

نقاط P و Q روی پاره خط AB و یک طرف وسط آن قرار دارند. نقطه P، پاره خط AB را به نسبت $\frac{1}{3}$ تقسیم می‌کند و $BQ = QP$ است. اگر $BP = 3$ باشد، طول پاره خط AQ چقدر است؟

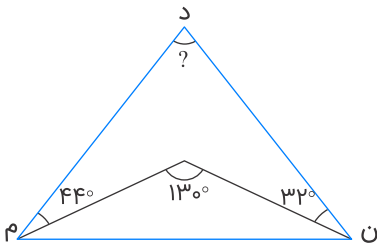
(۲) $10/5$

(۱) ۱۲

(۴) ۹

(۳) $7/5$

در شکل زیر، اندازه زاویه (د) چند درجه است؟



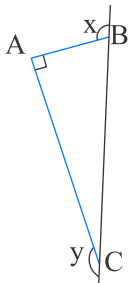
(۱) ۴۴ درجه

(۲) ۵۰ درجه

(۳) ۵۴ درجه

(۴) ۵۶ درجه

مثلث ABC قائم‌الزاویه است. $\hat{x} + \hat{y}$ چند درجه است؟



(۱) ۲۷۰

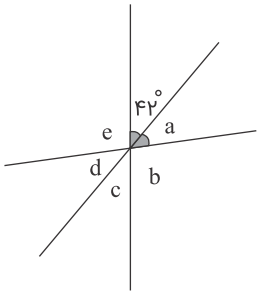
(۲) ۳۶۰

(۳) ۱۸۰

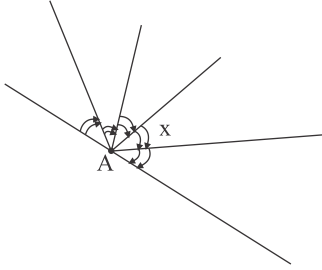
(۴) ۹۰

در هر مورد اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید. (زوایای برابر با علامت مشخص شده‌اند).

الف



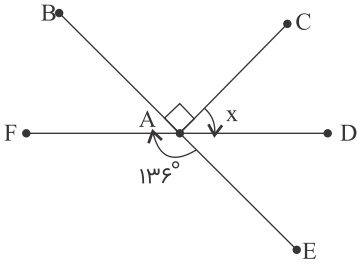
ب



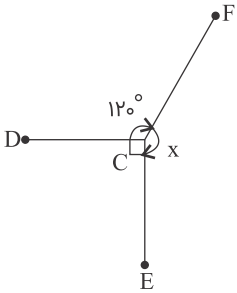
در شکل‌های زیر، اندازه زاویه مجهول را به دست آورید.

۵

الف

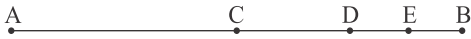


ب



در شکل زیر، نقطه C وسط \overline{AB} ، نقطه D وسط \overline{CB} و نقطه E وسط \overline{DB} است. در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

۶



$\overline{AB} = \dots\dots \overline{AC}$

الف

$\overline{CB} = \dots\dots \overline{AB}$

ب

$\overline{EB} = \dots\dots \overline{CB}$

پ

$$\overline{AB} = \dots\dots \overline{EB}$$

ت

$$\overline{DE} = \dots\dots \overline{AB}$$

ث

$$\overline{CD} = \dots\dots \overline{DE}$$

ج

$$\overline{CE} = \dots\dots \overline{EB}$$

چ

$$\overline{DB} = \dots\dots \overline{CE}$$

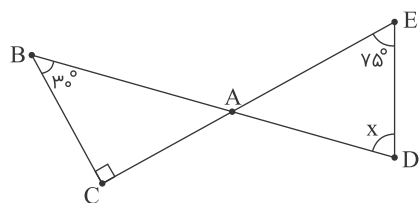
ح

$$\overline{AD} = \dots\dots \overline{AB}$$

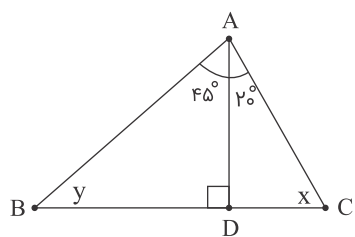
خ

باتوجه به مجموع زوایای داخلی هر مثلث، زوایای مجهول هر شکل را بیابید.

۷



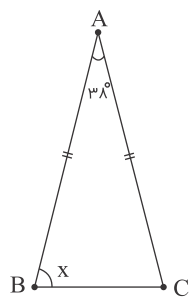
الف



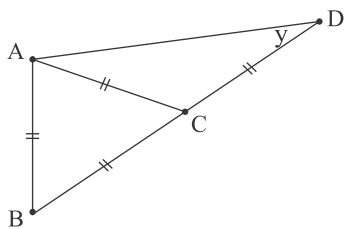
ب

باتوجه به ویژگی‌های مثلث متساوی الاضلاع و متساوی الساقین، زوایای مجهول را بیابید.

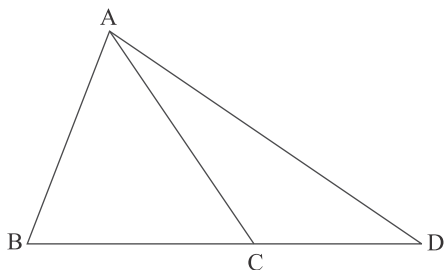
۸



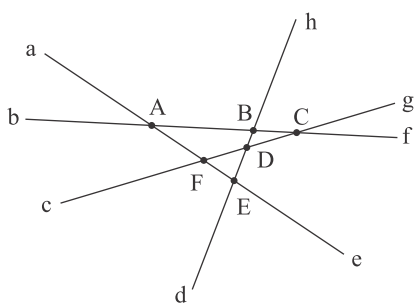
الف



نام هریک از پاره‌خط‌هایی که در شکل زیر می‌بینید را بنویسید.



نام هریک از پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌هایی که در شکل زیر می‌بینید را بنویسید.



باتوجه به شکل، رابطه‌های زیر را کامل کنید.



$Cy - \overline{CD} = \dots\dots$

$By - \dots\dots = \overline{BC}$

$Dx - Ax = \dots\dots$

$Ay - \overline{BC} = \dots\dots + \dots\dots$

$xy - \overline{AD} = \dots\dots + \dots\dots$

$xy - Ay = \dots\dots$

۱۲

نقطه‌های C و M روی پاره‌خط AB قرار دارند، به طوری که $\overline{AC} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ و $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{AC}$. کدام رابطه درست است؟

$$\begin{aligned} \overline{BM} &= \frac{1}{6}\overline{AB} & (1) \\ \overline{CM} &= \frac{5}{6}\overline{BC} & (2) \\ \overline{BM} &= \frac{5}{8}\overline{AB} & (3) \\ \overline{CM} &= \frac{5}{6}\overline{AB} & (4) \end{aligned}$$

۱۳

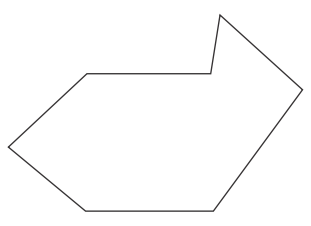
اگر M وسط پاره‌خط AB و N وسط پاره‌خط MB باشد و $\frac{NP}{PB} = 2$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (P روی پاره‌خط AB قرار دارد)

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \frac{\overline{AB}}{4} & (1) \\ \overline{PB} &= \frac{1}{12}\overline{AB} & (2) \\ 3\overline{PB} + \overline{MN} &= \overline{AM} & (3) \\ \frac{\overline{AM}}{2} - \overline{PB} &= \frac{3}{4}\overline{MB} & (4) \end{aligned}$$

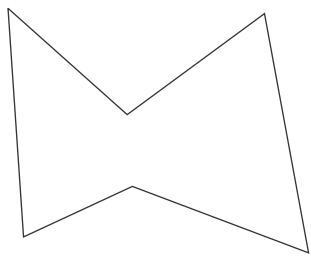
۱۴

محدب یا مقعر بودن شکل‌های زیر را تعیین کنید:

الف

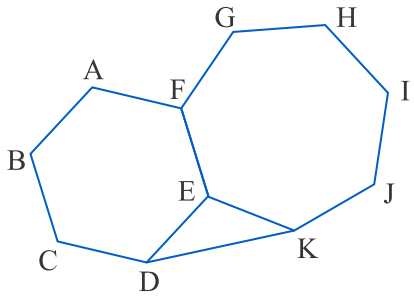


ب



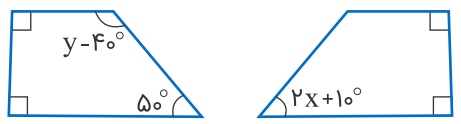
۱۵

در شکل زیر، یک شش ضلعی منتظم و یک هفت ضلعی منتظم می‌بینید. چرا مثلث EDK متساوی‌الساقین است؟ دلیل را دقیق بنویسید.



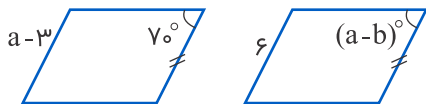
۱۶

اگر دو دوزنقه قائم‌الزاویه زیر همنهشت باشند، مقدار x و y را به دست آورید.



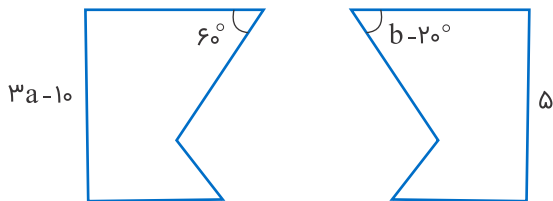
دو شکل زیر با یک یا چند تبدیل روی هم منطبق می‌شوند. مقدار a و b را پیدا کنید.

۱۷



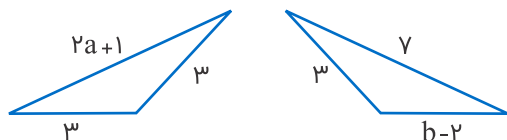
دو شکل زیر با یک یا چند تبدیل روی هم منطبق می‌شوند. مقدار a و b را به دست آورید.

۱۸



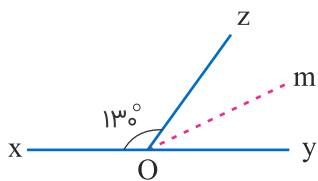
دو مثلث زیر، نسبت به هم متقارن هستند. اندازه a و b را به دست آورید.

۱۹



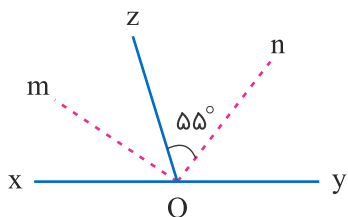
om نیمساز \hat{zOy} است. متمم $m\hat{Oy}$ چند درجه است؟

۲۰



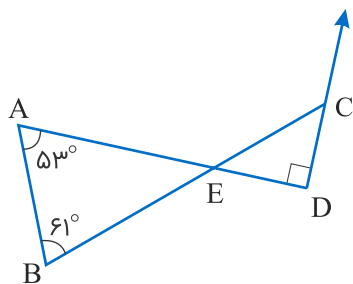
در شکل زیر، om نیمساز \hat{xOz} و on نیمساز \hat{zOy} است. اندازه زاویه $m\hat{Oz}$ چند درجه است؟

۲۱



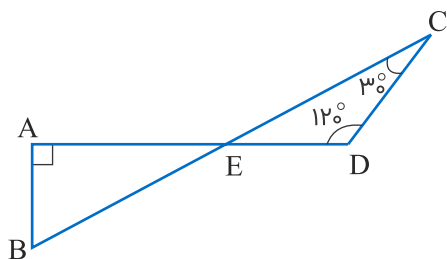
در شکل زیر، اندازه زاویه خارجی \hat{C} را به دست آورید.

۲۲



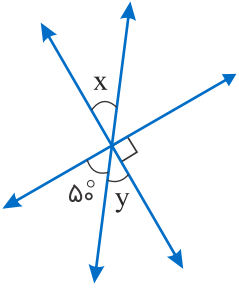
در شکل زیر اندازه زاویه \hat{B} را به دست آورید.

۲۳



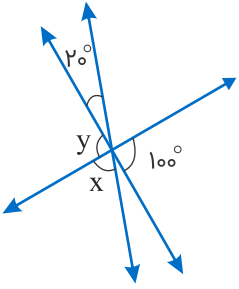
اندازه زاویه‌های x و y را به دست آورید.

۲۴



اندازه زاویه‌های x و y را به دست آورید.

۲۵



اگر C وسط پاره خط \overline{AB} ، D وسط \overline{BC} و E وسط \overline{AD} و از طرفی $\overline{DB} = 4 \text{ cm}$ باشد، مقدار \overline{AC} ، \overline{ED} و \overline{EC} را به دست آورید.

۲۶



تفاضل دو زاویه مکمل برابر است با 10° درجه. اندازه هرکدام را حساب کنید.

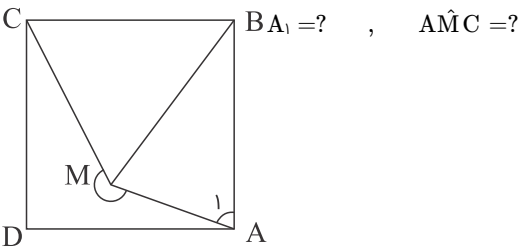
۲۷

زاویه \hat{x} از متمم خود 15° بیشتر است. مکمل \hat{x} را به دست آورید.

۲۸

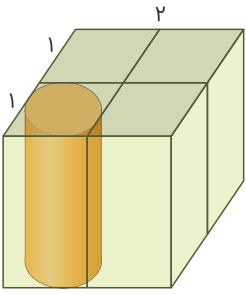
در شکل زیر $ABCD$ مربع و $\triangle BMC$ متساوی‌الاضلاع است. اندازه زوایای خواسته شده را به دست آورید.

۲۹



حجم فضای بین استوانه و مکعب را به دست آورید. ($\pi \simeq 3$)

۳۰



حجم یک مکعب توخالی به ضلع خارجی ۴ متر و ضلع داخلی ۱ متر چند متر مکعب است؟

۳۱

مستطیلی به ابعاد ۳ و a را حول a دوران می‌دهیم. اگر حجم شکل حاصل ۸۱ واحد مکعب باشد، a را به دست آورید. ($\pi \simeq ۳$)

۳۲

کاغذی مستطیل شکل به ابعاد ۴ و ۶ را در جهت ضلع بزرگ لوله کرده‌ایم. حجم استوانه ساخته شده را به دست آورید. ($\pi \simeq ۳$)

۳۳

یک حوض به ابعاد ۱، ۳ و ۴ متر که کاملاً پر از آب است را با یک سطل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲۰ سانتی‌متر و ارتفاع نیم متر خالی می‌کنیم. سطل را چند بار باید پر و خالی کنیم تا حوض کاملاً خالی شود؟ ($\pi \simeq ۳$)

۳۴

حجم یک استوانه توخالی به شعاع داخلی ۲ متر، شعاع خارجی ۳ متر و ارتفاع ۲۰ متر، چند متر مکعب است؟ ($\pi = ۳/۱۴$)

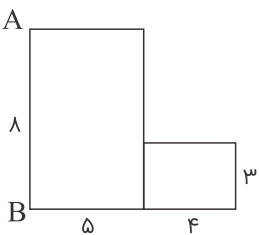
۳۵

حجم مکعبی به ضلع $2a$ با حجم استوانه‌ای به شعاع a برابر است. ارتفاع استوانه را برحسب a به دست آورید. ($\pi \simeq ۳$)

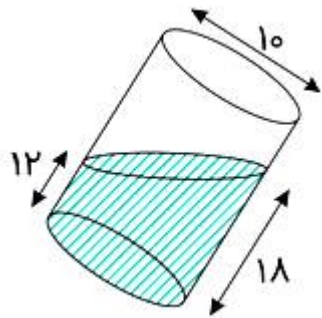
۳۶

شکل زیر را حول ضلع AB دوران می‌دهیم، مساحت جانبی شکل حاصل را به دست آورید.

۳۷

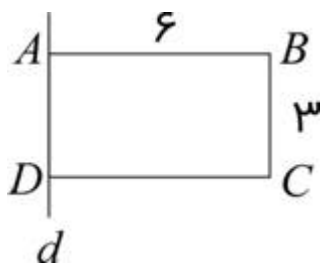


در لیوان استوانه‌ای شکل، به قطر ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر، مقداری آب ریخته‌ایم و آن را کج کرده‌ایم. اگر شکل زیر ایجاد شده باشد، چه سطحی از داخل لیوان در تماس با آب است؟



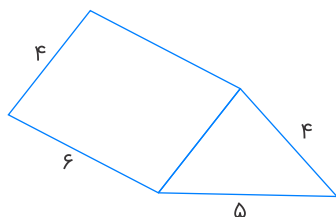
- (۱) 150π
- (۲) 175π
- (۳) 180π
- (۴) 120π

مستطیل ABCD را در شکل زیر، حول خط d به اندازه 27° دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟



- (۱) 54π
- (۲) 108π
- (۳) 81π
- (۴) 72π

گسترده منشور زیر را رسم و مساحت جانبی آن را پیدا کنید.



مستطیلی به ابعاد ۳ و a را حول ضلع a دوران داده‌ایم. اگر مساحت جانبی شکل حاصل از دوران ۳۶ باشد، a را به دست آورید. ($\pi \approx 3$)

می‌خواهیم سقف و دیوارهای یک اتاق 3×4 که ارتفاع آن $2/5$ متر است را رنگ‌آمیزی کنیم. اگر برای رنگ‌آمیزی هر متر مربع، ۱۰۰ گرم رنگ نیاز باشد، برای کل رنگ‌آمیزی چه مقدار رنگ استفاده می‌شود؟

مساحت کل یک استوانه با شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۵ متر را به دست آورید. ($\pi \approx 3$)

مساحت جانبی یک مکعب ۲۵۶ متر مربع است. حجم آن کدام است؟

۴۴

۲۱۶ (۲)

۱۰۰۰ (۱)

۵۱۲ (۴)

۷۲۹ (۳)

اگر مساحت سه وجه مختلف یک مکعب مستطیل برابر با ۶، ۱۰ و ۱۵ سانتی‌متر مربع باشد، حجم مکعب مستطیل کدام است؟

۴۵

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

۴۰ (۴)

۳۰ (۳)

صفحه‌ای فلزی به شکل مستطیل به ابعاد ۱۲ و ۱۸ سانتی‌متر داریم، از چهار گوشه آن مربع‌هایی به ضلع ۲ cm جدا می‌کنیم و با بقیه آن جعبه‌ای می‌سازیم، حجم جعبه ساخته شده چقدر است؟

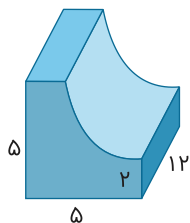
۴۶

۱۲۴ (۲)

۱۲۰ (۱)

۲۲۴ (۴)

۲۲۰ (۳)



حجم شکل زیر کدام است؟

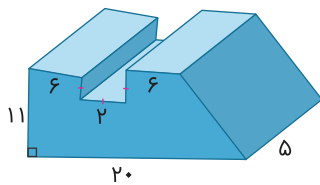
۴۷

۲۱۵ (۱)

۲۱۶/۲۲ (۲)

۲۱۶ (۳)

۲۱۵/۲۲ (۴)



حجم شکل زیر کدام است؟

۴۸

۹۱۵ (۱)

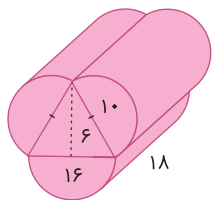
۹۰۵ (۲)

۸۱۵ (۳)

۸۰۵ (۴)

۴۹

حجم شکل زیر کدام است؟ ($\pi \simeq 3$)



(۱) ۳۸۴۲

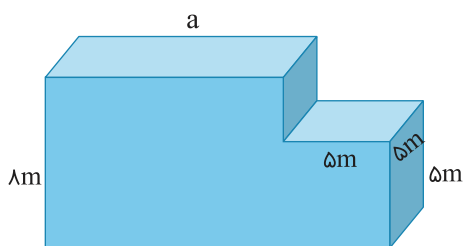
(۲) ۳۸۴۰

(۳) ۳۹۴۲

(۴) ۳۹۴۰

۵۰

اگر حجم شکل زیر برابر ۶۲۵ مترمکعب باشد، اندازه a چند متر است؟



(۱) ۱۲

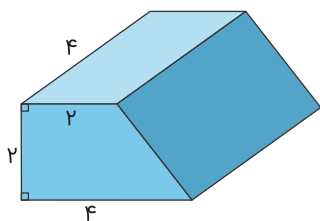
(۲) ۱۲/۵

(۳) ۱۱

(۴) ۱۱/۵

۵۱

حجم منشور زیر برابر چند واحد مکعب است؟



(۱) ۳۶

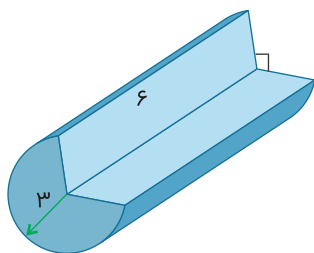
(۲) ۱۸

(۳) ۴۸

(۴) ۲۴

۵۲

حجم شکل زیر تقریباً برابر چند واحد مکعب است؟ ($\pi \simeq 3$)



(۱) ۸۱

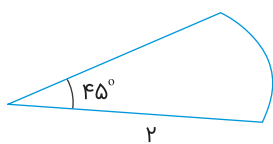
(۲) ۲۴۳

(۳) ۱۶۲

(۴) ۱۲۱/۵

۵۳

حجم منشوری که قاعده آن به شکل زیر است و ارتفاع آن ۴ واحد می‌باشد، چند واحد مکعب است؟ ($\pi \simeq 3$)



(۱) ۷

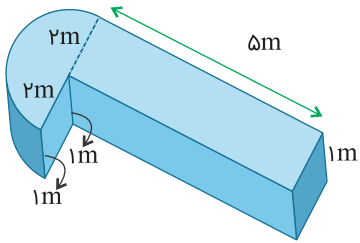
(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۸

حجم استخري با شكل و ابعاد زير چند مترمكعب است؟ ($\pi \simeq 3/14$)

۵۴



(۱) $22/56$

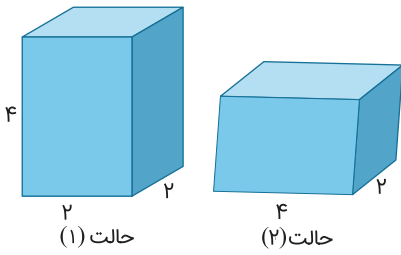
(۲) 20

(۳) $16/28$

(۴) $14/14$

مكعب مستطيل حالت (۱) را تا ۲۰ درصد ظرفيتش، از آب پر مي‌كنيم. سپس آن را به بغل خوابانده تا در حالت (۲) قرار گيرد. در حالت (۲) ارتفاع آب چند واحد خواهد شد؟

۵۵



(۱) $0/2$

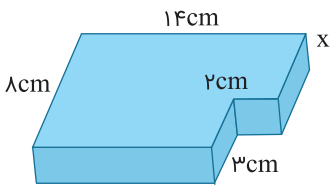
(۲) 1

(۳) $0/4$

(۴) $0/3$

حجم شكل زير برابر ۴۲۴ سانتی‌مترمكعب است. مقدار x كدام است؟

۵۶



(۱) 2

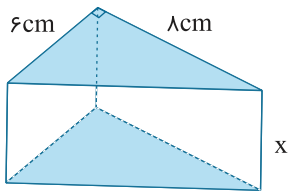
(۲) 3

(۳) 4

(۴) 5

حجم منشور زير ۳۶۰ سانتی‌مترمكعب است. ارتفاع منشور برابر است با:

۵۷



(۱) 15

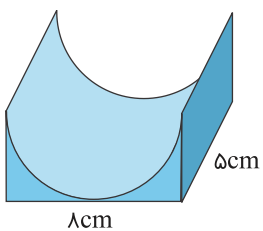
(۲) 12

(۳) 9

(۴) 6

حجم منشور زير كدام است؟

۵۸



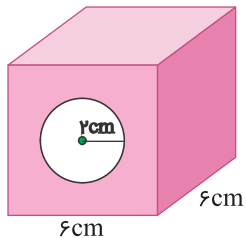
(۱) $27/52$

(۲) $34/4$

(۳) $41/28$

(۴) $48/16$

درون یک مکعب، یک حفره به شکل استوانه مطابق شکل زیر ایجاد کرده‌ایم. حجم شکل حاصل کدام است؟



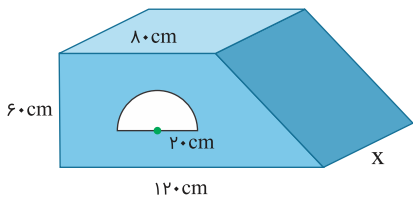
(۱) $62/32$

(۲) $84/64$

(۳) $120/32$

(۴) $140/64$

حجم منشور زیر، 26860 cm^3 است، مقدار x کدام است؟



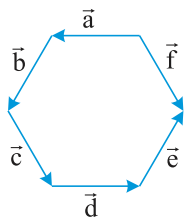
(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹

در شکل زیر کدام دو بردار قرینه یکدیگر نیستند؟



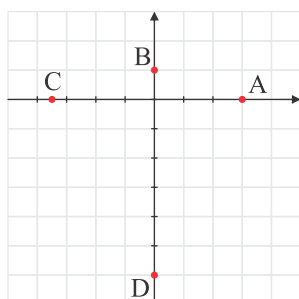
(۱) \vec{d}, \vec{a}

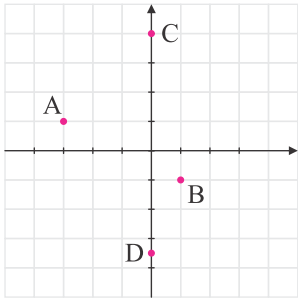
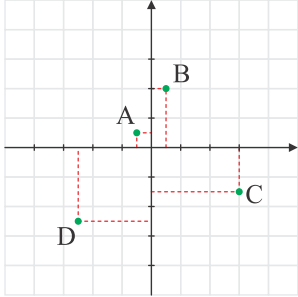
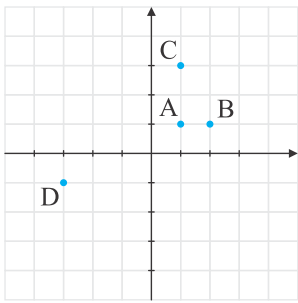
(۲) \vec{b}, \vec{e}

(۳) \vec{f}, \vec{c}

(۴) گزینه ۱ و ۳

مختصات هریک از نقاط مشخص شده را به دست آورید.

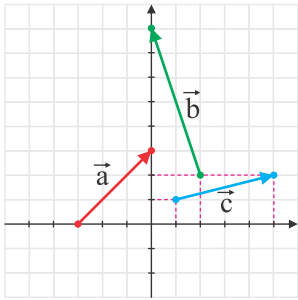




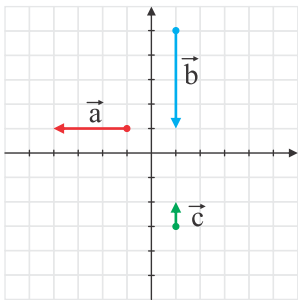
پ

ت

مختصات بردارهای زیر را بنویسید.

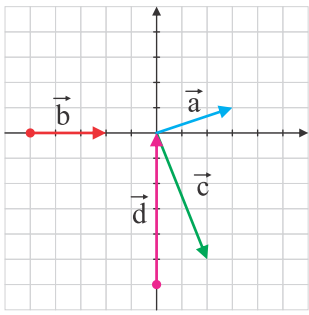


۶۳



۶۴

۶۵



برداریهای زیر را رسم کنید.

$$\overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{EF} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶۶

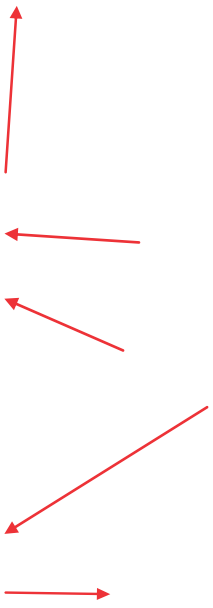
$$\overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{EF} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۶۷

در هر مورد دو بردار خلاف جهت رسم کنید که با بردار داده شده هم راستا باشند.

۶۸

الف



ب

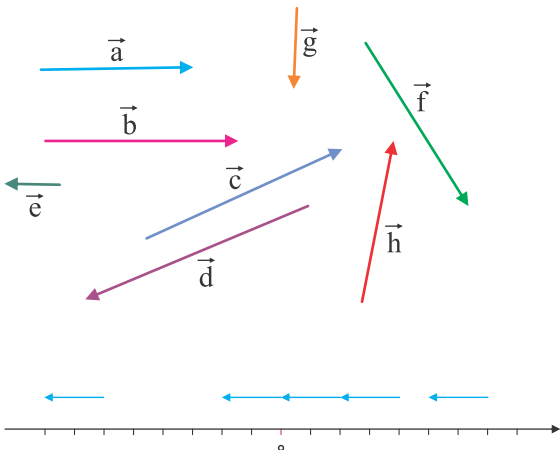
پ

ت

ث

برداریهای مساوی را پیدا کنید.

۶۹



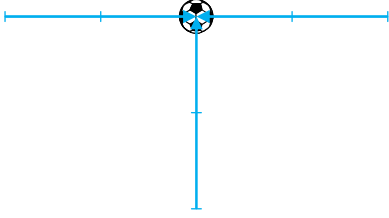
اندازه برداریهای زیر را مشخص کنید.

۷۰

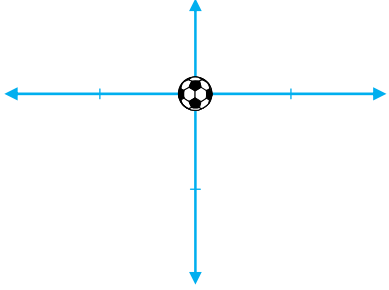
با رسم شکلی جدید مشخص کنید در هر مورد نیروهای وارد شده، باعث حرکت توپ به کدام جهت می‌شوند؟

۷۱

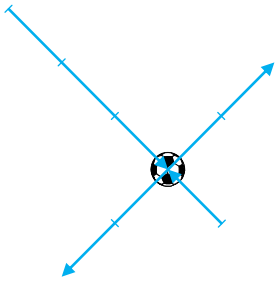
الف



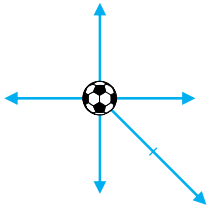
ب



پ



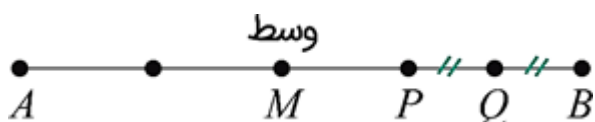
ت



گزینه ۲

۱

نقطه M را وسط AB می‌گیریم.



P وسط MB قرار دارد در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} PB = 3 \Rightarrow PQ = 1/5 \\ PM = 3 \\ AM = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow AQ = 10/5$$

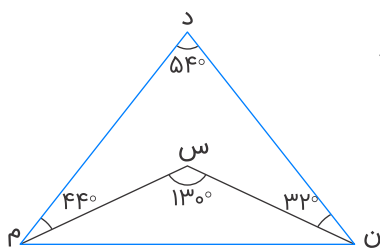
گزینه ۳

۲

در مثل "س ن م"، مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است. یکی از زاویه‌ها ۱۳۰ درجه، پس جمع دو زاویه دیگر $180 - 130 = 50$ است.

در نتیجه جمع دو زاویه "ن" و "م" در مثلث "د ن م" برابر است با:

$$32 + 44 + 50 = 126$$



$$180 - 126 = 54$$

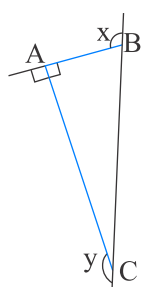
زاویه خواسته شده به صورت زیر به دست می‌آید:

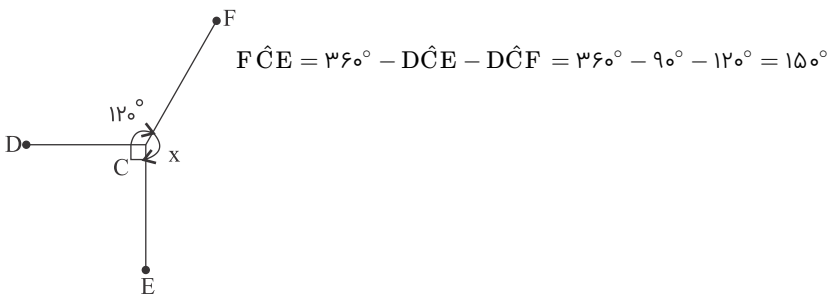
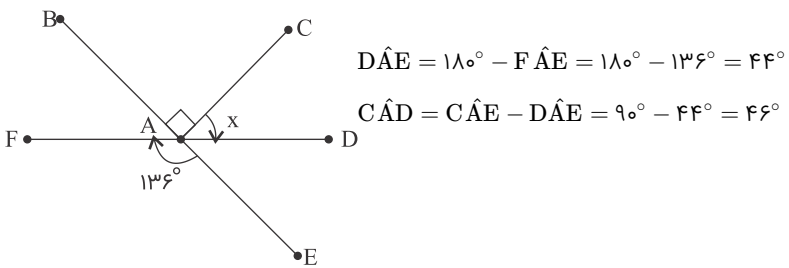
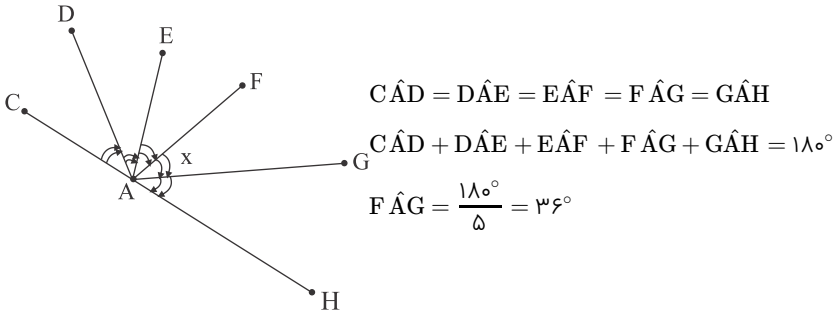
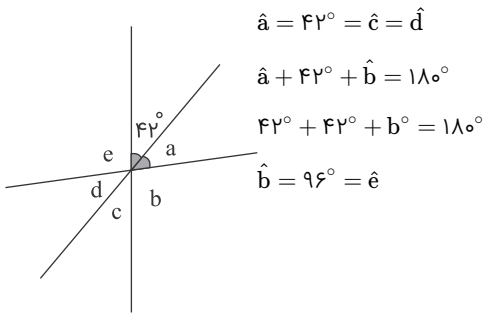
گزینه ۱

۳

مجموع زوایای خارجی مثلث برابر است با ۳۶۰ درجه، از طرفی زاویه خارجی رأس A برابر است با ۹۰ درجه.

$$\hat{x} + \hat{y} = 360 - 90 = 270$$





$$\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{AC}$$

$$\overline{CB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$$

$$\overline{EB} = \frac{1}{4}\overline{CB}$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{EB}$$

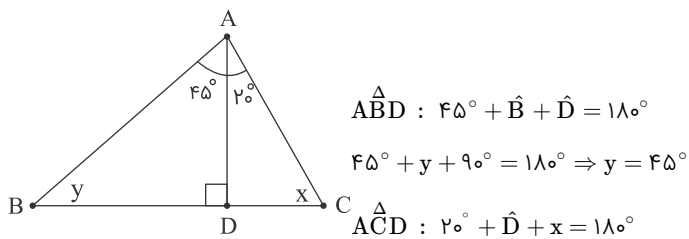
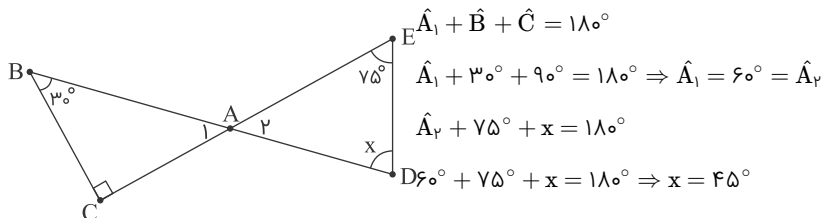
$$\overline{DE} = \frac{1}{4}\overline{AB}$$

$$\overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{DE}$$

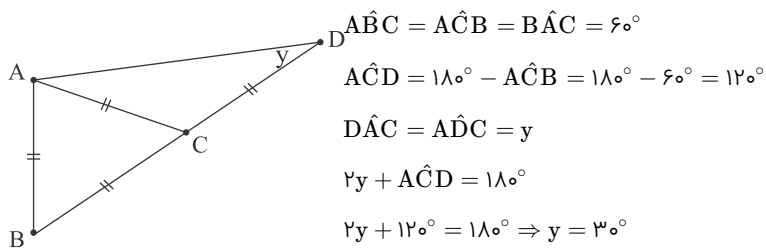
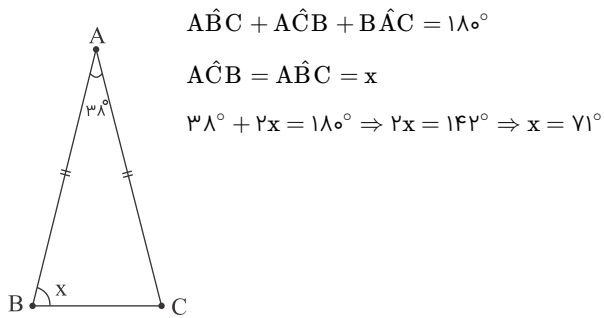
$$\overline{CE} = \frac{4}{3}\overline{EB}$$

$$\overline{DB} = \frac{2}{3}\overline{CE}$$

$$\overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AB}$$



$$20^\circ + 90^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$$



AB, AD, BD, BC, CD, AC

الف 7

ب

الف 8

ب

9

شش پاره‌خط در شکل وجود دارد.

Aa, Fa, Ea, Ee, Fe, Ae, Ab, Bb, Cb, Cf, Bf, Af
F c, Dc, Cc, Cg, Dg, Fg, Ed, Dd, Bd, Bh, Dh, Eh

۱۲ پاره خط

AB, BC, AC, AF, FE, AE, BD, DE, BE, CD, DF, CF

$$C_y - \overline{CD} = D_y$$

$$B_y - C_y = \overline{BC}$$

$$D_x - A_x = \overline{AD}$$

$$A_y - \overline{BC} = \overline{AB} + C_y$$

$$x_y - \overline{AD} = A_x + D_y$$

$$x_y - A_y = A_x$$

۱۱ الف

ب

پ

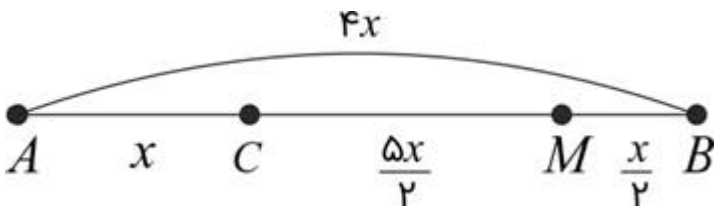
ت

ث

ج

گزینه ۲

۱۲

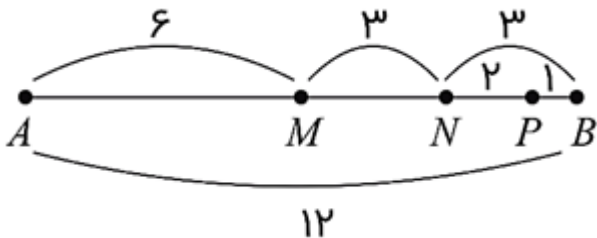


$$CM = \frac{\Delta x}{2}, BC = 3x \Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{3x} = \frac{\Delta}{6}$$

گزینه ۴

۱۳

باتوجه به معلومات مسئله شکل زیر را داریم:



$$\frac{\overline{AM}}{2} - \overline{PB} = \frac{3}{4} \overline{MB}$$

$$\frac{6}{2} - 1 = \frac{3}{4} \times 6 \Rightarrow 3 - 1 = \frac{18}{4} \Rightarrow \text{این غلط است}$$

مقعر است زیرا یک زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه دارد.

مقعر است زیرا دو زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه دارد.

نکته کلیدی در حل این مسئله وجود ضلع مشترک FE، بین شش ضلعی و هفت ضلعی منتظم است. در شکل، همه ضلع‌های شش ضلعی طول مساوی دارند (چون منتظم است)، پس می‌توانیم بگوییم $\overline{FE} = \overline{ED}$. همچنین طول همه ضلع‌های هفت ضلعی هم مساوی است (زیرا آن هم منتظم است)، پس می‌توانیم بگوییم $\overline{FE} = \overline{EK}$ و $\overline{FE} = \overline{ED}$ از تساوی $\overline{FE} = \overline{EK}$ نتیجه می‌گیریم $\overline{ED} = \overline{EK}$ ، پس دو ضلع مثلث EDK طول یکسان داشته و این مثلث متساوی‌الساقین است.

چون دو شکل همنهشت هستند، پس زوایای نظیر به نظیر برابرند:

$$\begin{aligned} 2x + 10^\circ &= 50^\circ \Rightarrow 2x = 40^\circ \Rightarrow x = 20^\circ \\ y - 40^\circ &= 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \Rightarrow y = 130^\circ + 40^\circ = 170^\circ \end{aligned}$$

دو شکل داده شده همنهشت هستند، پس اجزای متناظر دوجه دو باهم برابرند:

$$\begin{aligned} a - 3 &= 6 \Rightarrow a = 9 \\ a - b &= 70 \Rightarrow 9 - b = 70 \Rightarrow b = -61 \end{aligned}$$

دو شکل داده شده همنهشت هستند، پس اجزای متناظر دوجه دو باهم برابرند:

$$\begin{aligned} 3a - 10 &= 5 \Rightarrow 3a = 5 + 10 = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{3} = 5 \\ b - 20 &= 60 \Rightarrow b = 60 + 20 = 80 \end{aligned}$$

چون دو مثلث متقارن هستند، پس همنهشت هستند. اجزای متناظر آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 3 = 3 \\ 2a + 1 = 7 \Rightarrow 2a = 7 - 1 = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{2} = 3 \\ b - 2 = 3 \Rightarrow b = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z\hat{O}y &= 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ \\ z\hat{O}y \text{ نیمساز } om : m\hat{O}y &= \frac{z\hat{O}y}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ \\ m\hat{O}y \text{ متمم} &= 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ \end{aligned}$$

چون om نیمساز zOy است، پس:

$$\begin{aligned} z\hat{O}n &= n\hat{O}y = 55^\circ \Rightarrow z\hat{O}y = 55^\circ + 55^\circ = 110^\circ \\ \Rightarrow z\hat{O}x &= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \\ z\hat{O}x \text{ نیمساز } om &\Rightarrow m\hat{O}z = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABE : \hat{E} &= 180^\circ - (53^\circ + 61^\circ) = 66^\circ \\ \Rightarrow \triangle CDE : \hat{E} &= 66^\circ, \hat{D} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (90^\circ + 66^\circ) = 24^\circ \end{aligned}$$

زاویه خارجی C برابر است با: $180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$

$$\begin{aligned} \triangle CDE : \hat{E} &= 180^\circ - (12^\circ + 30^\circ) = 38^\circ \\ \Rightarrow \triangle ABE : \hat{E} &= 38^\circ, \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (90^\circ + 38^\circ) = 52^\circ \end{aligned}$$

۲۴

$$5^\circ + \hat{y} + 9^\circ = 18^\circ \Rightarrow \hat{y} = 18^\circ - (9^\circ + 5^\circ) = 18^\circ - 14^\circ = 4^\circ \Rightarrow \hat{y} = 4^\circ$$

$\hat{x} = \hat{y} = 4^\circ$ و \hat{y} متقابل به رأس هستند، در نتیجه:

۲۵

زاویه y با زاویه 100° متقابل به رأس هستند، پس: $\hat{y} = 100^\circ$

$$\hat{x} + \hat{y} + 2^\circ = 18^\circ \Rightarrow \hat{x} + 100^\circ + 2^\circ = 18^\circ \Rightarrow \hat{x} = 18^\circ - 102^\circ \Rightarrow \hat{x} = 6^\circ$$

۲۶

C وسط \overline{AB} ، پس $\overline{AC} = \overline{CB}$ D وسط \overline{BC} ، پس $\overline{CB} = 2\overline{DB}$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= 2\overline{DB} \Rightarrow \overline{AC} = 2 \times 4 = 8 \text{ cm} \\ \overline{AB} &= 2\overline{AC} = 2 \times 8 = 16 \text{ cm} \\ \overline{AD} &= \overline{AB} - \overline{DB} = 16 - 4 = 12 \text{ cm} \Rightarrow \overline{ED} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ cm} \\ \overline{EC} &= \overline{ED} - \overline{CD} = 6 - 4 = 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

۲۷

زاویه \hat{x} و $18^\circ - \hat{x}$ مکمل یکدیگرند:

$$\begin{aligned} (18^\circ - \hat{x}) - \hat{x} &= 10^\circ \Rightarrow 18^\circ - 2\hat{x} = 10^\circ \Rightarrow 2\hat{x} = 17^\circ \Rightarrow \hat{x} = 8.5^\circ \\ 18^\circ - \hat{x} &= 18^\circ - 8.5^\circ = 9.5^\circ \end{aligned}$$

۲۸

$$(9^\circ - \hat{x}) + 15^\circ = \hat{x} \Rightarrow 105^\circ = 2\hat{x} \Rightarrow \hat{x} = 52.5^\circ$$

مکمل \hat{x} را به دست می آوریم:

$$\hat{x} \text{ مکمل} = 18^\circ - \hat{x} = 18^\circ - 52.5^\circ = 127.5^\circ$$

۲۹

$$\left. \begin{aligned} AB = BC \\ BM = BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = BM \Rightarrow A_1 = M_1$$

$$B_1 = 60^\circ \Rightarrow B_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\widehat{AMC} = 360^\circ - (\overbrace{75^\circ + 60^\circ}^{135^\circ}) = 225^\circ$$

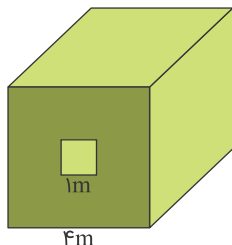
$$\xrightarrow{\Delta AMB} A_1 = M_1 = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

۳۰

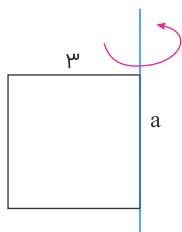
حجم مکعب، $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

شعاع استوانه برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است:

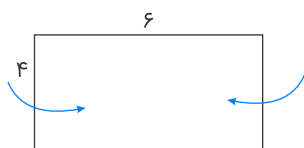
$$\begin{aligned} \text{حجم استوانه} &= \pi \times r \times r \times h = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \frac{3}{2} \\ \text{حجم فضای بین استوانه و مکعب} &= 8 - \frac{3}{2} = \frac{16}{2} - \frac{3}{2} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{متر مکعب} &= 4 \times 4 \times 4 = 64 \\ \text{متر مکعب} &= 1 \times 1 \times 4 = 4 \\ \Rightarrow \text{حجم مکعب توخالی} &= 64 - 4 = 60 \end{aligned}$$

شعاع قاعده استوانه برابر ۳ و ارتفاع آن a است:

$$V = \pi \times r \times r \times h = 3 \times 3 \times 3 \times a = 81 \Rightarrow a = \frac{81}{27} = 3$$



$$\begin{aligned} \text{محیط قاعده استوانه} &= 6 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{6}{2 \times 3} = 1 \\ \text{مساحت قاعده} &= \pi \times r \times r = 3 \times 1 \times 1 = 3 \\ \text{حجم استوانه} &= \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = 3 \times 4 = 12 \end{aligned}$$

ابتدا حجم حوض و حجم سطل را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{سانتی‌متر } 100, 400, 300 &: \text{ابعاد حوض} \\ \Rightarrow \text{سانتی‌متر مکعب} &= 300 \times 400 \times 100 = 12000000 \\ \text{سانتی‌متر مکعب} &= 20 \times 20 \times 50 \times 3 = 60000 \\ \Rightarrow \frac{12000000}{60000} &= 200 \end{aligned}$$

حجم هر دو استوانه را محاسبه و از هم کم می‌کنیم:

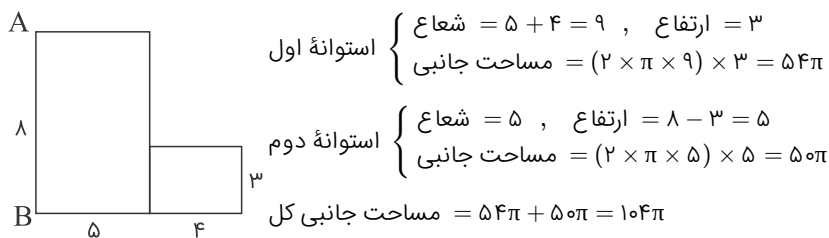
$$\begin{aligned} \text{حجم استوانه داخلی} &= \pi \times r \times r \times h = 3/14 \times 2 \times 2 \times 20 = 251/2 \\ \text{حجم استوانه خارجی} &= \pi \times r \times r \times h = 3/14 \times 3 \times 3 \times 20 = 565/2 \\ \Rightarrow \text{متر مکعب} &= 565/2 - 251/2 = 314 \end{aligned}$$

حجم مکعب = $2a \times 2a \times 2a = 8 \times a \times a \times a$

حجم استوانه = $a \times a \times \pi \times h = 3 \times a \times a \times h$

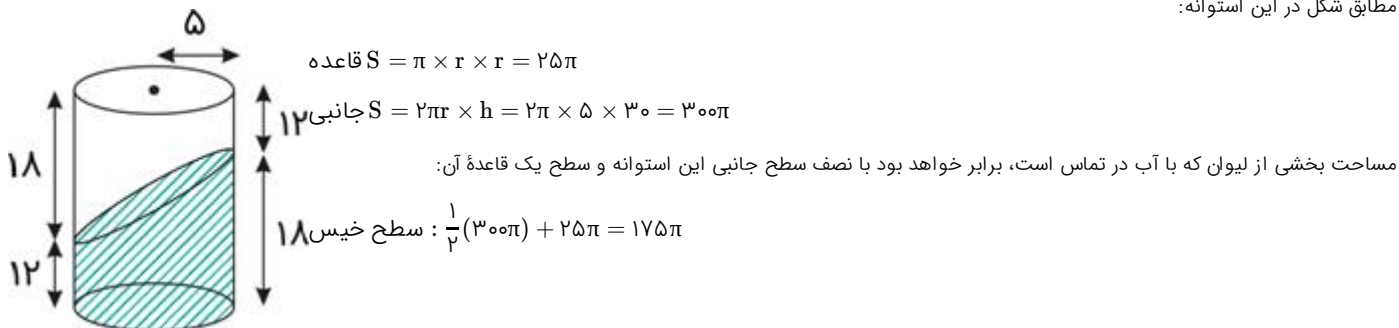
$\Rightarrow 8 \times a \times a \times a = 3 \times a \times a \times h \Rightarrow h = \frac{8}{3}a$

شکل حاصل برابر ۲ تا استوانه است.



گزینه ۲

اگر حجم ایجاد شده توسط آب را معکوس کرده و کنار آن بچسبانیم یک استوانه به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۳۰ ایجاد می‌شود. مطابق شکل در این استوانه:



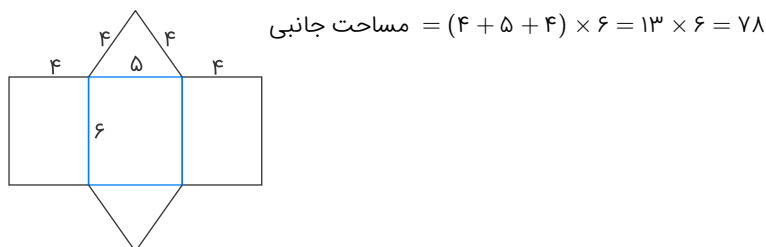
گزینه ۳

ارتفاع = ۳، شعاع = ۶ $\Rightarrow N = 6 \times 6 \times \pi \times 3 = 108\pi$

نکته: $\frac{3}{4} = 270^\circ$ درجه

$\Rightarrow \frac{3}{4} \times 108\pi = 81\pi$

گسترده منشور داده شده به صورت زیر است:



شکل حاصل از دورن یک استوانه به شعاع ۳ و ارتفاع a خواهد بود:

مساحت جانبی استوانه = $2 \times \pi \times r \times h = 2 \times 3 \times 3 \times a = 36$

$\Rightarrow a = \frac{36}{18} = 2$

$$\begin{aligned} \text{متر مربع} \quad ۳ \times ۴ = ۱۲ &= \text{مساحت سقف} \\ \text{متر مربع} \quad ۲ \times (۳ + ۴) \times ۲/۵ = ۱۴ \times ۲/۵ = ۳۵ &= \text{مساحت جانبی} \\ \Rightarrow ۱۲ + ۳۵ = ۴۷ &= \text{متر مربع} \\ \Rightarrow ۴۷ \times ۱۰۰ = ۴۷۰۰ &= \text{رنگ مورد نیاز} \end{aligned}$$

۴۷۰۰ گرم یعنی ۴ کیلو و ۷۰۰ گرم رنگ نیاز داریم.

مساحت کل استوانه شامل مساحت دو دایره و یک مستطیل است. طول مستطیل برابر با محیط قاعده است:

$$\begin{aligned} \text{متر مربع} \quad ۲ \times (۲ \times ۲ \times ۳) = ۲۴ &= \text{مساحت قاعده‌ها} \\ \text{متر مربع} \quad (۲ \times ۳ \times ۲) \times ۵ = ۶۰ &= \text{مساحت جانبی} \\ S_{\text{کل}} = ۶۰ + ۲۴ = ۸۴ &= \text{متر مربع} \end{aligned}$$

گزینه ۴

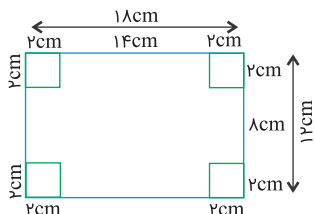
$$S = Fa^2 = ۲۵۶ \Rightarrow a^2 = ۶۴ \quad V = a^3 = ۸^3 = ۵۱۲$$

گزینه ۳

$$\begin{aligned} S_1 = ۶ = ۳ \times ۲, \quad S_2 = ۱۰ = ۵ \times ۲, \quad S_3 = ۱۵ = ۵ \times ۳ \\ V = ۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰ \end{aligned}$$

گزینه ۴

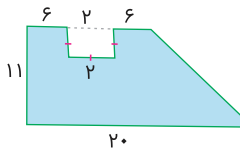
مطابق شکل زیر مکعب مستطیلی که ساخته می‌شود، دارای طول ۱۴ cm عرض ۸ cm و ارتفاع ۲ cm می‌باشد، بنابراین حجم جعبه ساخته شده برابر است با:



$$۱۴ \times ۸ \times ۲ = ۲۲۴ \text{ cm}^3$$

گزینه ۴

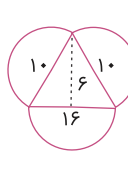
$$\begin{aligned} S &= \text{مربع} S - \frac{1}{4} (\text{دایره } S) \\ S &= ۵ \times ۵ - \frac{1}{4} (۳ \times ۳ \times ۳/۱۴) = ۲۵ - ۷/۰۶۵ = ۱۷/۹۳۵ \\ V &= S.h \\ \Rightarrow ۱۷/۹۳۵ \times ۱۲ &= ۲۱۵/۲۲ \end{aligned}$$



S مربع - S دوزنقه S قاعده

$$= \frac{(20 + 14) \times 11}{2} - 2 \times 2 = 187 - 4 = 183$$

حجم : $V = 183 \times 5 = 915$



S قاعده = S مثلث + S دایره کوچک + $\frac{1}{2}$ S دایره بزرگ

$$S \text{ قاعده} = \frac{16 \times 6}{2} + 5 \times 5 \times 3 + \frac{1}{2} (8 \times 8 \times 3) = 48 + 75 + 96 = 219$$

حجم : $V = 219 \times 18 = 3942$

حجم مکعب + حجم مکعب مستطیل = حجم شکل

$$= 8 \times a \times 5 + 5 \times 5 \times 5 = 40a + 125 = 625$$

$$\Rightarrow 40a = 500 \Rightarrow a = \frac{500}{40} = 12.5 \text{ m}$$

ارتفاع \times مساحت قاعده دوزنقه‌ای = حجم منشور

$$= \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times 2 \times 4 = 24 \text{ مکعب}$$

ارتفاع \times مساحت قاعده = حجم کل

$$= \frac{3}{4} \times \pi \times 3 \times 3 \times 6 = 121.5 \text{ مکعب}$$

ارتفاع \times مساحت قاعده = حجم منشور

$$= \left(\frac{1}{8} \times \pi \times 2 \times 2\right) \times 4 = 6 \text{ مکعب}$$

می‌دانیم حجم استخر برابر است با مساحت سطح آن ضرب در ارتفاع استخر:

$$\begin{aligned} \text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت نیم‌دایره} &= \text{مساحت سطح} \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 2 \times 2 + 2 \times 5 = 10 + 2\pi \approx 16/28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{مساحت سطح} &= \text{حجم استخر} \\ &= 16/28 \times 1 = 16/28 \end{aligned}$$

$$\text{واحد مکعب} = \frac{20}{100} \times (2 \times 2 \times 4) = 3/2$$

$$\text{واحد} = 0/4 \Rightarrow h \Rightarrow 3/2 = h \times 2 \times 4 \Rightarrow h = 0/4$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت قاعده منشور} &= (14 \times 8 - 2 \times 3) = 106 \\ \Rightarrow 424 = 106x &\Rightarrow x = \frac{424}{106} = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{6 \times 8}{2}\right) \times x = 360 \Rightarrow x = \frac{360}{24} = 15$$

کافی است مساحت قاعده منشور را محاسبه کرده و در ارتفاع آن ضرب کنیم. برای محاسبه مساحت قاعده منشور داده‌شده، مساحت نیم‌دایره به شعاع ۴ cm را از مساحت مستطیل به طول ۸ سانتی‌متر و عرض ۴ سانتی‌متر کم کنیم:

$$\text{مساحت مستطیل} = 4 \times 8 = 32 \text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت نیم‌دایره} = \frac{4 \times 4 \times 3/14}{2} = 25/12 \text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت قاعده شکل} = 32 - 25/12 = 6/88 \text{ cm}^2$$

$$\text{حجم شکل} = 6/88 \times 5 = 34/4 \text{ cm}^3$$

ابتدا مساحت قسمت رنگی را محاسبه کرده و سپس در ارتفاع ضرب می‌کنیم:

$$\text{مساحت مربع} = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت دایره} = 2 \times 2 \times 3/14 = 12/56 \text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت قاعده} = 36 - 12/56 = 23/44 \text{ cm}^2$$

$$\text{حجم شکل} = 23/44 \times 6 = 140/64 \text{ cm}^3$$

ابتدا مساحت نیم‌دایره را از مساحت دوزنقه کم می‌کنیم تا مساحت قسمت رنگی پیدا شود.

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{(۱۲۰ + ۸۰) \times ۶۰}{۲} = ۶۰۰۰ \text{ cm}^۲$$

$$\text{مساحت نیم‌دایره} = \frac{۲۰ \times ۲۰ \times ۳/۱۴}{۲} = ۶۲۸ \text{ cm}^۲$$

$$\text{مساحت قاعده} = ۶۰۰۰ - ۶۲۸ = ۵۳۷۲ \text{ cm}^۲$$

چون حجم شکل برابر $۲۶۸۶۰ \text{ cm}^۳$ است، پس:

$$۵۳۷۲ \times x = ۲۶۸۶۰ \Rightarrow x = \frac{۲۶۸۶۰}{۵۳۷۲} = ۵ \text{ cm}$$
 ارتفاع منشور

دو بردار \vec{e} و \vec{f} خلاف جهت نیستند، پس نمی‌توانند قرینه یکدیگر باشند.

$$A \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} -۳/۵ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad D \begin{bmatrix} ۰ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \quad D \begin{bmatrix} -۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} -۱/۲ \\ ۱ \\ +۱/۲ \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} ۱/۲ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \\ -۲/۲ \end{bmatrix} \quad D \begin{bmatrix} -۲/۵ \\ -۲/۵ \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} \quad D \begin{bmatrix} ۰ \\ -۳/۵ \end{bmatrix}$$

الف ۶۲

ب

پ

ت

پاسخ سؤالات ۶۳ تا ۶۵

$$\vec{a} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}, \quad \vec{b} \begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix}, \quad \vec{c} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \vec{b} \begin{bmatrix} ۰ \\ -۴ \end{bmatrix}, \quad \vec{c} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad \vec{b} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \vec{c} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix}, \quad \vec{d} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

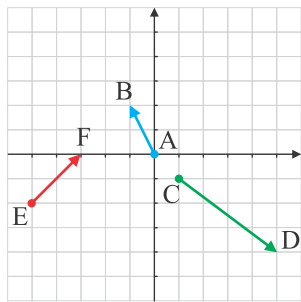
۶۳

۶۴

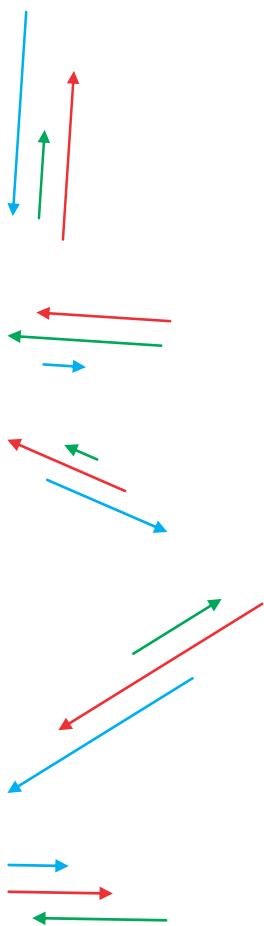
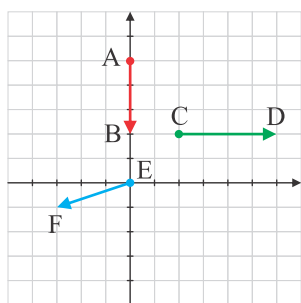
۶۵

پاسخ سؤالات ۶۶ تا ۶۷

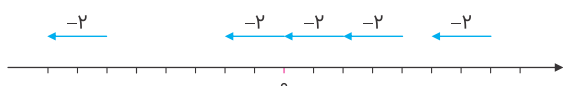
از آنجایی که مبدا رسم مشخص نشده است پس از هر جایی می‌توان رسم کرد.

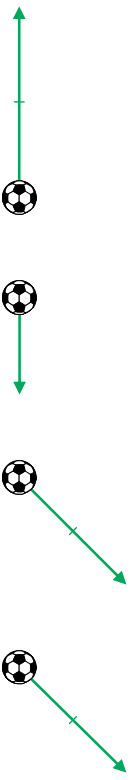


از آنجایی که مبدا رسم مشخص نشده است پس از هر جایی می‌توان رسم کرد.



هیچ دو برداری مساوی نیستند.

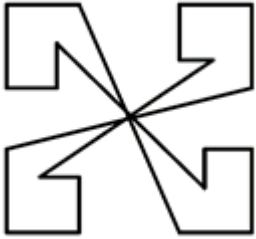




۱ تعداد محور تقارن و وضعیت مرکز تقارن یک پنج ضلعی منتظم کدام است؟

- (۱) صفر- دارد
 (۲) یک- ندارد
 (۳) پنج- دارد
 (۴) پنج- ندارد

۲ شکل زیر چند محور تقارن دارد؟

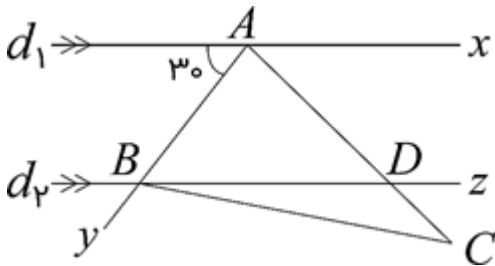


- (۱) صفر
 (۲) یک
 (۳) دو
 (۴) چهار

۳ کدام یک از گزینه‌های زیر تعداد محور تقارن بیشتری دارد؟

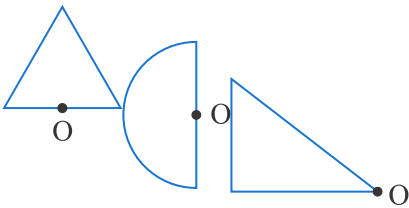
- (۱) شش ضلعی
 (۲) مربع
 (۳) پنج ضلعی منتظم
 (۴) متوازی‌الاضلاع

۴ در شکل زیر AC نیمساز زاویه $\hat{A}Bx$ می‌باشد و $\hat{C}Bz = \hat{C}By$ اگر $d_1 \parallel d_2$ باشد اندازه زاویه \hat{C} کدام است؟



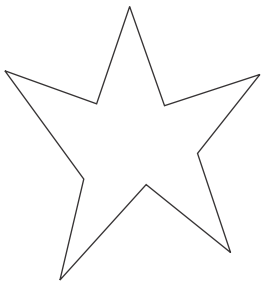
- (۱) ۲۵
 (۲) ۳۵
 (۳) ۴۵
 (۴) ۵۵

۵ شکل‌های زیر را طوری رسم کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد:



به سوالات زیر پاسخ دهید:

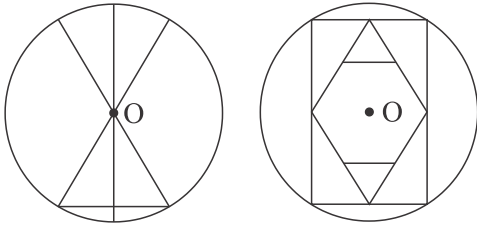
- ۶ آیا لوزی منتظم است؟
 ۷ آیا مستطیل منتظم است؟
 ۸ آیا ستاره پنج‌پر زیر منتظم است؟



۹ اگر رابطه زیر را داشته باشیم، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

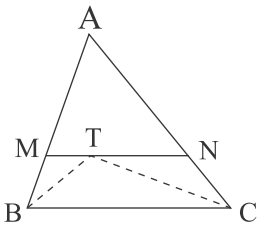
$$\begin{cases} a \parallel b \\ a \perp c \end{cases}$$

۱۰ مشخص کنید در کدام شکل، مرکز دایره مرکز تقارن شکل هم است.

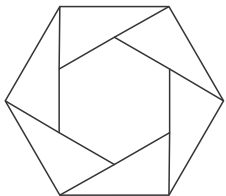


۱۱ در مثلث ABC ، $MN \parallel BC$ است. BT و CT نیمساز زاویه‌های B و C هستند. ثابت کنید:

$$MN = MB + NC$$



۱۲ در شکل زیر طول قطر کوچک شش ضلعی منتظم کوچک ۳ است. اندازه محیط و مساحت ۶ ضلعی منتظم بزرگ را به دست آورید.



گزینه ۴

۱

۱۱ ضلعی‌های منتظم به تعداد اضلاعشان محور تقارن دارند.
فرد ضلعی‌ها مرکز تقارن ندارند.

گزینه ۱

۲

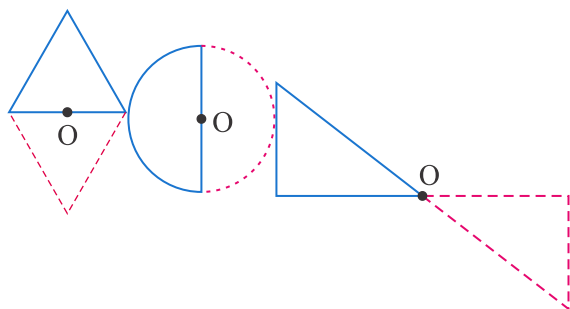
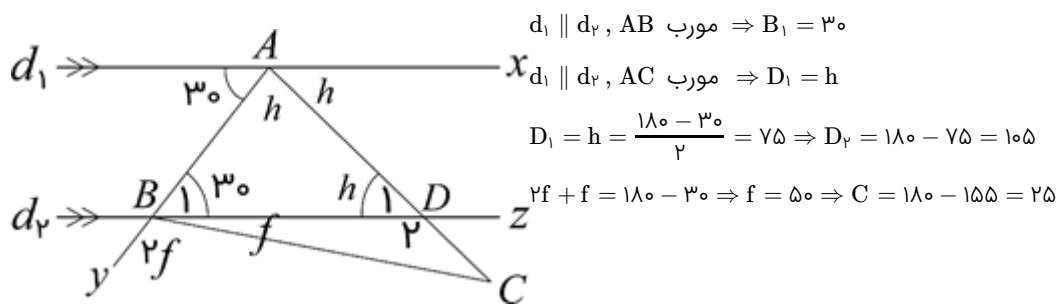
گزینه ۳

۳

پنج ضلعی منتظم، ۵ محور تقارن دارد که از بقیه گزینه‌ها بیشتر است؛ زیرا گزینه ۱ را نمی‌توان مشخص کرد. گزینه ۲ چهار محور تقارن دارد و گزینه ۴ محور تقارن ندارد.

گزینه ۱

۴



پاسخ سؤالات ۶ تا ۸

۶ خیر، زیرا زوایای آن باهم برابر نیستند.

۶

۷ خیر، زیرا اضلاع آن باهم برابر نیستند.

۷

۸ خیر، زیرا زوایای آن باهم برابر نیستند.

۸

$$\left. \begin{matrix} a \parallel b \\ a \perp c \end{matrix} \right\} \Rightarrow b \perp c$$

در شکل سمت چپ، O مرکز تقارن نیست؛ زیرا با 180° چرخش شکل، شکل تغییر می‌کند.
در شکل سمت راست، O مرکز تقارن است، زیرا با 180° چرخش شکل، شکل تغییر نمی‌کند.

$$\left. \begin{matrix} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ (1)} \\ MN \parallel BC \\ \text{مورب } BT \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{T}_1 \xrightarrow{(1)} \hat{B}_2 = \hat{T}_1 \Rightarrow BM = MT \quad (*)$$

$$\left. \begin{matrix} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \text{ (2)} \\ MN \parallel BC \\ \text{مورب } CT \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{T}_2 \xrightarrow{(2)} \hat{C}_1 = \hat{T}_2 \Rightarrow CN = NT \quad (**)$$

$\xrightarrow{(*),(**)} MN = MT + NT = BM + NC$

باتوجه به شکل، طول قطر کوچک شش ضلعی منتظم کوچک، همان طول ضلع بزرگ شش ضلعی منتظم بزرگ است. پس داریم:

$$a = 3 \Rightarrow P = 6 \times 3 = 18$$

شش ضلعی منتظم بزرگ از ۶ مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ تشکیل شده است، پس کافی است مساحت یک مثلث را حساب کنیم و در ۶ ضرب کنیم.

نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$\Rightarrow S = 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 \right) = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$