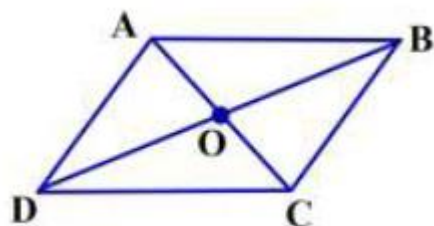




درس سوم

چهارضلعی ها





متوازی الاضلاع:

متوازی الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه‌رو دو به دو موازی باشند.

۱- در هر متوازی الاضلاع، اضلاع روبه‌رو با هم مساویند. $AB = DC$ و $AD = BC$

۲- در هر متوازی الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو با هم مساویند. $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$

۳- در هر متوازی الاضلاع، زاویه‌های مجاور به یک ضلع مکملند.

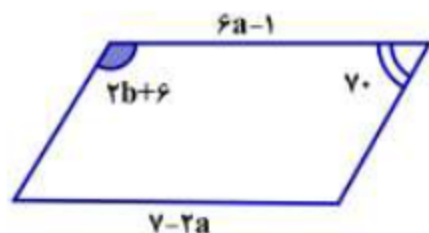
$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \quad \text{و} \quad \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \text{و} \quad \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \quad \text{و} \quad \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ$$

۴- در هر متوازی الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند. $AO = OC$ و $OB = OD$

۵- در هر متوازی الاضلاع، محل برخورد قطرهای، مرکز تقارن متوازی الاضلاع است (نقطه O)

(یادآوری: متوازی الاضلاع، محور تقارن ندارد)

سؤال ۱: با توجه به متوازی‌الاضلاع مقابل مقادیر خواسته شده را بدست آورید.



$$a = \dots$$

$$b = \dots$$

پاسخ: $a = 1$ و $b = 52$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند. پس $6a - 1 = 7 - 2a$ به کمک حل معادله مقدار

$$6a + 2a = 7 + 1 \rightarrow 8a = 8 \rightarrow a = \frac{8}{8} = 1 \rightarrow a = 1 \quad \text{a را تعیین می‌کنیم:}$$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور به یک ضلع مکملند. پس: $2b + 6 + 70 = 180$ به کمک حل معادله مقدار b را تعیین می‌کنیم:

$$2b = 180 - 76 = 104 \rightarrow 2b = 104 \rightarrow b = \frac{104}{2} = 52 \rightarrow b = 52$$

مستطیل:

اگر در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌ها قائمه (90°) باشند، مستطیل بوجود می‌آید. بنابراین مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است

که زاویه‌های قائمه دارد.

می‌توان ویژگی‌های مستطیل را به صورت زیر نوشت:

۱- در هر مستطیل، همه زاویه‌ها با هم برابرند. $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ$

۲- در هر مستطیل، ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند. $AB = DC$ و $AD = BC$

۳- در هر مستطیل، قطر‌ها با هم برابرند. $AC = BD$

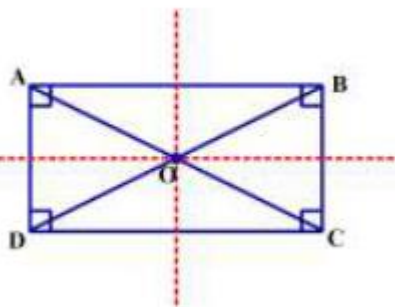
۴- در هر مستطیل، قطر‌ها یکدیگر را نصف می‌کنند. $OA = OC = OB = OD$

(یادآوری: هر مستطیل دو محور تقارن دارد:

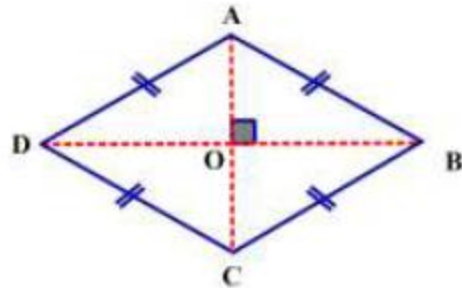
۱- خطی که از وسط طول‌ها می‌گذرد. ۲- خطی که از وسط عرض‌ها می‌گذرد)

* تذکر: قطر‌ها در مستطیل محور تقارن نیستند.

* تذکر: در مستطیل قطر‌ها بر هم عمود نیستند.



◀ لوزی :



اگر در متوازی الاضلاع، همه ضلع‌ها برابر باشند. لوزی به وجود می‌آید.

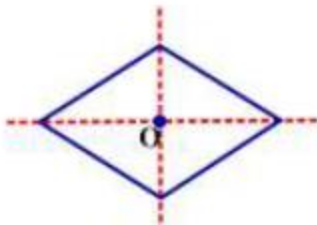
بنابراین لوزی، متوازی الاضلاعی است که ضلع‌های برابر دارد.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

با توجه به اینکه لوزی نوعی متوازی الاضلاع است، علاوه بر همه ویژگی‌های متوازی الاضلاع، ویژگی دیگری نیز دارد.

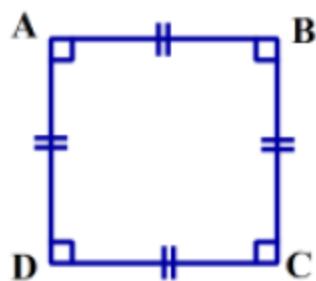
«در هر لوزی قطرها بر هم عمودند $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ »

(یادآوری: در هر لوزی قطرها محور تقارن هستند و محل برخورد قطرها، مرکز تقارن (نقطه O) لوزی است.)



مربع:

اگر در متوازی‌الاضلاع، همه ضلعها هم‌اندازه و هم‌زاویه‌ها قائمه باشند، مربع به وجود می‌آید. بنابراین مربع،

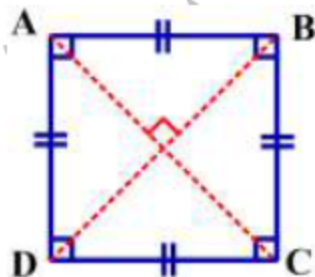


متوازی‌الاضلاعی است که هم ضلع‌های مساوی و هم زاویه‌های قائمه دارد.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

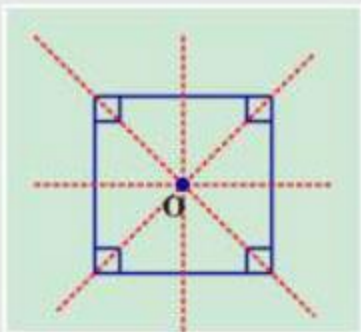
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

در مربع تمام ویژگی‌های یک متوازی‌الاضلاع وجود دارد علاوه بر همه ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، ویژگی‌های زیر را هم دارد:



۱- در هر مربع قطرها با هم برابرند. $AC = BD$

۲- در هر مربع قطرها بر هم عمودند. $AC \perp BD$



نکته ۱: هر مربع چهار محور تقارن دارد:

۱- دو قطر

۲- خطوطی که از وسط هر دو ضلع روبه‌رو می‌گذرند.

محل برخورد خط‌های تقارن، مرکز تقارن (نقطه O) مربع است.

نکته ۲: هر مربع هم نوعی متوازی‌الاضلاع، هم نوعی لوزی و هم نوعی مستطیل است. زیرا ویژگی‌های

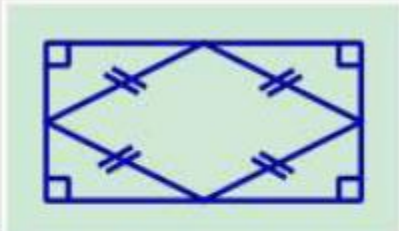
متوازی‌الاضلاع، لوزی و مستطیل را دارد.

نکته ۳: اگر وسط‌های اضلاع یک مربع را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده باز هم مربع خواهد بود.

(با استفاده از خط‌های تقارن در مربع و تا زدن مربع روی این خطوط می‌توان به درستی این مطلب پی برد)

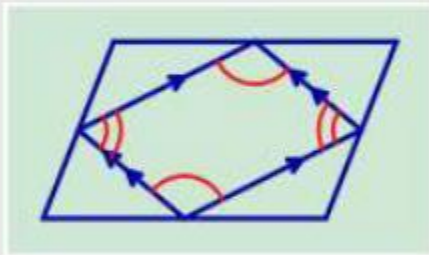


نکته ۴: اگر وسط‌های اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده یک لوزی خواهد بود.
(با استفاده از خط‌های تقارن در مستطیل و تا زدن مستطیل روی این خطوط می‌توان به درستی این مطلب پی برد)

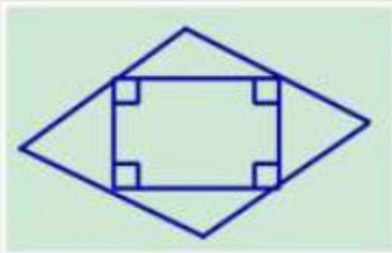


نکته ۵: اگر وسط‌های اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده، یک

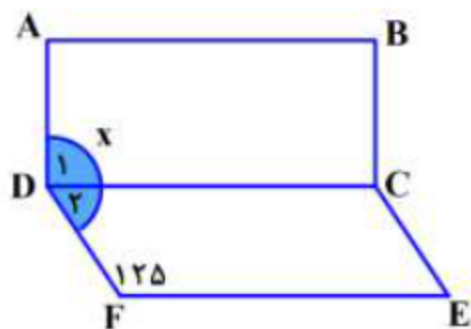
متوازی‌الاضلاع خواهد بود.



نکته ۶: اگر وسط‌های اضلاع یک لوزی را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده، یک مستطیل خواهد بود.



سؤال ۲: در شکل مقابل، مستطیل $ABCD$ و متوازی الاضلاع $DCEF$ متوازی الاضلاع است. مقدار زاویه \hat{x} چند درجه است؟



(ب) 145°

(الف) 155°

پاسخ: (ب) 145°

$$\hat{x} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

$$\hat{D}_1 = 90^\circ \text{ و } \hat{D}_2 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

◀ سؤال ۳: جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر وسطهای اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل خواهد بود.

ب) در متوازی‌الاضلاع، محل برخورد قطرها، شکل است.

ج) لوزی که دو قطر مساوی دارد، نام دارد.

د) متوازی‌الاضلاعی که یک زاویه قائمه دارد نام دارد.

پاسخ:

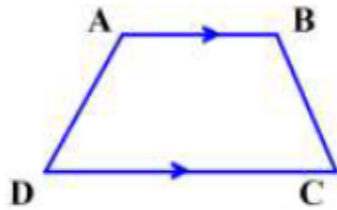
الف) لوزی

ب) مرکز تقارن

ج) مربع

د) مستطیل

◀ دوزنقه :



چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد، دوزنقه نام دارد. ($AB \parallel DC$)

به دو ضلع موازی قاعده و به دو ضلع دیگر که با هم موازی نیستند ساق می گویند.

* تذکر: در دوزنقه زاویه های روبه رو با هم مساوی نیستند و قطرهای یکدیگر را نصف نمی کنند.

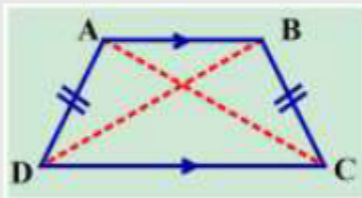
نکته ۷: در هر دوزنقه دو زاویه مجاور به هر ساق مکملند. $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ و $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$



نکته ۸: اگر در دوزنقه دو ساق مساوی باشند، دوزنقه متساوی الساقین خواهد بود.

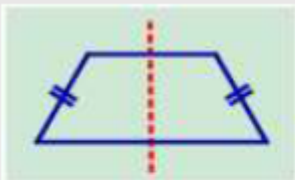


پس دو زاویه مجاور به هر قاعده با هم برابرند



$$\overline{AD} = \overline{BC} \quad \text{و} \quad \widehat{A} = \widehat{B} \quad \text{و} \quad \widehat{D} = \widehat{C}$$

و دو قطر نیز با هم برابرند. $AC = BD$



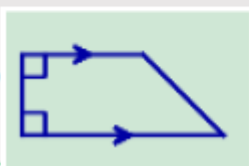
نکته ۴: ذوزنقه متساوی الساقین یک خط تقارن دارد



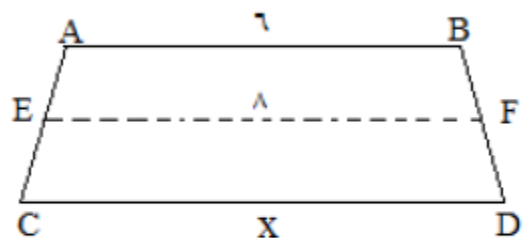
نکته ۵: اگر در ذوزنقه یکی از ساقها بر دو قاعده عمود باشد ذوزنقه قائم الزاویه خواهد بود.



ساق قائم



۵) پاره خطی که وسط های دو ساق دوزنقه متساوی الساقین را بهم وصل می کند موازی قاعده هاست و اندازه ی آن



برابر نصف مجموع دو قاعده است.

$$EF \parallel AB \parallel CD \quad EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

مثال) $\frac{6+X}{2} = 8 \Rightarrow 6+X = 16 \Rightarrow X = 10$

