱۸ \\ ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲۴ \\ ۳۱ \end{bmatrix} \end{cases}$$

ب

$$\begin{cases} \vec{a} = ۴\vec{i} - ۲\vec{j} + ۳\vec{i} = \begin{bmatrix} ۷ \\ -۲ \end{bmatrix} \\ \vec{b} = \begin{bmatrix} ۲۱ \\ -۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۵ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۳ \end{bmatrix} \\ \vec{c} = ۲ \times (\begin{bmatrix} ۷ \\ -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱۶ \\ -۳ \end{bmatrix}) = ۲ \times \begin{bmatrix} -۹ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۸ \\ ۲ \end{bmatrix} \end{cases}$$

۹ الف

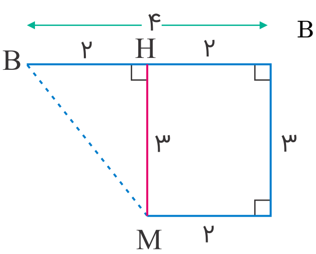
از نقطهٔ A بر نقطهٔ H عمود می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH تشکیل می‌شود.



$$\Rightarrow AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۹ + ۴ \Rightarrow AC = \sqrt{۱۳}$$

ب

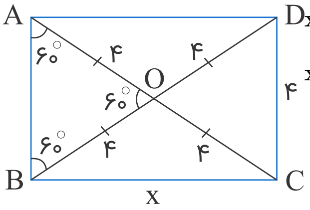
از نقطهٔ M بر H عمود می‌کنیم و مثلث MHB تشکیل می‌شود.



$$BM^۲ = MH^۲ + BH^۲ \Rightarrow BM^۲ = ۹ + ۴ \Rightarrow BM = \sqrt{۱۳}$$

۱۰ گزینه ۲

در مستطیل قطرها همدیگر را نصف می‌کنند؛ پس عرض مستطیل با نصف قطر در این شکل برابر است:



$$x^{2}+۴^{2}=۸^{2}\Rightarrow x^{2}+۱۶=۶۴$$

$$x^{2}=۶۴-۱۶=۴۸\Rightarrow x=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

$$\text{محیط}=۴+۴+۴\sqrt{۳}=۸+۴\sqrt{۳}$$

۱۱ گزینه ۱

در مثلث OHC داریم:

$$\hat{O}=۱۸۰-۹۰-۶۰=۳۰^{\circ}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ $\hat{O}=۳۰^{\circ}$ نصف وتر است؛ بنابراین داریم:

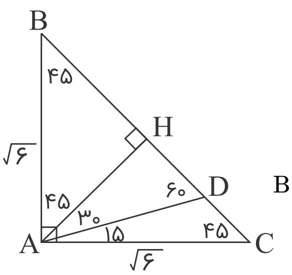
$$OH=۲CH\Rightarrow OH=۲\times ۱=۲$$

$$OT^{۲}=(\sqrt{۵})^{۲}+۲^{۲}=۵+۴=۹\Rightarrow OT=۳\Rightarrow OD=۳$$

$$OH^{۲}=OC^{۲}+CH^{۲}\Rightarrow ۴=OC^{۲}+۱\Rightarrow OC=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow CD=۳-\sqrt{۳}$$

۱۲



مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

همچنین $B\overset{\triangle}{H}A$ نیز متساوی‌الساقین است، پس $BH=AH$. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABH داریم:

$$BH^{۲}+AH^{۲}=AB^{۲}\Rightarrow ۲AH^{۲}=۶\Rightarrow AH=\sqrt{۳}$$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° برابر است با نصف وتر.

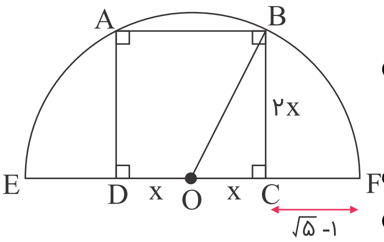
نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر.

در مثلث $A\overset{\triangle}{H}D$ داریم:

$$\text{ضلع روبه‌رو به زاویهٔ } ۶۰^{\circ}\quad AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD\Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD\Rightarrow AD=۲$$

$$\text{ضلع روبه‌رو به زاویهٔ } ۳۰^{\circ}\quad HD=\frac{۱}{۲}AD=۱$$

۱۳ از O به B وصل می‌کنیم تا یک مثلث قائم الزاویه ایجاد شود که وتر آن شعاع دایره نیز می‌باشد:



$$O\overset{\triangle}{B}C\ \text{در}:\ OB^{۲}=x^{۲}+(۲x)^{۲}=x^{۲}+۴x^{۲}$$

$$\Rightarrow OB=\sqrt{۵x^{۲}}=\sqrt{۵}x$$

$$\text{طبق شکل}:\ OF=OC+CF=x+\sqrt{۵}-۱$$

$$OB=OF\Rightarrow \sqrt{۵}x=x+\sqrt{۵}-۱\Rightarrow \sqrt{۵}x-x=\sqrt{۵}-۱$$

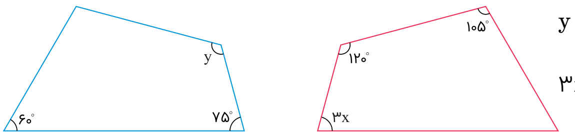
$$\Rightarrow x(\sqrt{۵}-۱)=\sqrt{۵}-۱\Rightarrow x=۱$$

$$\text{مساحت مربع}=۲x\times ۲x=۴x^{۲}\xrightarrow{x=۱}\text{مساحت مربع}=۴$$

۱۴

گزینه ۳

باتوجه‌به اجزای متناظر دو شکل داریم:



$y = ۱۲۰^\circ$

$۳x = ۷۵^\circ \Rightarrow x = \frac{۷۵^\circ}{۳} = ۲۵^\circ$

۱۵

گزینه ۴

باتوجه‌به برابری اجزای متناظر دو شکل همنهشت، داریم:

$۲x - ۷۰^\circ = x \Rightarrow x = ۷۰^\circ$

$۶y = ۵y + ۱ \Rightarrow y = ۱ \quad (۱)$

$z = ۷ \quad (۲)$

$M = ۶y - ۲ \xrightarrow{(۱)} M = ۴$

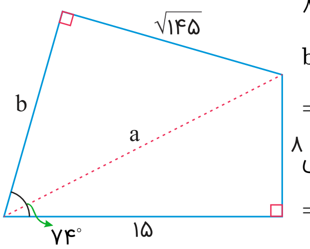
$N = z - ۵ \xrightarrow{(۲)} N = ۲$

$P = \frac{y + z + M + N - ۲}{۴} \Rightarrow P = \frac{۱ + ۷ + ۴ + ۲ - ۲}{۴} \Rightarrow P = ۳$

$\Rightarrow x + y + z + M + N + P = ۷۰ + ۱ + ۷ + ۴ + ۲ + ۳ = ۸۷$

۱۶

گزینه ۲



$۸^۲ + ۱۵^۲ = a^۲ \Rightarrow ۶۴ + ۲۲۵ = a^۲ \Rightarrow ۲۸۹ = a^۲ \Rightarrow a = ۱۷$

$b^۲ + ۱۴۵ = ۲۸۹ \Rightarrow b^۲ = ۲۸۹ - ۱۴۵ \Rightarrow b^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow b = ۱۲$

$\Rightarrow b = ۲y + ۲ \Rightarrow ۱۲ = ۲y + ۲ \Rightarrow ۲y = ۱۰ \Rightarrow y = ۵$

مجموع زوایای داخلی ۴ ضلعی : $۳۶۰ = ۷۴ + ۹۰ + ۹۰ + x$

$\Rightarrow ۳۶۰ = ۲۵۴ + x \Rightarrow x = ۱۰۶$

$\Rightarrow x + y = ۱۰۶ + ۵ = ۱۱۱$

۱۷

گزینه ۱

باتوجه‌به همنهشتی دو شکل، داریم:

$\hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow ۲a - ۱۵ = a + ۱۰ \Rightarrow a = ۲۵^\circ$

$\Rightarrow \hat{C} = \hat{C}' = a + ۱۰^\circ = ۳۵^\circ$

$\Rightarrow A\hat{D}C = ۳۶۰^\circ - (۹۰^\circ + ۱۱۵^\circ + ۳۵^\circ) = ۱۲۰^\circ$

۱۸

گزینه ۳

تمام شکل‌هایی که می‌توانند بر هم منطبق شوند را به ترتیب نام می‌بریم:

$A\overset{\Delta}{E}D \cong D\overset{\Delta}{G}C \text{ , } EF\overset{\Delta}{}D \cong GF\overset{\Delta}{}D \text{ , } A\overset{\Delta}{B}D \cong D\overset{\Delta}{B}C$

$F\overset{\Delta}{E}B \cong F\overset{\Delta}{G}B \text{ , } D\overset{\Delta}{E}B \cong D\overset{\Delta}{G}B \text{ , } AEFD \cong CGFD$

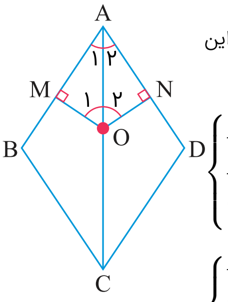
پس ۶ جفت شکل همنهشت در تصویر دیده می‌شود.

۱۹ گزینه ۴

می‌دانیم در لوزی قطرها نیمساز هستند، پس: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

ازطرفی $\hat{M} = \hat{N} = ۹۰^\circ$ پس: $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است، پس $MO = NO$ علاوه بر حالت فوق به شکل زیر نیز می‌توان این همنهشتی را ثابت کرد.

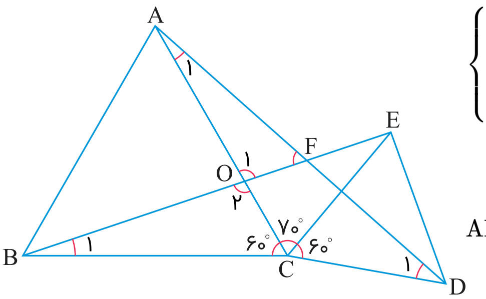


$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ AO = AO \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{AOM} \cong \overset{\triangle}{AON}$$

$$\begin{cases} AO = AO \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ MO = NO \end{cases} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{AOM} \cong \overset{\triangle}{AON}$$

۲۰ گزینه ۴

ازآنجاکه دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ECD}$ متساوی‌الاضلاع هستند و باتوجه‌به شکل زیر داریم:



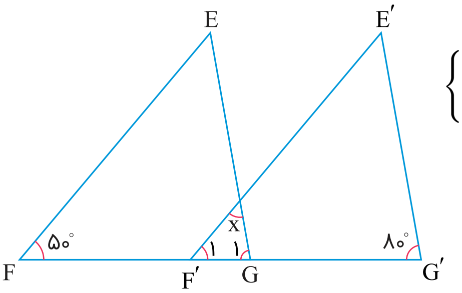
$$\begin{cases} \overline{DC} = \overline{EC} \\ \overline{AC} = \overline{BC} \\ B\hat{C}E = D\hat{C}A = ۱۳۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ACD} \cong \overset{\triangle}{ECB} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ \quad (۱)$$

باتوجه‌به اینکه دو زاویه $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ در مثلث $\overset{\triangle}{AOF}$ و $\overset{\triangle}{COB}$ برابرند و رابطه (۱) داریم:

$$A\hat{F}B = A\hat{C}B = ۶۰^\circ$$

۲۱ گزینه ۱

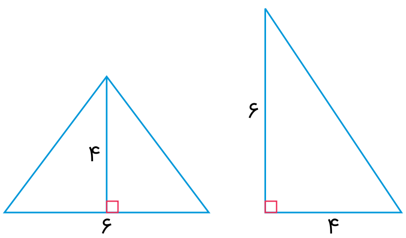
باتوجه‌به همنهشتی دو مثلث و طبق اجزای متناظر داریم:



$$\begin{cases} \hat{F'}_۱ = \hat{F} = ۵۰^\circ \\ \hat{G}_۱ = \hat{G'} = ۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - \overbrace{(۵۰^\circ + ۸۰^\circ)}^{۱۳۰^\circ} = ۵۰^\circ$$

۲۲ گزینه ۲

بررسی گزینه ۱: دو مثلث همنهشت مساحت برابر دارند ولی دو مثلث با مساحت برابر الزاماً همنهشت نیستند. به شکل زیر دقت کنید.



بررسی گزینه ۳: شرط همنهشتی برابری زاویه‌هاست، پس مثلث متساوی‌الاضلاع با زاویه‌های داخلی ۶۰° هیچ‌وقت نمی‌تواند با مثلث قائم‌الزاویه که یک زاویه ۹۰° دارد برابر باشد.

بررسی گزینه ۴: مثلث قائم‌الزاویه به شرط برابری اضلاع قائمه، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین می‌شود پس می‌تواند با مثلث متساوی‌الساقین دیگری برابر باشد.

۲۳

گزینه ۱

ابتدا به سراغ هم‌نهشتی دو مثلث موجود می‌رویم:

$$\begin{cases} \hat{M} \quad \text{مشترک} \\ MG = MH \\ AM = BM \end{cases} \xrightarrow{\text{ضزض}} B\overset{\Delta}{M}H \cong A\overset{\Delta}{M}G \Rightarrow AG = BH = ۸۸$$

۲۴

گزینه ۲

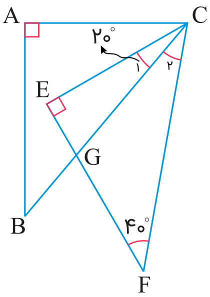
$$\hat{E} + \hat{F} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$۹۰^\circ + ۴۰^\circ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ$$

$$\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۵۰^\circ \Rightarrow ۲۰^\circ + \hat{C}_۲ = ۵۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۲ = ۵۰^\circ - ۲۰^\circ = ۳۰^\circ$$

$$\hat{C}_۲ + \hat{G} + \hat{F} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳۰^\circ + \hat{G} + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{G} = ۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۱۰^\circ$$



۲۵

گزینه ۲

$$\begin{cases} \text{شعاع دایرهٔ کوچک} : \overline{OB} = \overline{OC} \\ \text{شعاع دایرهٔ بزرگ} : \overline{OA} = \overline{OD} \\ \text{متقابل به رأس} : A\hat{O}B = D\hat{O}C \end{cases} \xrightarrow{\text{ضزض}} O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{C}D$$

۲۶

گزینه ۴

$$AD = DC \Rightarrow AD + GA = DC + DF \Rightarrow DG = CF$$

$$\begin{cases} DG = CF \\ \hat{D} = \hat{C} = ۹۰^\circ \\ DF = CE \end{cases} \Rightarrow D\overset{\Delta}{G}F \cong C\overset{\Delta}{E}F \Rightarrow \hat{G} = \hat{F}_۱$$

$$\hat{F}_۱ + \hat{F}_۲ = \hat{G} + \hat{F}_۲ = ۱۸۰^\circ - \hat{D} = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

۲۷

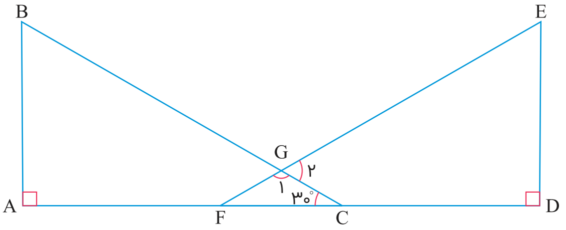
گزینه ۲

$$\hat{C} = \hat{F} = ۳۰^\circ$$

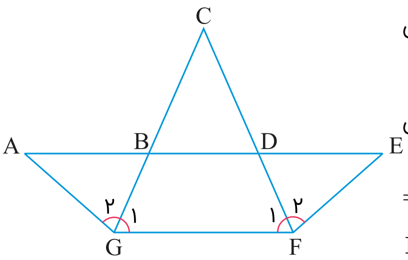
$$\hat{C} + \hat{F} + \hat{G}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳۰^\circ + ۳۰^\circ + \hat{G}_۱ = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{G}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

$$\hat{G}_۱ + \hat{G}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰^\circ + \hat{G}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{G}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$



۲۸ گزینه ۳



ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $AGFE \Rightarrow \begin{cases} EF = AG \\ A\hat{G}F = E\hat{F}G \end{cases}$ (۱)

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $BDFG \Rightarrow \begin{cases} BG = FD \\ \hat{F}_۱ = \hat{G}_۱ \end{cases}$ (۲)

$\Rightarrow (۱),(۲) \hat{F}_۲ = \hat{G}_۲$

$$\left.\begin{array}{l} EF = AG \\ BG = FD \\ \hat{G}_۲ = \hat{F}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضزض}} \overset{\triangle}{ABG} \cong \overset{\triangle}{DEF}$$

۲۹ گزینه ۳

$\overset{\triangle}{DNC} \cong \overset{\triangle}{AMB} \quad \overset{\triangle}{CMB} \cong \overset{\triangle}{DNA} \quad \overset{\triangle}{CMN} \cong \overset{\triangle}{ANM}$

$\overset{\triangle}{CNB} \cong \overset{\triangle}{AMD} \quad \overset{\triangle}{DCM} \cong \overset{\triangle}{ANB} \quad \overset{\triangle}{BDC} \cong \overset{\triangle}{ABD}$

۳۰ گزینه ۱

$$\begin{cases} AP = AP \\ AB = AC \\ P\hat{A}C = P\hat{A}B \end{cases} \xrightarrow{\text{ضزض}} P\overset{\triangle}{A}C \cong P\overset{\triangle}{A}B$$

$\Rightarrow A\hat{P}C = A\hat{P}B = ۱۱۰^\circ$

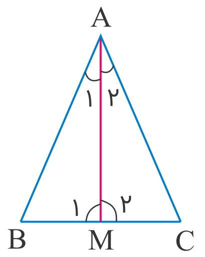
$BP = CP \Rightarrow P\hat{B}C = P\hat{C}B$

ازطرفی $A\hat{P}C + A\hat{P}B + B\hat{P}C = ۳۶۰^\circ$ درنتیجه:

$B\hat{P}C = ۳۶۰^\circ - (۱۱۰^\circ + ۱۱۰^\circ) = ۳۶۰^\circ - ۲۲۰^\circ = ۱۴۰^\circ$

$\Rightarrow ۲P\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ \Rightarrow P\hat{B}C = ۲۰^\circ$

۳۱ ابتدا به بررسی فرض و اطلاعات مسئله می‌پردازیم:



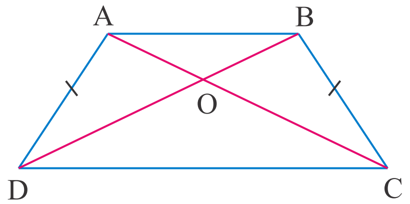
مثلث متساوی‌الساقین است $\Leftarrow AB = AC$

AM میانه است $\Leftarrow BM = MC$

اگر بتوانیم اثبات کنیم که دو مثلث ABM و ACM باهم همنهشت هستند، می‌توانیم حکم را نتیجه بگیریم که $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ BM = MC \\ AM = AM \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ACM} \Rightarrow \text{اجزای متناظر :} \begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases}$$

۳۲



فرض : $AD = BC$

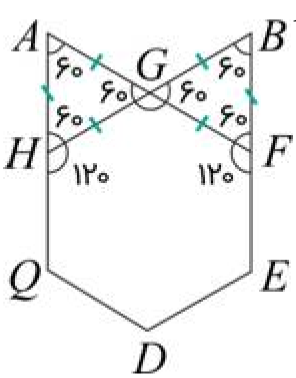
حکم : $AC = BD$

$$\left.\begin{array}{l} \text{فرض سؤال :} \ AD = BC \\ \text{مشترک :} \ AB = AB \\ \text{فرض :} \ \hat{A} = \hat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \text{اجزای متناظر :} \begin{cases} BD = AC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{cases}$$

۳۳ $AB = AD$ و $BM = DN$ و زاویه B مساوی با زاویه D درنتیجه دو مثلث به حالت ض.ز.ض همنهشت هستند. (هر مورد ۰/۲۵ نمره)

۳۴ گزینه ۴

ازآنجایی‌که هر زاویهٔ داخلی در شش ضلعی منتظم برابر با ۱۲۰° و ضلع‌ها باهم برابر هستند؛ بنابراین مثلث‌های GBF و AHG متساوی‌الاضلاع بوده و بنا بر هر سه حالت می‌توان تساوی آن‌ها را اثبات کرد.



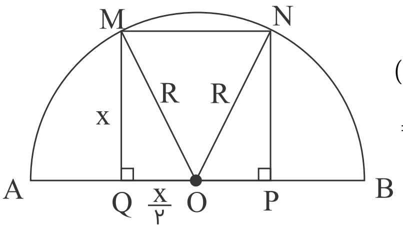
۳۵

در مثلث $\overset{\Delta}{OPN}$ و $\overset{\Delta}{OQM}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} QM = NP \\ OM = ON \\ \hat{P} = \hat{Q} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه}} \overset{\Delta}{OQM} \cong \overset{\Delta}{OPN}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} OQ = OP = \frac{x}{۲}$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OQM داریم:

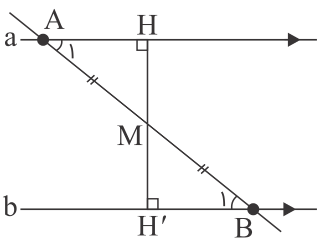


$$\left(\frac{x}{۲}\right)^۲ + x^۲ = R^۲ \Rightarrow \frac{x^۲ + ۴x^۲}{۴} = R^۲ \Rightarrow \frac{۵x^۲}{۴} = R^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۴}{۵}R^۲ \text{ مساحت مربع}$$

۳۶

باتوجه‌به مفروضات مسئله، شکل به‌صورت زیر است:



$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{MB} \\ a \| b \text{ ، مورب } AB \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \\ H = H' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ تند}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{MH'B}$$

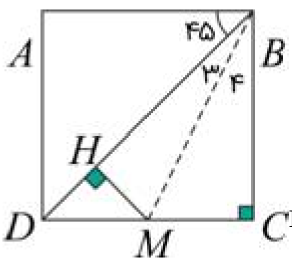
۳۷

گزینه ۴

DB قطر مربع و نیمساز زوایا است، پس:

$$B_۱ = B_۲ = ۴۵$$

ازطرفی داریم:



$$\left.\begin{array}{l} BH = BC \\ BM = BM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{BHM} \cong \overset{\Delta}{BCM}$$

پس:

$$B_۳ = B_۴ = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵ \Rightarrow H\hat{M}B = ۹۰ - ۲۲/۵ = ۶۷/۵$$

۳۸

گزینه ۲

- هر دو مستطیل دلخواه متشابه نیستند.
- دو مثلث متساوی‌الساقین که یک رأس قائمه دارند به حالت سه ضلع متشابه هستند.
- دو مثلث متشابه، ممکن است همنهشت نباشند.
- چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.

۳۹

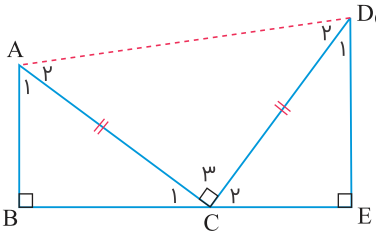
گزینه ۴

همهٔ حالت‌ها را می‌توان استفاده کرد ولی حالت سه ضلع امکان ندارد.

۴۰

گزینه ۴

از A به D وصل می‌کنیم:



$$\hat{C}_۳ = ۹۰ \Rightarrow C_۱ + C_۲ = ۹۰ \quad (*)$$

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC}: A_۱ + C_۱ = ۹۰ \\ \overset{\triangle}{CED}: D_۱ + C_۲ = ۹۰ \end{cases} \xrightarrow{+} A_۱ + D_۱ + (C_۱ + C_۲) = ۱۸۰$$

$$\xrightarrow{(*)} A_۱ + D_۱ = ۹۰$$

$$\begin{cases} A_۱ + C_۱ = ۹۰ \\ A_۱ + D_۱ = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow C_۱ = D_۱$$

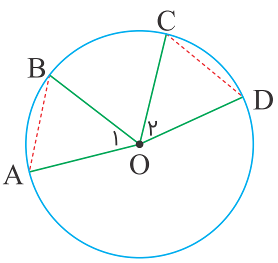
به طریق مشابه $A_۱ = C_۲$، بنابراین دو مثلث به حالت‌های زیر هم‌نهشت‌اند:

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۲ \\ C_۱ = D_۱ \\ AC = DC \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{CED}$$

$$\begin{cases} AC = CD \\ C_۱ = D_۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ تند}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{CED}$$

۴۱

گزینه ۴



فرض کنید کمان $\overset{\frown}{AB}$ با کمان $\overset{\frown}{CD}$ برابر باشد. در دایره، اندازهٔ هر کمان با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن برابر است، پس: $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

ازطرفی $OD = OC = OB = OA$ شعاع‌های دایره باهم برابرند. درنتیجه دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OCD}$ به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین باهم هم‌نهشت هستند.

ازطرفی در دایره اگر اندازهٔ دو کمان برابر باشد، اندازهٔ دو وتر نظیر هم برابر است، پس: $AB = CD$، پس دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OCD}$ به حالت سه ضلع نیز هم‌نهشت هستند.

۴۲

حکم: $\overline{MN} = \overline{PQ}$

فرض:

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\overline{AB} = \frac{۱}{۲}\overline{DC} \Rightarrow \overline{MB} = \overline{DP}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\overline{AD} = \frac{۱}{۲}\overline{BC} \Rightarrow \overline{QD} = \overline{BN}$$

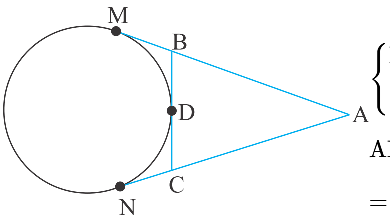
اثبات:

$$\left.\begin{matrix} \overline{MB} = \overline{DP} \\ \overline{BN} = \overline{QD} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{BMN} \cong \overset{\triangle}{QPD} \Rightarrow \overline{MN} = \overline{QP}$$

۴۳

گزینه ۲

چون از نقطهٔ A مماس بر دایره رسم شده است، پس $AM = AN$ می‌باشد. ازطرفی از نقاط B و C هم بر دایره مماس‌هایی داریم:



$$\begin{cases} BD = BM \\ CD = CN \end{cases}$$

$$\text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC = AB + AC + BD + DC$$

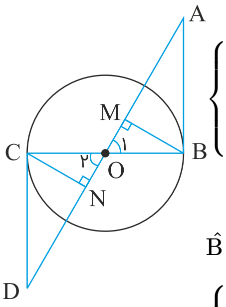
$$= AB + BD + AC + CD = AB + BM + AC + CN$$

$$= AM + AN = ۲AM = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$$

۴۴

گزینه ۳

باتوجه‌به شکل زیر داریم:



$$\begin{cases} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \text{ متقابل به رأس} \\ OB = OC \text{ شعاع} \\ \hat{M} = \hat{N} = ۹۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه}} \overset{\Delta}{OMB} \cong \overset{\Delta}{ONC}$$

می‌دانیم که شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، بنابراین:

$$\hat{B} = \hat{C} = ۹۰^\circ$$

$$\begin{cases} OB = OC \text{ شعاع} \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \text{ متقابل به رأس} \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{دو زاویه و ضلع بین}} \overset{\Delta}{OBA} \cong \overset{\Delta}{OCD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ AB = CD \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و زاویه حاده}} M\overset{\Delta}{B}A \cong N\overset{\Delta}{D}C$$

درنتیجه سه جفت مثلث هم‌نهشت داریم.

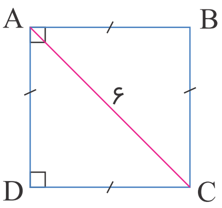
۴۵

گزینه ۳

مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a از رابطهٔ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ به دست می‌آید، پس:

$$S_{\text{شش ضلعی}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۲})^۲ = ۳\sqrt{۳}$$

همچنین مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC، نصف مساحت مربع $ABCD$ است. ازطرفی مساحت مربع برابر است با:



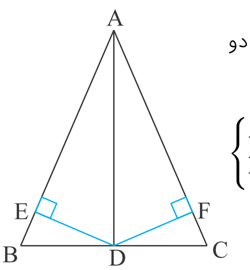
$$S_{\text{مربع}} = \frac{(\text{قطر})^۲}{۲} = \frac{۶^۲}{۲} = ۱۸$$

پس مساحت مثلث برابر با ۹ است. حال داریم:

$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{\text{مثلث}}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۹} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۴۶

گزینه ۳



می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله است. پس اگر AD نیمساز زاویهٔ A باشد، $DE = DF$ می‌شود. ازطرفی دو مثلث ADE و ADF قائم‌الزاویه هستند و داریم:

$$\begin{cases} AD = AD & \text{ضلع مشترک} \\ DE = DF \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{ADF}$$

با فرض گرفتن سایر گزینه‌ها نمی‌توان نتیجه گرفت دو مثلث همنهشت هستند. پس گزینهٔ ۳ صحیح است.

۴۷

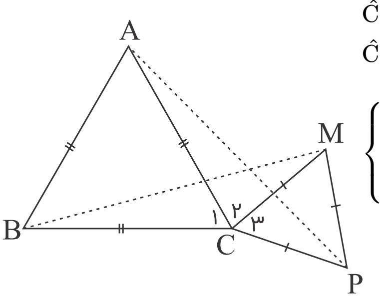
گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{ll} B\hat{D}C = B\hat{A}C = ۹۰^\circ & \text{قائمه} \\ BC & \text{مشترک} \\ D\hat{B}C = A\hat{C}B = ۲۵^\circ & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وز}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{BDC}$$

$$\left.\begin{array}{ll} A\hat{B}C = D\hat{C}B = ۶۵^\circ & \\ BC & \text{مشترک} \\ D\hat{B}C = A\hat{C}B = ۲۵^\circ & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{BDC}$$

همچنین ازآنجاکه دو کمان AB و DC برابرند، وترهای نظیرشان با یکدیگر مساوی می‌شوند، بنابراین $AB = DC$. پس دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع قائمهٔ نیز همنهشت می‌شوند.

۴۸



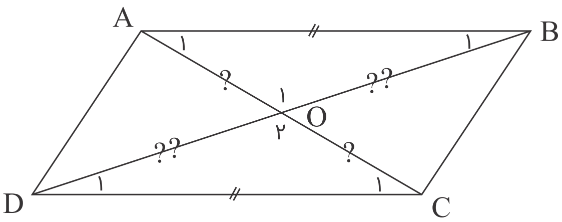
$$\hat{C}_۱ = \hat{C}_۳ = ۶۰^\circ$$

$$\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = \hat{C}_۳ + \hat{C}_۲$$

$$\begin{cases} BC = AC & \text{فرض مسئله} \\ CM = CP & \text{فرض مسئله} \\ \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = \hat{C}_۳ + \hat{C}_۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{BCM} \cong \overset{\Delta}{ACP} \Rightarrow BM = AP$$

۴۹

متوازی‌الاضلاعی رسم می‌کنیم و قطرهای آن را می‌کشیم:



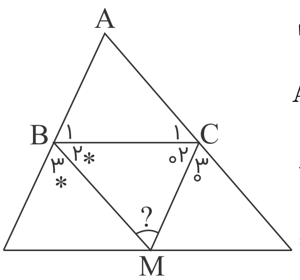
فرض: $ABCD$ متوازی الاضلاع

حکم: $OA = OC\ ,\ OB = OD$

$$\left.\begin{array}{l} AB = CD\ \ (\text{اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع}) \\ \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱\ \ (AB \parallel CD\ ,\ \text{مورب } AC) \\ \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱\ \ (AB \parallel CD\ ,\ \text{مورب } BD) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{cases}$$

۵۰



$$\text{حکم} : \hat{M} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰ - \hat{A}$$

$$\begin{cases} \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ + \hat{B}_۳ = ۱۸۰ \\ \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ + \hat{C}_۳ = ۱۸۰ \end{cases} \xrightarrow{+} \underbrace{\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱}_{۱۸۰ - \hat{A}} + \hat{B}_۲ + \hat{C}_۲ + \underbrace{\hat{B}_۳}_{\hat{B}_۲} + \underbrace{\hat{C}_۳}_{\hat{C}_۲} = ۳۶۰$$

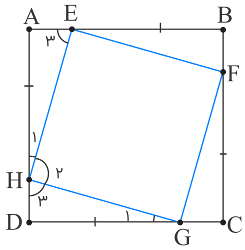
$$\Rightarrow ۲\hat{B}_۲ + ۲\hat{C}_۲ = ۳۶۰ - ۱۸۰ + \hat{A}$$

$$۲(\hat{B}_۲ + \hat{C}_۲) = ۱۸۰ + \hat{A} \xrightarrow{\div ۲} \hat{B}_۲ + \hat{C}_۲ = \frac{۱۸۰ + \hat{A}}{۲} = ۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\hat{M} + \underbrace{\hat{B}_۲ + \hat{C}_۲}_{۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲}} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{M} = ۱۸۰ - ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{M} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

۵۱

گزینه ۲



ابتدا ثابت می‌کنیم که چهار ضلع برابر هستند. در مربع ABC اضلاع برابر است و نیز قسمت‌های مشخص‌شده نیز با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} AB &= AD \\ EB &= AH \end{aligned}\right\} \Rightarrow AE = HD$$

پس اضلاع کوچک‌تر مثلث‌ها نیز باهم برابرند.

حال نشان می‌دهیم مثلث‌ها نیز باهم همنهشت‌اند:

$$\left.\begin{array}{ll} AE = HD & \text{رابطهٔ قبل} \\ \hat{A} = \hat{D} = ۹۰^\circ & \text{قائمه} \\ AH = DG & \text{فرض} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\overset{\Delta}{E}H \cong H\overset{\Delta}{D}G \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} EH = HG \\ \hat{H}_۱ = \hat{G}_۱ \\ \hat{H}_۳ = \hat{E}_۳ \end{array}\right.$$

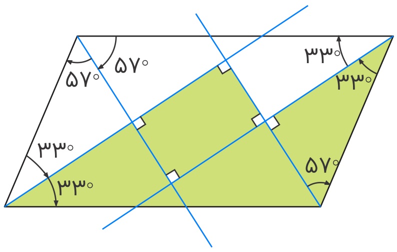
و مانند همین برای دو مثلث دیگر برقرار است. درنتیجه هر چهار مثلث همنهشت و اضلاع و زوایای متناظرشان برابر هستند. حالا باید ثابت کنیم که تمام زوایای این لوزی ۹۰ درجه و اضلاع دوبه‌دو موازی هستند:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \hat{H}_۳ + \hat{G}_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{H}_۱ = \hat{G}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{H}_۳ + \hat{H}_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{H}_۱ + \hat{H}_۲ + \hat{H}_۳ = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{H}_۲ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$$

پس تمام زوایای چهار ضلعی ۹۰ درجه است و اضلاع دوبه‌دو موازی (دو ضلع عمود بر یک ضلع باهم موازی‌اند) هستند.

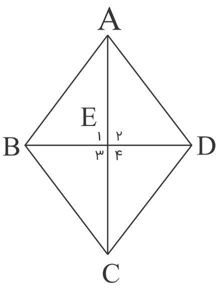
۵۲

گزینه ۴



مجموعهٔ دو زاویهٔ داخلی مجاور در متوازی‌الاضلاع برابر ۱۸۰ درجه است و اگر هر دو زاویه نصف شود، مجموع نصف‌های آن‌ها برابر ۹۰ درجه می‌شود. همچنین می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، درنتیجه زاویهٔ سوم در مثلث مشخص‌شدهٔ شکل بالا برابر ۹۰ می‌باشد و چون با زاویهٔ چهار ضلعی داخلی متقابل به رأس است، زاویهٔ چهار ضلعی داخلی نیز ۹۰ درجه خواهد شد. به همین ترتیب برای مثلث پایینی هم زاویهٔ ۹۰ درجه ایجاد می‌شود. پس هر ۴ زاویهٔ چهار ضلعی قائمه‌اند، درنتیجه شکل حاصل مستطیل است.

۵۳



استدلال:

$$\left.\begin{array}{l} AE \text{ مشترک} \\ \hat{E}_1=\hat{E}_1=۹۰^\circ \text{ فرض مسئله} \\ BE=DE \text{ فرض مسئله}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ضزض)}} \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{ABE} \Rightarrow AB=AD$$

$$\left.\begin{array}{l} BE \text{ مشترک} \\ \hat{E}_1=\hat{E}_۳=۹۰^\circ \text{ فرض مسئله} \\ AE=CE \text{ فرض مسئله}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ضزض)}} \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{CBE} \Rightarrow AB=BC$$

به همین شکل ضلع چهارم هم با سه ضلع دیگر برابر است درنتیجه شکل موردنظر لوزی است.

۵۴

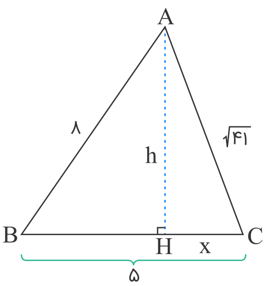
گزینه ۱

روش اول:

نکته ۱: بزرگ‌ترین ارتفاع، ارتفاع وارد بر کوچک‌ترین قاعده می‌باشد.

نکته ۲: می‌دانیم اگر در مثلثی به اضلاع a, b, c رابطهٔ $a^۲ < b^۲ + c^۲$ برقرار باشد، تمامی زوایای مثلث حاده هستند.

حال چون $۸^۲ < \left(\sqrt{۴۱}\right)^۲ + ۵^۲$ است، پس زاویه‌های مثلث حاده هستند.



باتوجه‌به شکل ارتفاع عددی بین $\sqrt{۴۱}$ و ۸ می‌باشد که به $\sqrt{۴۱}$ نزدیک‌تر است. در بین گزینه‌ها ۶/۴ و ۷/۲ بین $\sqrt{۴۱}$ و ۸ است که ۶/۴ نزدیک به $\sqrt{۴۱}$ می‌باشد.

روش دوم:

$$\overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow x^۲+h^۲=\left(\sqrt{۴۱}\right)^۲ \Rightarrow x^۲+h^۲=۴۱ \Rightarrow h^۲=۴۱-x^۲ \qquad (۱)$$
$$\overset{\Delta}{HBC} \Rightarrow (۵-x)^۲+h^۲=۶۴ \Rightarrow h^۲=۶۴-(۵-x)^۲=۶۴-۲۵-x^۲+۱۰x \qquad (۲)$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow ۴۱-x^۲=۳۹-x^۲+۱۰x \Rightarrow ۲=۱۰x \Rightarrow x=۰/۲$$
$$h^۲=۴۱-(۰/۲)^۲ \Rightarrow h^۲=۴۰/۹۶ \Rightarrow h=\sqrt{۴۰/۹۶} \simeq ۶/۴$$

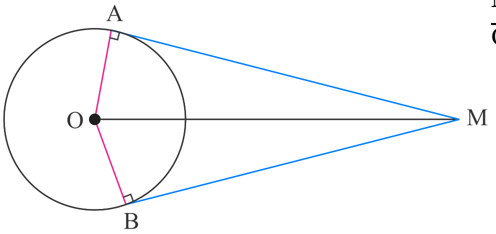
۵۵

$$\left.\begin{array}{l} d \text{ از وسط } AB \text{ می‌گذرد} : OA=OB \\ \text{فاصلهٔ دو نقطهٔ } A \text{ و } B \text{ از خط } d \text{ به یک فاصله است} : AH=BH' \\ H=H'=۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وض}} \overset{\Delta}{OHA} \cong \overset{\Delta}{OH'B} \Rightarrow OH=OH'$$

۵۶

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC} \text{ نیمساز زاویهٔ } A : \hat{A}_1=\hat{A}_۲ \\ \text{فرض مسئله} : \overline{AB}=\overline{AD} \\ \text{اشتراک} : AC=AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض.ز.ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \overline{BC}=\overline{DC}$$

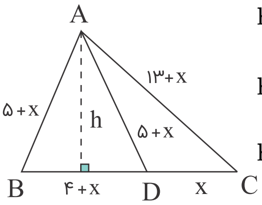
۵۷



$$\left.\begin{array}{l}\overline{MO}=\overline{MO}\\ \overline{OA}=\overline{OB}\end{array}\right\}\Rightarrow O\overset{\Delta}{B}M\cong O\overset{\Delta}{A}M\ (\text{وض})\Rightarrow \overline{AM}=\overline{BM}$$

۵۸

گزینه ۴



$$h^2=(5+x)^2-\left(\frac{4+x}{2}\right)^2\Rightarrow h^2=25+x^2+10x-4-\frac{x^2}{4}-2x$$

$$h^2=(13+x)^2-\left(x+\frac{4+x}{2}\right)^2\Rightarrow h^2=169+x^2+26x-\frac{9x^2}{4}-4-6x$$

$$h^2=h^2\Rightarrow 25+x^2+10x-4-\frac{x^2}{4}-2x=169+x^2+26x-\frac{9x^2}{4}-4-6x$$

$$\Rightarrow 2x^2-12x-144=0\Rightarrow x^2-6x-72=0\Rightarrow (x+6)(x-12)=0\Rightarrow x=12$$

۵۹

گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{y}+\hat{B}=180\\ \hat{x}+\hat{y}+\hat{B}=180\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{x}=\hat{A}$$

$$\hat{x}+\hat{y}+\hat{B}=180\Rightarrow \hat{B}=180-(\hat{x}+\hat{y})$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{x}{180-(x+y)}$$

۶۰

گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: می‌توان ضلع‌های AD و DC از مثلث ADC و ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC را به عنوان اضلاع مربع مساوی در نظر گرفت. همچنین زاویه‌های B و D نیز قائمه‌اند، پس حالت (ض‌زض) صحیح است.

گزینه ۲: قطر AC برای دو مثلث وتر مشترک است. همچنین زاویه‌های D و B نیز قائمه‌اند. می‌توان اضلاع DC و AB را به عنوان اضلاع مربع مساوی در نظر گرفت، پس حالت وتر و یک ضلع نیز صحیح است.

گزینهٔ ۳: حالت (زض‌ز) برای همنهشتی دو مثلث نادرست است.

گزینهٔ ۴: در اینجا هم AD=BC و AB=DC است. همچنین ضلع AC نیز بین دو مثلث مشترک است، پس حالت (ض‌ض‌ض) صحیح است.

۶۱

گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: اگر $AB \| CD$ باشد، بنابراین BC مورب بوده و زاویهٔ C با B برابر می‌شوند. باتوجه‌به اینکه OC و OB شعاع‌های دایره بوده و باهم برابرند، دو مثلث به حالت (زض‌ز) برابر می‌شوند.

گزینه ۲: اگر $\overline{AB}=\overline{CD}$ باشد، چون $OC=OB$ و $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ هستند، دو مثلث دارای دو ضلع برابر بوده ولی زاویه‌های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ بین این دو ضلع نیستند و استدلال کافی برای همنهشتی دو مثلث وجود ندارد.

گزینهٔ ۳: اگر $\hat{A}=\hat{D}$ باشد، باتوجه‌به اینکه $\hat{O}_2=\hat{O}_1$ است، پس زاویهٔ سوم دو مثلث نیز باهم برابرند، پس $\hat{C}=\hat{B}$ می‌شود و همانند استدلال قبلی دو مثلث به حالت (زض‌ز) همنهشت می‌شوند

گزینه ۴: اگر $OA=OD$ باشد، با توجه به تساوی $BO=OC$ و $\hat{O}_2=\hat{O}_1$، دو مثلث به حالت (ض‌زض) برابر می‌شوند.

.

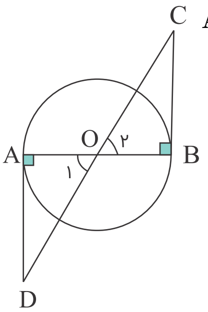
۶۲

الف

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ OA = OB \\ \cancel{\hat{O}_1 = \hat{O}_1}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} OM = OM \\ OA = OB \\ \underbrace{\hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ}_{\text{۰/۵ نمره}}\end{array}\right\} \xrightarrow{\overbrace{\text{وتر و یک ضلع}}^{\text{۰/۵ نمره}}\ \cancel{\text{(ض.ز.ض)}}} O\overset{\Delta}{A}M \cong O\overset{\Delta}{B}M$$

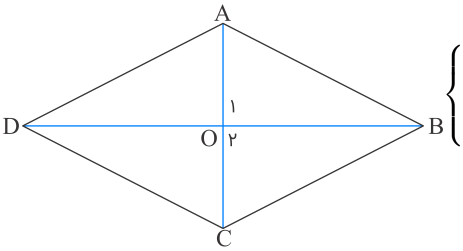
ب بله (۰/۲۵)، زیرا تمام ویژگی‌هایی که در استدلال به کار برده‌ایم برای هر نقطهٔ دیگر نیز درست است. (۰/۲۵ نمره)

۶۳



$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ & (۰/۲۵) \\ \overline{OB} = \overline{OA} & (۰/۲۵) \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & (۰/۲۵) \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{O}D \overset{\text{زضز}}{\cong} B\overset{\Delta}{O}C\ (۰/۲۵) \Rightarrow BC = AD \quad (۰/۲۵)$$

۶۴

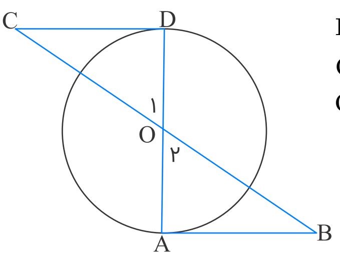


$$\left\{\begin{array}{ll} OA = OC & \text{فرض} \\ OB & \text{ضلع مشترک} \\ AB = BC & \text{لوزی} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{(ض.ض.ض)}} O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad (\text{۰/۷۵ نمره})$$

لذا $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = ۹۰^\circ$ پس قطرها برهم عمودند. (۰/۲۵ نمره)

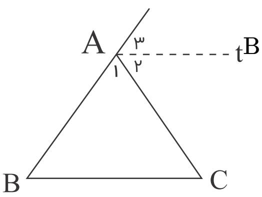
۶۵ می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس $\hat{D} = \hat{A} = ۹۰^\circ$. حال داریم:

فرض	$\overline{OD} = \overline{OA}$، $O \in AD$، $O \in BC$، CD و AB بر دایره مماس‌اند.
حکم	$A\overset{\Delta}{B}O \cong C\overset{\Delta}{D}O$



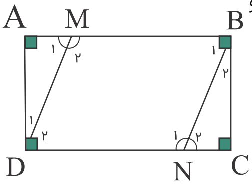
$$\left.\begin{array}{l} \hat{D} = \hat{A} = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ \text{متقابل به رأس} \\ OA = OD \ \text{شعاع دایره} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زضز}} D\overset{\Delta}{C}O \cong \overset{\Delta}{A}BO$$

۶۶



$$BC \| At \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{C} = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{A}_3 \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right. \Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_2$$

۶۷ چهار ضلعی ABCD مستطیل است، پس اضلاع روبه‌رو باهم مساوی و موازی‌اند. طبق فرض داریم $AM = NC$، بنابراین MB با DN مساوی و موازی است، اکنون موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی MD و BN را بررسی می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} AM = NC \text{ فرض} \\ \hat{A} = \hat{C} = ۹۰^\circ \text{ فرض مسئله} \\ CAD = BC \text{ فرض مسئله} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌زض)}} \overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{NBC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{D}_۱ = \hat{B}_۲ \\ \hat{M}_۱ = \hat{N}_۲ \\ MD = NB \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{N}_۱ + \hat{N}_۲ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{M}_۱ = \hat{N}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۲ = \hat{N}_۱ \\ \left.\begin{array}{l} \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{B}_۲ = \hat{D}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow DM || NB$$

در چهار ضلعی BNDM ثابت کردیم هر دو ضلع روبه‌رو باهم مساوی و موازی‌اند، درنتیجه چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۶۸ گزینه ۴

$\hat{A} = \hat{M}$ ، $z = ۷$

$۳x = x + ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow AB = ۳ \times ۱ = ۳$

$۵y - ۵ = y + ۳ \Rightarrow ۵y - y = ۳ + ۵ \Rightarrow y = \frac{۸}{۴} = ۲$

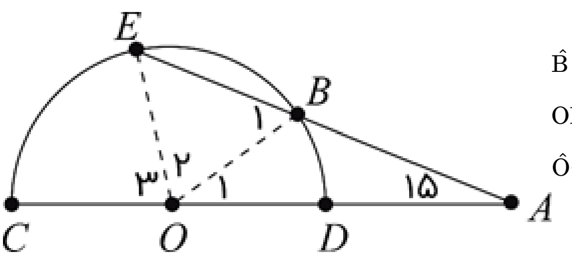
$\Rightarrow \overline{MP} = ۱۰ - ۵ = ۵$

۶۹ گزینه ۳

از O به B وصل می‌کنیم:

$AB = OB \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۵^\circ$

از O به E وصل می‌کنیم:



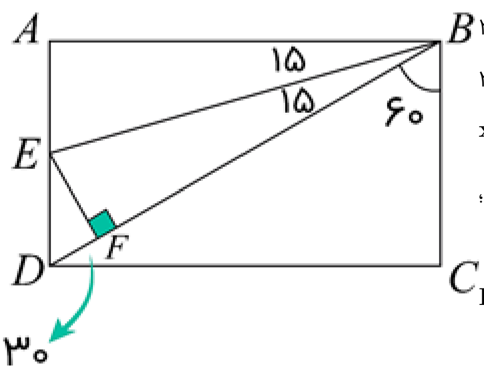
$\hat{B}_۱ = \hat{O}_۱ + \hat{A} = ۳۰^\circ$

$OB = OE \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{E}_۱ = ۳۰^\circ$

$\hat{O}_۳ = \hat{E}_۱ + \hat{A} = ۳۰^\circ + ۱۵^\circ = ۴۵^\circ \Rightarrow CE = ۴۵^\circ$

۷۰ گزینه ۴

در مثلث $\overset{\triangle}{BCD}$ داریم:



$۲x + x = ۹۰$

$۳x = ۹۰$

$x = ۳۰$

ازطرفی دو مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ و $\overset{\triangle}{BEF}$ به حالت وتر و یک ضلع باهم همنهشت‌اند؛ پس BE نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ است؛ پس:

$B_۱ = B_۲ = \frac{۹۰ - ۶۰}{۲} = ۱۵$

حالا زاویهٔ $E\hat{B}C$ برابر است با: $۱۵ + ۶۰ = ۷۵$

۷۱

گزینه ۲

باتوجه‌به $F\hat{B}E = ۲۰^\circ$، پس:

$$\overset{\frown}{FE} = ۲ \times ۲۰^\circ = ۴۰^\circ$$

از طرفی BE نیمساز $F\hat{B}D$ و AD نیمساز $E\hat{A}C$ است، پس:

$$\left.\begin{matrix} \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{ED} \\ \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{CD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$$

همچنین باتوجه‌به شکل مشخص است که AC قطر است، پس $\overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ$. بنابراین:

$$\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = ۱۸۰^\circ - (۲ \times ۴۰^\circ) = ۱۰۰^\circ$$

۷۲

گزینه ۳

از آنجا که $\overset{\frown}{BC} = ۱۴۰^\circ$ و اینکه AB قطر است، داریم:

$$\overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ$$

بنابراین زاویهٔ $O_۱$ که مرکزی است برابر $\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AC} = ۴۰^\circ$ می‌باشد. با در نظر گرفتن مثلث AOC:

$$OC = OA \Rightarrow \hat{C} = \hat{A} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{O}_۱}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

۷۳

گزینه ۴

می‌دانیم یک دایره کامل کمانی به‌اندازه ۳۶۰ درجه است؛ بنابراین باتوجه‌به اینکه زاویهٔ مرکزی رو به کمان با نسبت ۲، برابر با ۳۰ درجه است، بنابراین هر واحد روی دایره ۱۵° می‌شود، پس:

$$(۲ \times ۱۵^\circ) + (۵ \times ۱۵^\circ) + (۶ \times ۱۵^\circ) + (۱۵^\circ x) = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۹۵^\circ + ۱۵^\circ x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۵^\circ x = ۳۶۰^\circ - ۱۹۵^\circ \Rightarrow x = ۱۱$$

۷۴

گزینه ۳

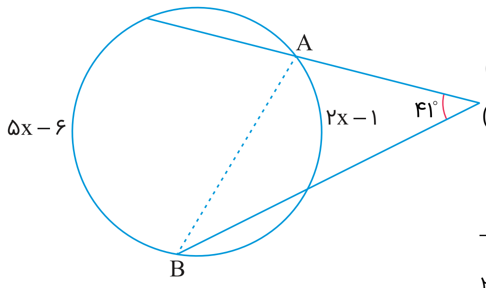
$$۲y + ۳y = ۱۸۰ \Rightarrow ۵y = ۱۸۰ \Rightarrow y = ۳۶$$

مثلث OAB متساوی‌الساقین است و زاویهٔ $O_۱$ در این مثلث زاویهٔ مرکزی است و کمان روبه‌روی آن $۱۰۸ = ۳۶ \times ۳$ می‌باشد؛ پس زاویهٔ $O_۱$ برابر ۱۰۸ است.

$$x = \frac{۱۸۰ - ۱۰۸}{۲} = ۳۶$$

$$\Rightarrow x + y = ۳۶ + ۳۶ = ۷۲$$

۷۵ گزینه ۲



$$(\text{زاویهٔ محاطی})\ A=\frac{۵x-۶}{۲},\quad (\text{زاویهٔ محاطی})\ B=\frac{۲x-۱}{۲}\Rightarrow \frac{۵x-۶}{۲}=\frac{۲x-۱}{۲}+۴۱$$

تذکر: از زاویهٔ خارجی بودن A برای مثلث ایجادشده، تساوی بالا به دست آمده است.

$$\xrightarrow{\times ۲} ۵x-۶=۲x-۱+۸۲$$

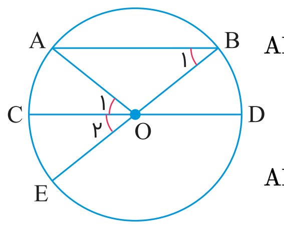
$$۳x=۸۱+۶\Rightarrow ۳x=۸۷\Rightarrow x=۲۹$$

۷۶ گزینه ۲

کمان‌های محصور بین دو خط موازی با هم مساویند.

$$AB||CD\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

دقت شود که در صورت سؤال ذکر نشده که OC نیمساز زاویهٔ O است.



$$AB||CD\ (\text{مورب } BE)\Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{O}_۲=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}=۲۰^\circ$$

از طرفی $\hat{O}_۲$ مرکزی است، پس $\overset{\frown}{BD}=۲۰^\circ$. اما:

$$AB||CD\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}=۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۱=\overset{\frown}{AC}=۲۰^\circ$$

۷۷ گزینه ۴

کمان $B\overset{\frown}{A}C$ معادل $\frac{۳}{۴}$ یا $\frac{۲۷۰}{۳۶۰}$ محیط دایرهٔ به شعاع یک می‌باشد، پس:

$$\frac{۳}{۴}\times(۱\times۲)\times\pi=\frac{۳\pi}{۲}$$

۷۸ گزینه ۴

$$\hat{O}_۳=۴۲^\circ$$

$$\overline{CD}=\overline{AB}\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}=۴۲^\circ\Rightarrow \hat{O}_۲=۴۲$$

$$\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{O}_۱=۱۸۰^\circ-۸۴^\circ=۹۶^\circ\Rightarrow \hat{O}_۱=۹۶^\circ$$

۷۹ گزینه ۳

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازهٔ کمان AB بر حسب درجه}}{۳۶۰^\circ}$$

از آنجا که O یک زاویهٔ مرکزی است می‌توان گفت: $\overset{\frown}{AB} = \hat{O} = ۴۵^\circ$، پس:

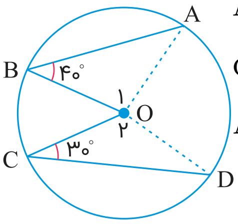
$$\frac{۴۵^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{۳}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \frac{۱}{۸} = \frac{۳}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \text{محیط دایره} = ۲۴$$

بنابراین:

$$x = ۲۴ - (۳ + ۶ + ۷) = ۸$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \times \text{محیط دایره}$$

۸۰ گزینه ۳



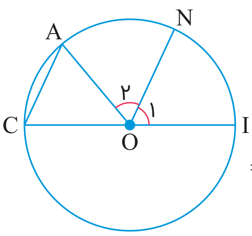
$$\hat{A} = \hat{B} = ۴۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۰۰^\circ$$

$$\hat{C} = \hat{D} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۲ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۲۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = ۲۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ - ۲۲۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

۸۱ گزینه ۳

از O به A وصل می‌کنیم. باتوجه‌به اینکه مثلث AOC متساوی‌الساقین است، داریم:



$$\left.\begin{aligned} & OA = OC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \Rightarrow \text{زاویهٔ خارجی } A\hat{O}I = \hat{A} + \hat{C} = ۲\hat{C} \\ & \left.\begin{aligned} & AC \| ON \\ & \text{CI مورب} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{O}_۱ \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = \hat{C} + \hat{O}_۲ = ۲\hat{C} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \hat{C}$$

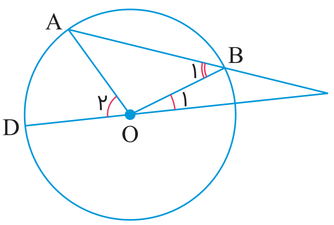
$$\left\{\begin{aligned} & \hat{O}_۱ = \overset{\frown}{NI} \\ & \hat{O}_۲ = \overset{\frown}{AN} \end{aligned}\right. \xrightarrow{\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲} \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{NI} = \frac{۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ}{۲} = ۶۵^\circ$$

$$\Rightarrow N\hat{O}I = ۶۵^\circ$$

۸۲ گزینه ۴

از نقطهٔ O مرکز دایره به نقاط A و B وصل می‌کنیم باتوجه‌به اینکه مثلث‌های OBC و AOB متساوی‌الساقین‌اند، داریم:



$$\overset{\triangle}{OBC}\ : OB = BC \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{C} \Rightarrow \text{زاویهٔ خارجی } \hat{B}_۱ = \hat{O}_۱ + \hat{C} = ۲\hat{C}$$

$$\overset{\triangle}{AOB}\ : OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_۱ = ۲\hat{C}$$

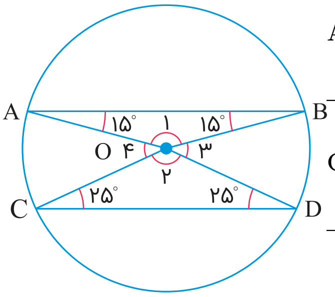
$$\Rightarrow \text{زاویهٔ خارجی } \hat{O}_۲ = \hat{A} + \hat{C} = ۳\hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۲ = ۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{O}_۲ = \overset{\frown}{AD}} \overset{\frown}{AD} = ۶۰^\circ$$

۸۳

گزینه ۲

از نقطهٔ O به نقاط B و D وصل می‌کنیم. باتوجه‌به اینکه مثلث‌های OAB و OCD متساوی‌الساقین‌اند، داریم:



$$\overset{\triangle}{AOB}: \hat{A}=\hat{B} \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ - (\hat{A}+\hat{B}) = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{A} = ۱۵۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{O}_۱=\overset{\frown}{AB}} \overset{\frown}{AB} = ۱۵۰^\circ$$

$$\overset{\triangle}{COD}: \hat{C}=\hat{D} \Rightarrow \hat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ - (\hat{C}+\hat{D}) = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{C} = ۱۳۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{O}_۲=\overset{\frown}{CD}} \overset{\frown}{CD} = ۱۳۰^\circ$$

حال باتوجه‌به اینکه مجموع کمان‌های ایجادشده در دایره ۳۶۰° است، خواهیم داشت:

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD} = ۳۶۰^\circ - (\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}) = ۳۶۰^\circ - (۱۵۰^\circ + ۱۳۰^\circ) = ۸۰^\circ$$

۸۴

گزینه ۲

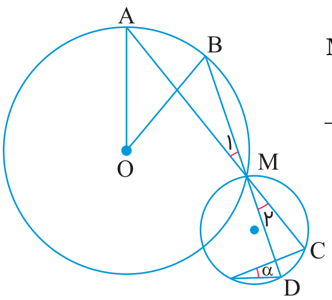
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AMB} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB}}{۲} \\ \overset{\frown}{AMB} = A\hat{O}B \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\overset{\frown}{ACB}}{۲} = \overset{\frown}{AMB} \\ \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{AMB} = ۳۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{AMB} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳\overset{\frown}{AMB} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AMB} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۱۲۰^\circ$$

۸۵

گزینه ۴

می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف کمان مقابلش است.



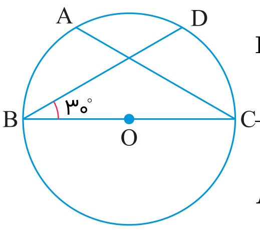
$$\hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \xrightarrow{\hat{O}=\overset{\frown}{AB}=۴۰^\circ} \hat{M}_۱ = ۲۰^\circ \Rightarrow \hat{M}_۲ = \hat{M}_۱ = ۲۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{M}_۲=\alpha=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}} \alpha = \hat{M}_۲ = ۲۰^\circ$$

۸۶

گزینه ۴

می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابلش است. بنابراین داریم:



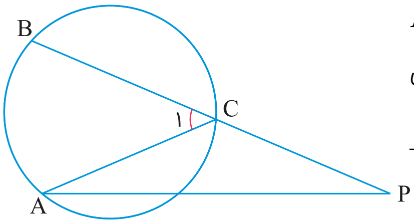
$$B = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AD}} \overset{\frown}{AD} = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB} = ۱۸۰^\circ - ۲\overset{\frown}{AD} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

۸۷ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابلش است، داریم:



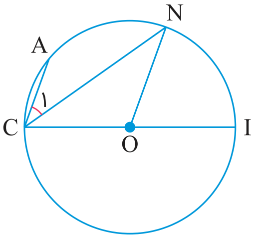
$AC = CP \Rightarrow \hat{A} = \hat{P} = ۲۳^\circ$

زاویهٔ خارجی $\hat{C}_۱ = \hat{A} + \hat{P} = ۴۶^\circ$

$\xrightarrow{\hat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}} \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = ۴۶^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۹۲^\circ$

۸۸ گزینه ۳

می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابلش است. بنابراین داریم:

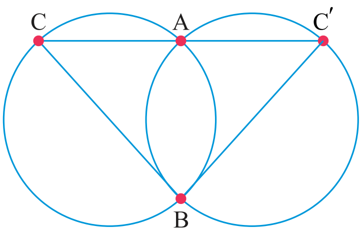


$$\left.\begin{array}{l} A\hat{C}O = \frac{\overset{\frown}{AI}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AI} = ۱۴۰^\circ \\ \left.\begin{array}{l} ON \| CA \\ \text{مورب } CI \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{C}O = N\hat{O}I = ۷۰^\circ \xrightarrow{N\hat{O}I = \overset{\frown}{NI}} \overset{\frown}{NI} = ۷۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AI} - \overset{\frown}{NI} = ۷۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} ON \| CA \\ \text{مورب } CN \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{N} \xrightarrow{\hat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AN}}{۲} = ۳۵^\circ} \hat{N} = ۳۵^\circ$$

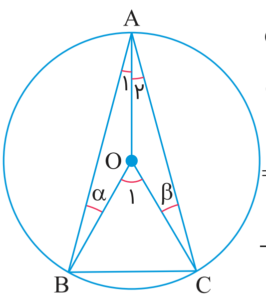
۸۹ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه دو دایره مساوی یکدیگرند، می‌توان گفت که اندازهٔ کمان AB برحسب درجه در هر دوی آن‌ها یکسان است و درنتیجه اندازهٔ زوایای C و C' با یکدیگر مساوی و برابر نصف اندازهٔ کمان AB می‌باشد. بنابراین مثلث CBC' همواره متساوی‌الساقین است.



۹۰ گزینه ۳

از O به A وصل می‌کنیم باتوجه‌به اینکه مثلث‌های OAB و OAC متساوی‌الساقین‌اند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{OAB} : OA = OB \Rightarrow \hat{A}_۱ = \alpha \\ \overset{\Delta}{OAC} : OA = OC \Rightarrow A_۲ = \beta \end{array}\right\}$$

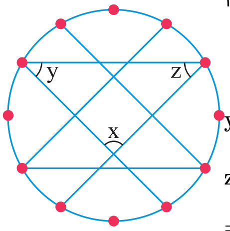
$$\Rightarrow \alpha + \beta = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = A \xrightarrow{\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}} \alpha + \beta = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\overset{\frown}{BC} = \hat{O}_۱ = ۶۰^\circ} \alpha + \beta = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

۹۱

گزینه ۲

زاویه محاطی رو به کمانِ ۹۰ = ۳۰ × ۳:



$۳۶۰ \div ۱۲ = ۳۰$

$$y = \frac{۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$$

$$z = y = ۴۵^\circ$$

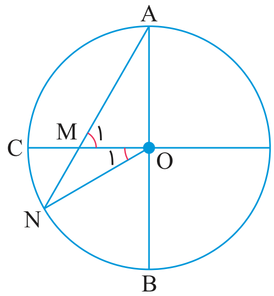
$$\Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ - ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = ۹۰^\circ + ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$$

۹۲

گزینه ۳

باتوجه‌به فرضیات مسئله داریم:



$$\overset{\Delta}{OMN} : OM = MN \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{N}$$

$$\Rightarrow \text{زاویهٔ خارجی } \hat{M}_۱ = \hat{O}_۱ + \hat{N} = ۲\hat{N} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{DOAN} : OA = ON \Rightarrow \hat{A} = \hat{N} \quad (۲)$$

حال باتوجه‌به روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{OAM} : \hat{A} + \hat{M}_۱ = ۹۰^\circ$$

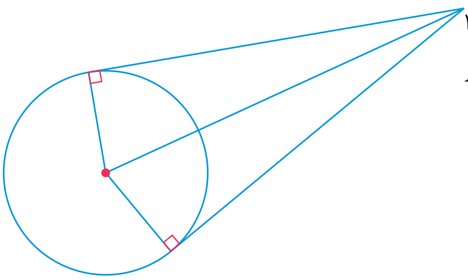
$$\Rightarrow \hat{N} + ۲\hat{N} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{N} = ۳۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{N}} \hat{A} = ۳۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{BN} = ۲\hat{A} \Rightarrow \overset{\frown}{BN} = ۶۰^\circ$$

۹۳

گزینه ۲

می‌دانیم مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع عمود است. دو مثلث طبق وتر و یک ضلع باهم، هم‌نهشت هستند.



$$۲۰ - ۶ = ۱۴$$

$$AM = ۱۴ \div ۲ = ۷$$

۹۴

گزینه ۱

اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم شود، طول دو مماس باهم برابرند.

$$Ax = At \,,\, Bx = By \,,\, Cy = Cz \,,\, Dz = Dt$$

$$\Rightarrow Ax + Bx + Cz + Dz = By + yC + Dt + tA$$

$$\Rightarrow AB + DC = BC + AD \xrightarrow{AD=BC} ۱۰ + ۳۰ = ۲ \times BC \Rightarrow BC = ۲۰$$

۹۵

الف

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{B}O = ۹۰^\circ \\ C\hat{O}B = ۴۵^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow y = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = ۴۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{B}A = ۹۰^\circ \\ \hat{A} = ۳۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۶۰^\circ$$

ب

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{C} = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = ۳۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{A} = ۲۲^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow y = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ + ۲۲^\circ) = ۶۸^\circ$$

۹۶

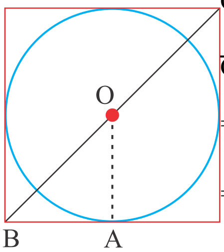
$$\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{O} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow B\overset{\frown}{D}C = ۱۲۰^\circ \Rightarrow B\overset{\frown}{A}C = ۲۴۰^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{B\overset{\frown}{D}C}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

$$B\overset{\frown}{A}C = ۲۴۰^\circ \Rightarrow \hat{D} = ۱۲۰^\circ$$

۹۷



$$\overline{OA} = \overline{AB}\ ,\ \overline{OB} = ۱۵$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{AB}^۲ + \overline{OA}^۲} \Rightarrow \overline{OB} = \sqrt{۲\overline{OA}^۲}$$

$$\Rightarrow \overline{OB}^۲ = ۲\overline{OA}^۲ \Rightarrow ۲۲۵ = ۲ \times \overline{OA}^۲$$

$$\Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{\frac{۲۲۵}{۲}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}$$

۹۸

$$۲x + ۲۵^\circ + ۴x + ۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶x + ۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۶x = ۱۵۰^\circ \Rightarrow x = ۲۵^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = ۲ \times ۲۵^\circ + ۲۵^\circ = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۷۵^\circ$$

$$\hat{D} = ۴ \times ۲۵^\circ + ۵^\circ = ۱۰۵^\circ \Rightarrow B\overset{\frown}{A}C = ۲۱۰^\circ$$

۹۹

$$۱۰x + ۶x + ۸x = ۲۴x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = \frac{۳۶۰^\circ}{۲۴} = ۱۵^\circ$$

$$x = ۱۵^\circ \Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{AB} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۷۵^\circ \\ \overset{\frown}{BC} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۴۵^\circ \\ \overset{\frown}{CA} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^\circ \end{cases}$$

۱۰۰

$$\hat{O}_۳ = ۴۲^\circ$$

$$\overline{CD} = \overline{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB} = ۴۲^\circ \Rightarrow \hat{O}_۲ = ۴۲^\circ$$

$$\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۸۴^\circ = ۹۶^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۹۶^\circ$$

۱۰۱ اضلاع شش ضلعی منتظم باهم برابر است. $\Leftarrow$ کمان‌های روبه‌رو به اضلاع باهم مساوی هستند.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA} = \frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{FD} = ۲ \times ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۲۰^\circ$$

۱۰۲

$$\overline{OA} = \overline{OB} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = ۷۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^\circ$$
$$\hat{A} = \hat{B} = ۷۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۲ = ۱۸۰ - (۷۰ + ۷۰) = ۴۰^\circ$$

۱۰۳

$$۳x + ۳۰ + ۲x + ۱۰ + ۲x - ۵ + ۳x + ۵ = ۳۶۰$$
$$\Rightarrow ۱۰x + ۴۰ = ۳۶۰ \Rightarrow ۱۰x = ۳۲۰ \Rightarrow x = ۳۲$$
$$\overset{\frown}{DA} = ۳ \times ۳۲^\circ + ۳۰^\circ = ۱۲۶^\circ \quad , \quad \overset{\frown}{BC} = ۲ \times ۳۲^\circ - ۵^\circ = ۵۹^\circ$$
$$\overset{\frown}{AB} = ۲ \times ۳۲^\circ + ۱۰^\circ = ۷۴^\circ \quad , \quad \overset{\frown}{CD} = ۳ \times ۳۲^\circ + ۵^\circ = ۱۰۱^\circ$$

۱۰۴

$$\text{عمودمنصف } \overline{OM} \Rightarrow ۲x - ۴ = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \Rightarrow x = ۶$$
$$\overline{OA} = \sqrt{۸^۲ + ۶^۲} = ۱۰ \Rightarrow ۳y - ۷ = ۱۰ \Rightarrow y = \frac{۱۷}{۳}$$

۱۰۵

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OC} = ۶\,\text{cm} \Rightarrow \overline{BC} = ۱۲\,\text{cm} \\ \hat{C} = ۹۰^\circ \\ \overline{CA} = ۹\,\text{cm} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{۱۲^۲ + ۹^۲} = ۱۵$$