

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ

الرَّحِيمِ

جزوه هندسه پایه هشتم

فصل ششم

مثلث

استاد: جناب آقای گودرزی

دبیرستان علوی

رَسُولُ اللَّهِ ﷺ: كُلُّ أَمْرٍ ذِي بَالٍ لَا يُبْدَأُ فِيهِ بِ«بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ» أَقْطَعُ  
هر کار مهمی که با «بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ» آغاز نشود بی فرجام  
است

منتخب میزان الحکمه ج ۳۱۳۲

ریاضی هشتم

فصل 6

مثلث

درس اول

رابطه ی فیثاغورس

صفحات 84 تا 87

٦

فصل

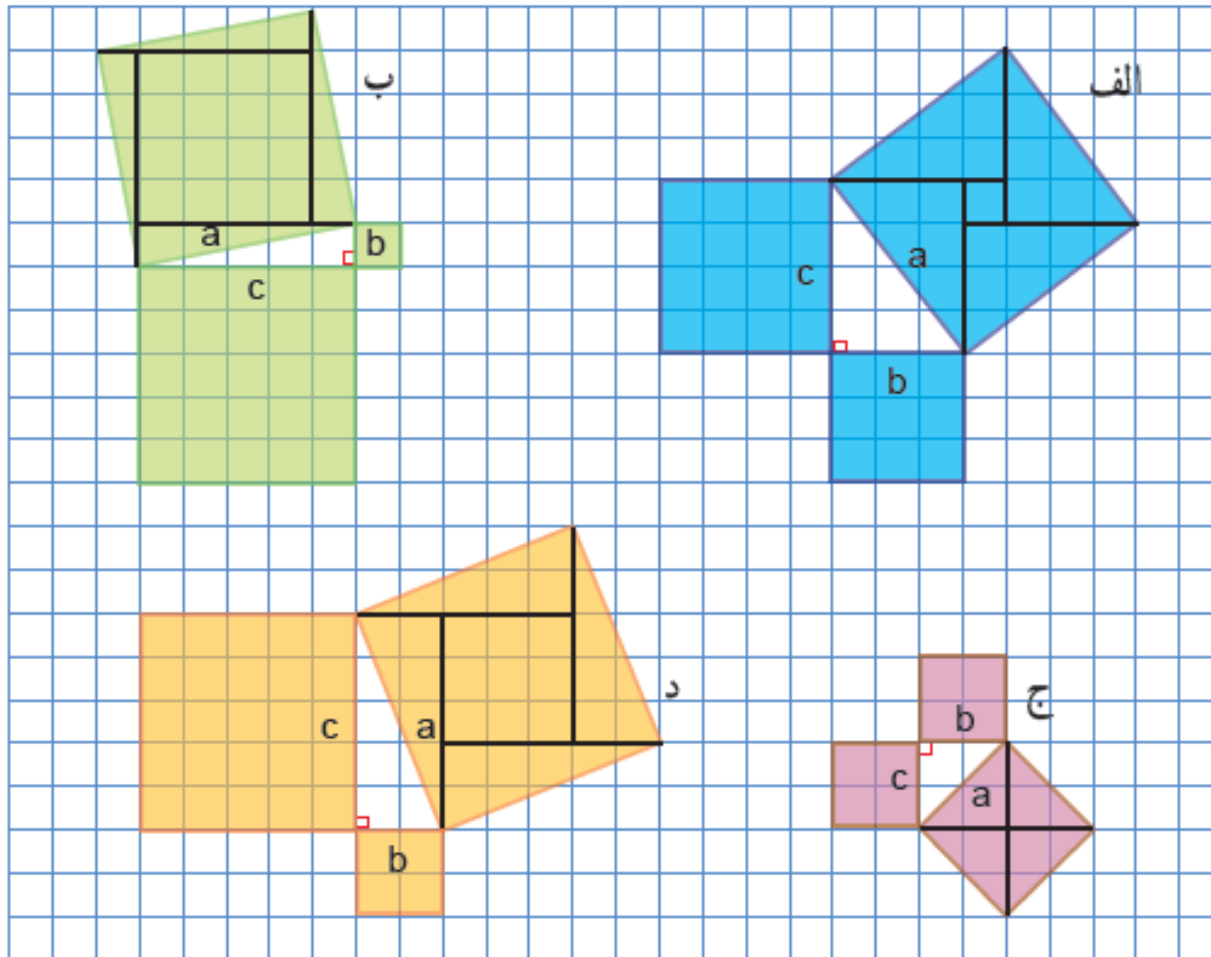
مثلث

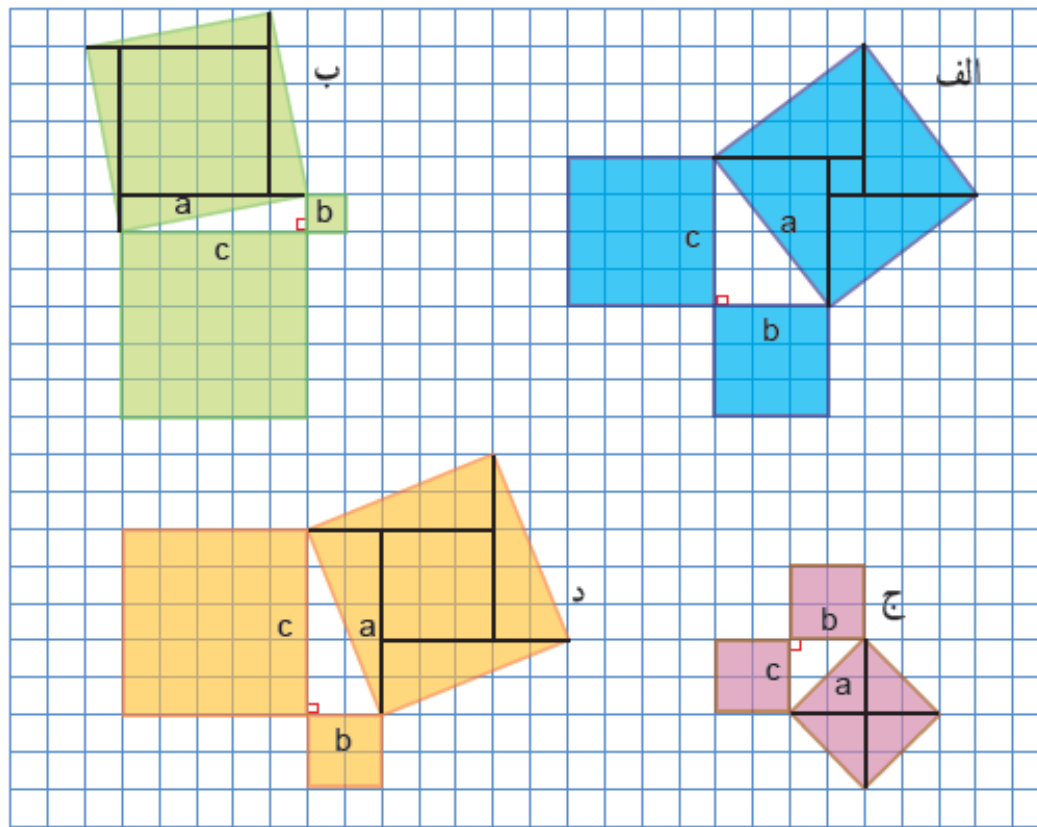
قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ... (سوره عنكبوت آيه ٢٠)





۱- روی هر ضلع مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر یک مربع رسم کرده‌ایم. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع‌های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.



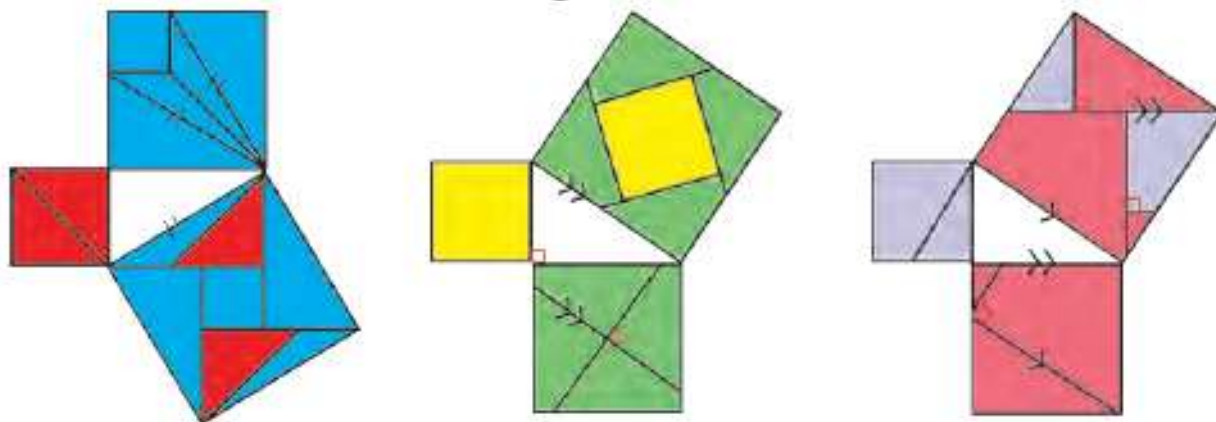


مساحت مربع ساخته شده روی ضلع $c$ : $c^2$	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع $b$ : $b^2$	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع $a$ (وتر): $a^2$	
۱۶	۹	۲۵	الف
25	1	26	ب
4	4	8	ج
25	4	29	د

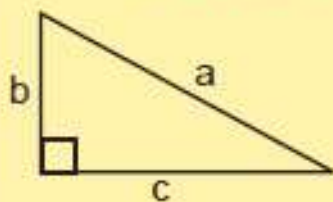
بین عددهای هر سطر چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟  
 $a^2 = b^2 + c^2$

۲- به هر یک از شکل‌های زیر با دقت نگاه کنید. در هر شکل روشی برای نمایش دادن رابطه میان مساحت مربع‌های تشکیل شده روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه آمده است.

شما هم روی کاغذ، یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی تشکیل دهید. سپس، با استفاده از یکی از این روش‌ها مربع‌های ساخته شده روی دو ضلع کوچک آن را طوری به قطعه‌های کاغذی تقسیم کنید که بتوان با این قطعه‌ها مربع روی وتر را کاملاً پوشاند.



رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه، به **رابطه فیثاغورس** معروف است.

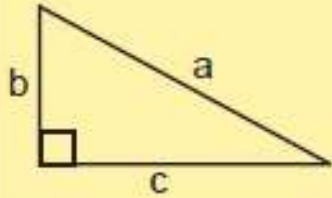


این رابطه بیان می‌کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع های مثلث قائم الزاویه، به **رابطه فیثاغورس** معروف است.



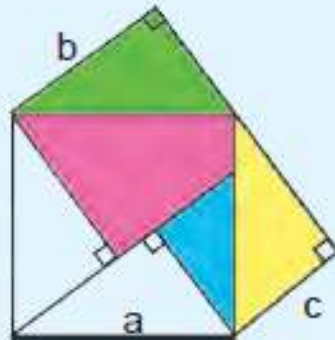
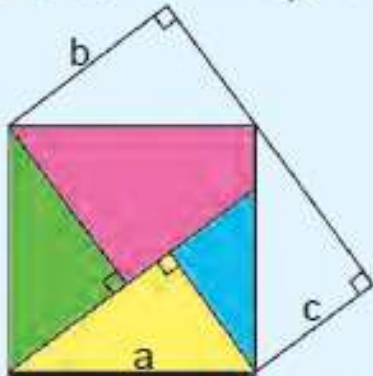
این رابطه بیان می کند که در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

### خواندنی

ابوالعباس نیریزی، ریاضی دان ایرانی، در حدود هزار سال پیش درستی رابطه فیثاغورس را به صورت زیر نشان داد.



در شکل، چهار مثلث قائم الزاویه هم نهشت<sup>۱</sup> دیده می شود.

در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع های زاویه قائمه مثلث ساخته شده اند، و در سمت چپ مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده ایم. چرا مساحت ناحیه رنگی در این دو شکل برابر است؟

مثلث سبز سمت راست با دوران در خلاف عقربه ساعت مانند شکل سمت چپ همیشه و مثلث زرد سمت راست هم با دوران در جهت عقربه ساعت مانند شکل سمت چپ هم دیده می شود. بنابراین مساحت های رنگی در دو شکل برابرند.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

کاردر کلاس



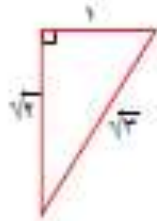
۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث های قائم الزاویه زیر بررسی کنید.

$$9^2 = 7^2 + 5^2$$

$$81 = 49 + 25$$

$$81 = 74$$

$$x = \sqrt{2}$$



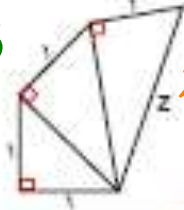
$$(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$3 = 2 + 1$$

$$3 = 3$$

$$y = \sqrt{3}$$

$$z = 2$$



فعالیت



۱- در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را

مانند نمونه پیدا کنید.



$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = 12$$

$$5^2 = y^2 + 4^2$$

$$25 = y^2 + 16$$

$$y^2 = 25 - 16 = 9$$

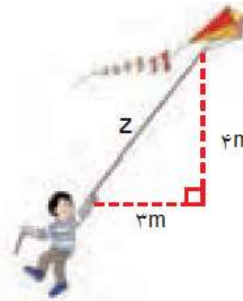
$$y = 3$$



$$z^2 = 3^2 + 4^2$$

$$z^2 = 9 + 16 = 25$$

$$z = 5$$

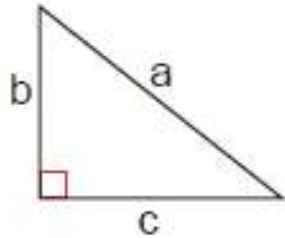


۲- تساوی های جبری زیر را کامل کنید.

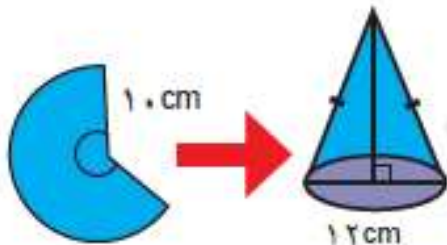
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$



۸۶



### کار در کلاس



۱- علی با قسمتی از دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی به قطر قاعده ۱۲ سانتی متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

$$x^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$x = \sqrt{64} = 8$$

۸۷

۲- معلم ریاضی از دانش آموزان خواست پاره خطی به طول  $\sqrt{10}$  سانتی متر رسم کنند.  
در اینجا پاسخ سه دانش آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی های آنها گفت و گو کنید. کدام دانش آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

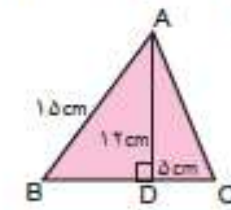
<p><b>هندسی</b></p> <p><b>زهرا:</b></p> <p>به همین ترتیب، ساختن مثلث های قائم الزاویه را ادامه می دهیم تا <math>\sqrt{10}</math> ساخته شود.</p>	<p><b>سیما:</b></p> <p><b>حسابی و هندسی</b></p> <p>مثلث قائم الزاویه با ضلع های ۱ و ۳ سانتی متر رسم می کنیم. <math>1^2 + 3^2 = 10</math> پس وتر آن <math>\sqrt{10}</math> سانتی متر خواهد شد.</p>	<p><b>مهسا:</b></p> <p><b>حسابی</b></p> <p>به کمک ماشین حساب <math>\sqrt{10}</math> را حساب می کنم. <math>\sqrt{10} = 3.16</math> حالا به کمک خط کش یک پاره خط به طول تقریباً ۳/۱ سانتی متر رسم می کنم.</p>
---	---	---

۲- کدام مثلث قائم الزاویه است؟  
 $10^2 \neq 7^2 + 6^2$

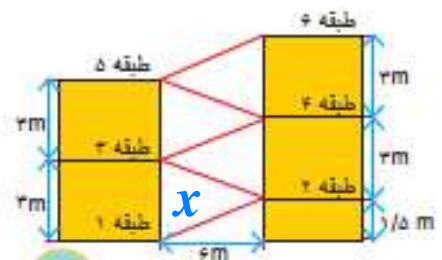


$10^2 = 8^2 + 6^2$

۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید.



$BD^2 = 15^2 - 12^2$   
 $BD^2 = 225 - 144 = 81$   
 $BD = \sqrt{81} = 9$   
 $AC^2 = 12^2 + 5^2$   
 $AC^2 = 144 + 25 = 169$   
 $AC = 13$   
**محیط = 15 + 14 + 13 = 42**



۳- شکل رو به رو نمای از یک پارکینگ طبقاتی را نشان می دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه بعدی می رساند، چقدر است؟

$x^2 = 6^2 + 1/5^2 = 36 + 2/25 = 38/25$   
 $x = 6/18$

ریاضی هشتم

فصل 6

مثلث

درس دوم

شکل های هم نهشت

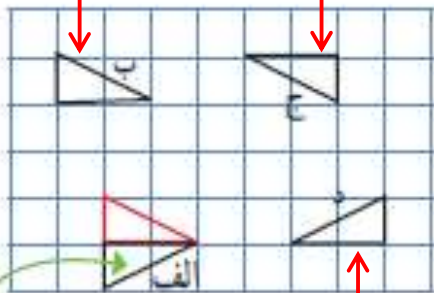
صفحات 88 تا 91

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر **هم نهشت** اند.

فعالیت



انتقال      دوران و انتقال



تقارن محوری

تقارن محوری

۱- در شکل روبه‌رو، مثلث‌های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده‌اند و با آن هم نهشت‌اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل‌های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است.  
ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی در این پنج مثلث را با علامت‌گذاری روی شکل نشان دهید.

$$\triangle ABC \cong \triangle GHF$$

۲- این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند:

پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند.

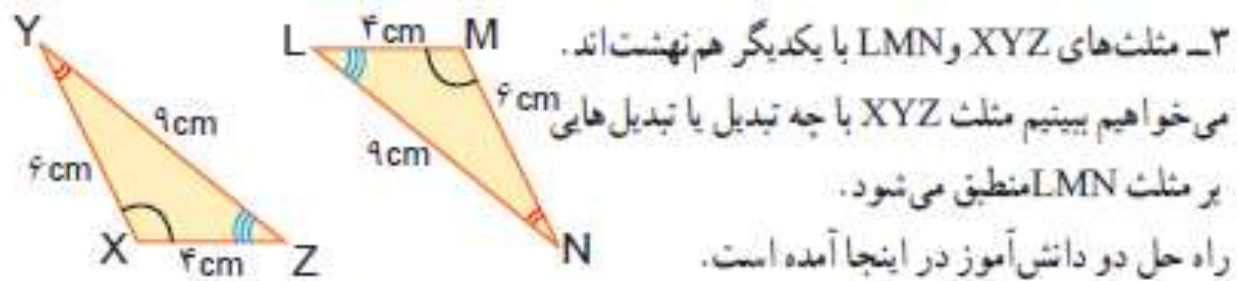
با توجه به علامت‌های روی شکل‌ها، تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$$\hat{A} = \hat{G} \quad \hat{B} = \hat{H} \quad \hat{C} = \hat{F}$$

$$\overline{BC} = \overline{HF} \quad \overline{AC} = \overline{GF} \quad \overline{AB} = \overline{GH}$$



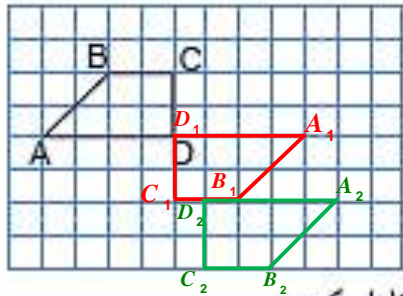


شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح دهید. سپس راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل های درست بی شماری برای این مسئله وجود دارد.



<p><b>راه حل حامد:</b> با یک دوران <math>180^\circ</math> حول نقطه X می توانیم مثلث XYZ را بر مثلث قرمز رنگ منطبق کنیم و سپس با یک انتقال، مثلث قرمز را بر مثلث LMN منطبق کنیم.</p>	<p><b>راه حل محمد:</b> با یک دوران <math>180^\circ</math> حول نقطه O می توان مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کرد.</p>
---	---

## کار در کلاس



۱- تصویر ذوزنقه ABCD را پس از دوران  $180^\circ$  حول

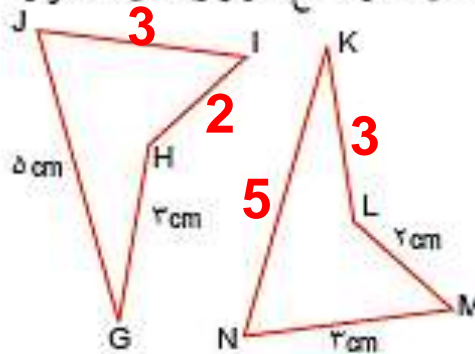
نقطه D رسم کنید و آن را  $A_1B_1C_1D_1$  بنامید.

سپس آن را با بردار  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  انتقال دهید.

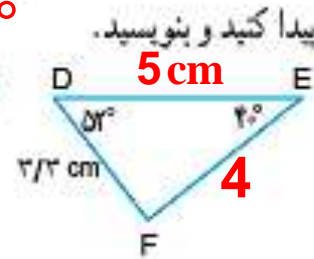
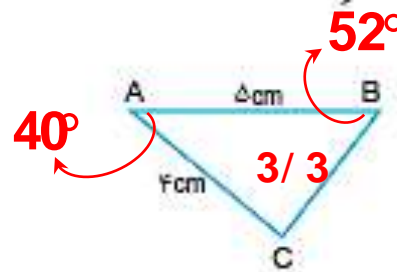
شکل جدید را نام گذاری کنید و عبارت هم نهستی شکل ها را کامل کنید.

$$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$$

۲- با توجه به هم نهستی شکل های هر قسمت، در صورت امکان اندازه ضلع ها و زاویه های متناظر را



$$GHIJ \cong KLMN$$

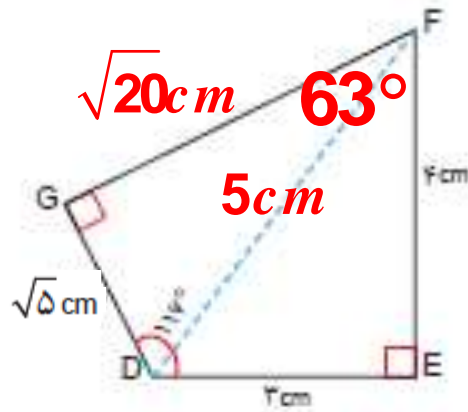
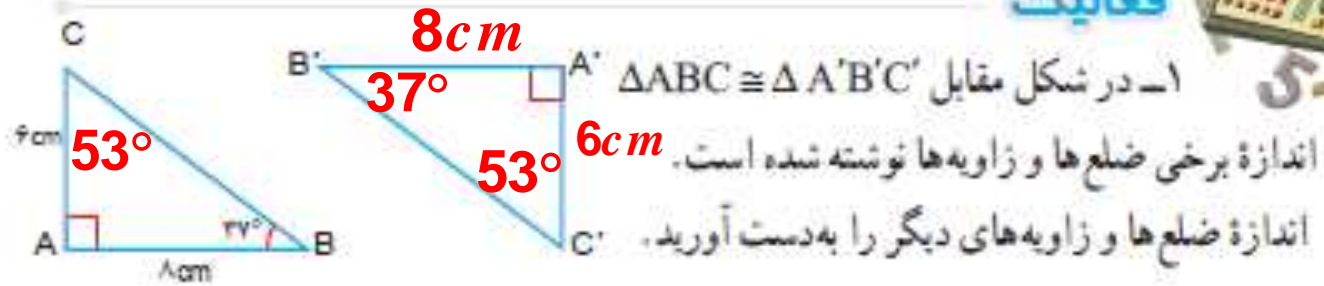


$$ABC \cong DEF$$

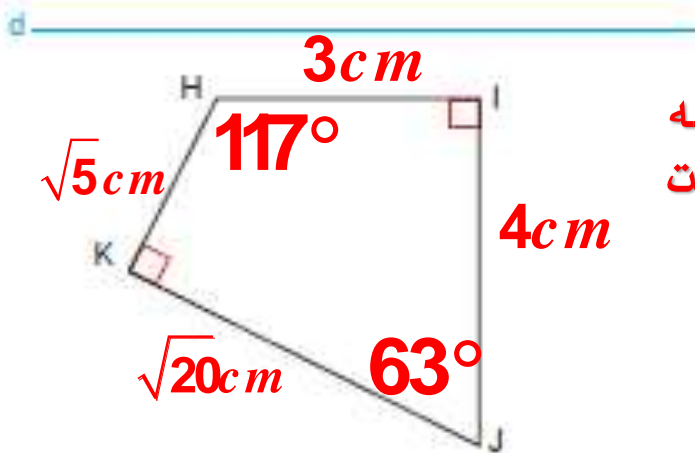
۳- دیواره های کنار پل از مثلث های قائم الزاویه هم نهست ساخته شده اند.



زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص و اندازه هر یک از زاویه های یکی از مثلث ها را بنویسید.



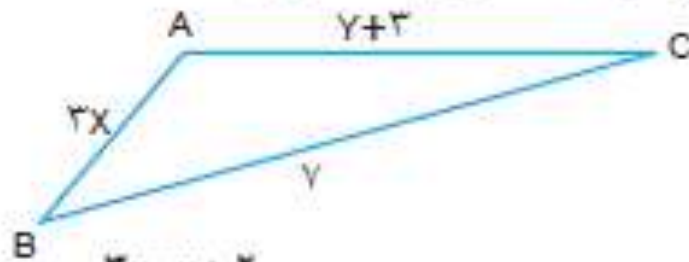
۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK را به دست آورده‌ایم. اندازه برخی از ضلع‌ها و زاویه‌ها معلوم است. اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر این چهارضلعی را به دست آورید.



با دوبار استفاده از رابطه فیثاغورس اندازه GF به دست می‌آوریم. دوبار رابطه‌هایی که از آنها در این دو سؤال استفاده کرده‌اید، با هم گفت‌وگو کنید.



۳- مثلث ABC را می توان با انتقال، بر مثلث A'B'C' منطبق کرد.  
مانند نمونه، با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع های مثلث ها را به دست آورید.



$$2x = x + 2$$

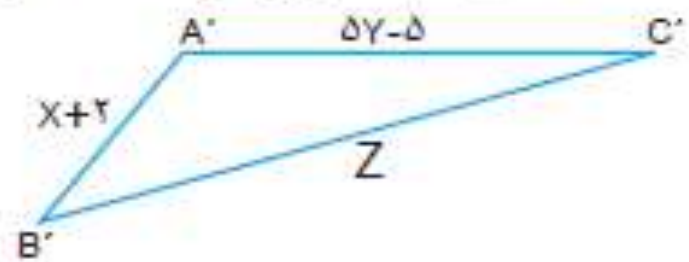
$$2x - x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 1$$

$$\overline{AB} = 2x = 2$$

$$\overline{A'B'} = x + 2 = 1 + 2 = 3$$



$$Y + 3 = 5Y - 5 \quad \overline{BC} = \overline{B'C'} = Z = 7$$

$$Y - 5Y = -5 - 3$$

$$-4Y = -8$$

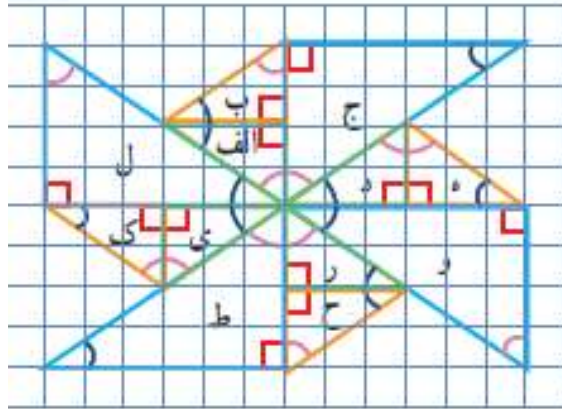
$$Y = 2$$

$$\overline{AC} = Y + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$\overline{A'C'} = 5Y - 5 = 10 - 5 = 5$$



## تمرین



۱- در شکل رو به رو زاویه‌های مساوی را با رنگ‌های یکسان مشخص کرده‌ایم. کدام مثلث‌ها با مثلث الف هم‌نهشت‌اند؟ **ب د ه ز** مانند نمونه مشخص کنید که با چه تبدیل یا تبدیلی می‌توان مثلث الف را بر مثلث‌های هم‌نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید. پاسخ‌هایتان را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ا ن دور  $180^\circ$  ← ز ← انتق  
 ل الف ← ی ← تقارن  
 ف ک ← ی ← محوری

دوران  $180^\circ$  (الف) ← (ه)

تقارن (ب) ← انتقال (د)

۲- سازه‌های مثلثی که در این پل به کار رفته‌اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری

زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می‌شوند.

$$\triangle ABC \cong \triangle BCD$$

الف) کدام زاویه مثلث ABC روبه روی ضلع

BC است؟ **A**

ب) کدام زاویه مثلث BCD روبه روی ضلع

BC است؟ **D**

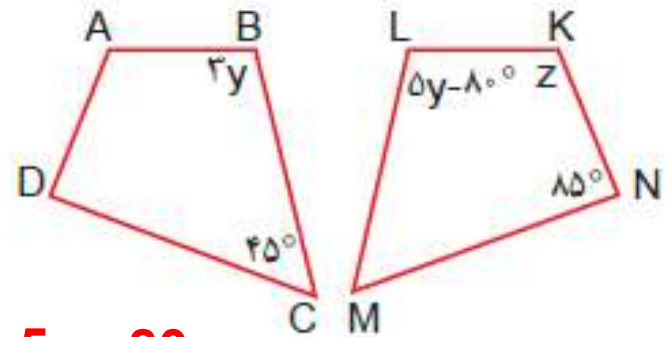
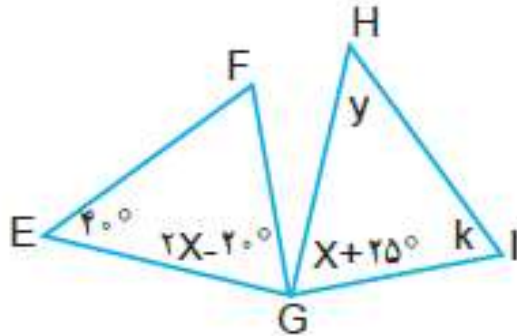


ج) مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق می‌کنیم. کدام زاویه این مثلث با زاویه A متناظر است؟ **D**

۳- زاویه‌های مجهول را بیابید.

الف) مثلث HIG حاصل دَوَران  $90^\circ$  درجه EFG حول نقطه G است.

ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



$$2x - 20 = x + 25$$

$$3y = 5y - 80$$

$$2x - x = 25 + 20$$

$$3y - 5y = -80$$

$$x = 45^\circ$$

$$-2y = -80$$

$$\widehat{M} = 45$$

$$y = 40^\circ$$

$$y = 40^\circ$$

$$k = 70^\circ$$

$$z = 360 - (85 + 45 + 5(40) - 80) = 110^\circ$$

ریاضی هشتم

فصل 6

مثلث

درس سوم

مثلث های هم نهشت

صفحات 92 تا 95

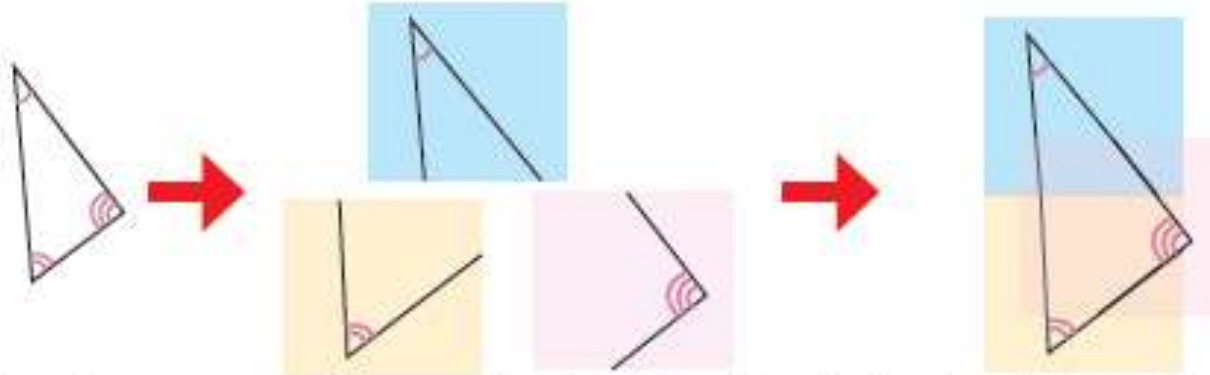
## مثلث های هم نهشت



## فعالیت



آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت های هندسه بودند. معلم ریاضی مثلثی روی کاغذ رسم کرد. سپس، تصویر زاویه های آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب روبه رو ساختند.



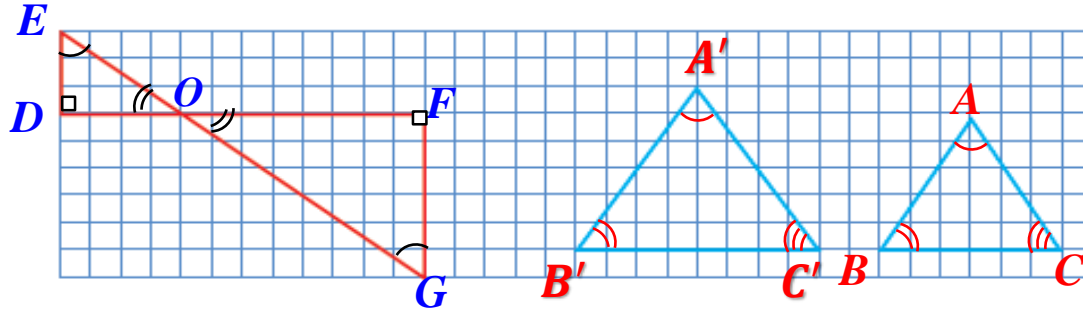
فکر می کنید مثلثی که آنها ساخته اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟ **لزوما خیر**  
آیا آنها می توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟

بله ممکن است در صورتیکه از خط

بناکش این دو مثلث با سه زاویه مساوی ممکن است هم نهشت نشوند.



۱- زاویه‌های مساوی را در هر قسمت علامت گذاری کنید.

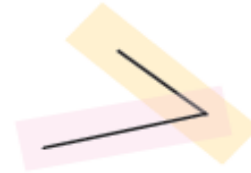
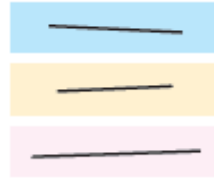
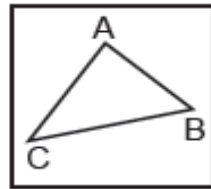


۲- شکل‌های سؤال قبل را نام گذاری کنید و تساوی زاویه‌ها را بنویسید.

فعالیت



۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر ضلع‌های آن را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن‌گاه از بچه‌ها خواست مثلثی بسازند که ضلع‌هایش با این سه ضلع برابر باشد.

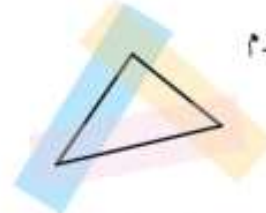


سامان مثلث مورد نظر را به این ترتیب ساخت :

مرحله اول



مرحله دوم



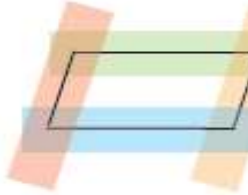
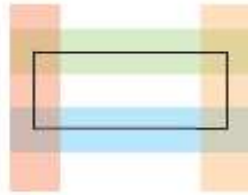
۹۲

۹۳

آرمان مطمئن بود مثلثی که سامان ساخته است، با مثلث معلم ریاضی هم‌نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید: «فکر می‌کنی اگر ضلع‌های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل حتماً با یکدیگر هم‌نهشت‌اند؟»  
 آرمان گفت: «نه، من می‌گویم اگر ضلع‌های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع‌هایشان مساوی است، با یکدیگر هم‌نهشت نیستند.»

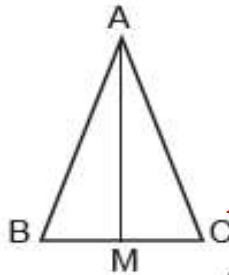
سپس، با کاغذ پوستی دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.



**نتیجه: اگر ضلع‌های دو مثلث با هم مساوی باشد دو مثلث هم‌نهشتند اما در مورد چند ضلعی‌های دیگر اینطور نیست.**

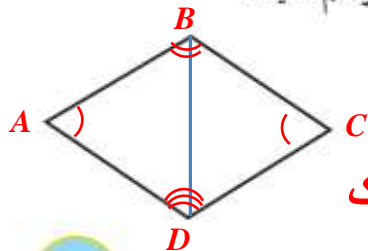
۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. پاره خطی مانند AM که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند میانه می‌نامیم.

عبارت‌های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.  
 $AB = AC$  چون ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند.



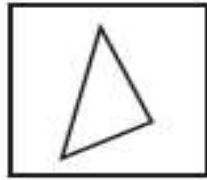
چون  $BM = CM$  **AM میانه وارد بر**  
 AM هم ضلع مشترک دو مثلث است. **ضلع BC است.**  
 $ABM = ACM$  هم‌نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید.

۲- الف) لوزی مقابل را نام گذاری کنید و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.  
 ب) دلیل تساوی ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.  
 ج) زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.



ب)  $AB = CB$  ضلع‌های لوزی **BD ضلع مشترک**  
 $AD = CD$  اضلاع. **های لوزی است.**

## فعالیت



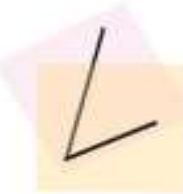
مثلی رسم کنید.

سپس دو ضلع آن و زاویه

بین آن دو ضلع را روی سه برگ

کاغذ پوستی بکشید.

مرحله اول

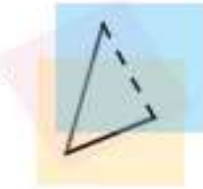


اکنون سعی کنید مثلی بسازید که دو ضلع آن با این

دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم

برابر زاویه رسم شده باشد.

مرحله دوم



آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟ **بل**

آیا با این شرایط می توانید مثلی بسازید که با **ی** مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟ **خی**

**ر**

## کارد در کلاس



در شکل مقابل نیمساز زاویه روبه رو به قاعده مثلث متساوی الساقین

ABC را رسم کرده ایم.

عبارت های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث

ABD و ADC با هم هم نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.

چون  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ؛ **ساقهای مثلث متساوی**

چون  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ؛ **السااقین هستند**.

AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. **ABD = ACD**



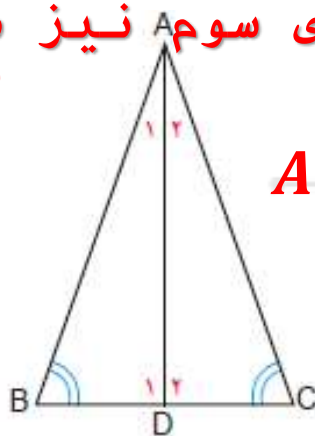


مثلی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.  
سعی کنید مثلی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟ **بل**

آیا می‌توانید مثلی بسازید با همین شرایط که با مثلی اولیه هم نهشت نباشد؟ **خیر**

اگر دو زاویه از مثلی با دوزاویه از مثلث دیگر با هم مساوی شود آنگاه زاویه های سوم نیز مساویند  $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$   
AD ضلع مشترک و نیمساز  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$   
زاویه A است در هر دو کلاسش  $\triangle ABD = \triangle ACD$  بنا بر این



در شکل مقابل زاویه های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه A را رسم کرده ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند.

(راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن  $\widehat{D}_1$  و  $\widehat{D}_2$  دلیل بیاورید.)

نتیجه: اگر در مثلی دو زاویه برابر باشند آن مثلث ... متساوی الساقین ... است.

سه حالت هم نهشتی دو مثلث:

- برابری سه ضلع
- برابری دو ضلع و زاویه بین
- برابری دو زاویه و ضلع بین
- یا به اختصار: (ض ض ض)
- یا به اختصار: (ض ز ض)
- یا به اختصار: (ز ض ز)

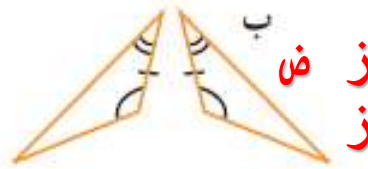


۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت

**اطلاعات**



**کافی نیست**



**ض ض**

هم‌نهشتی را بنویسید.



**ض ض**

۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می‌توان از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص نتیجه گرفت. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.

**به هر سه حالت دو مثلث هم‌نهشتند.**



الف) هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

**به هر سه حالت دو مثلث هم‌نهشتند.**



ب) قطر متوازی‌الاضلاع رسم شده است.

ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده‌اند.

**به حالت ض ض دو مثلث**

۳- از شکل زیر کدام یک از موارد زیر را می‌توان نتیجه گرفت؟

اگر دو زاویه و یک ضلع غیر بین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیرین از مثلثی دیگر برابر باشند،

الف) دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند.

ب) ممکن است دو مثلث هم‌نهشت نباشند. ✓



ریاضی هشتم

فصل 6

مثلث

درس چهارم

هم‌نهدتی مثلث‌های

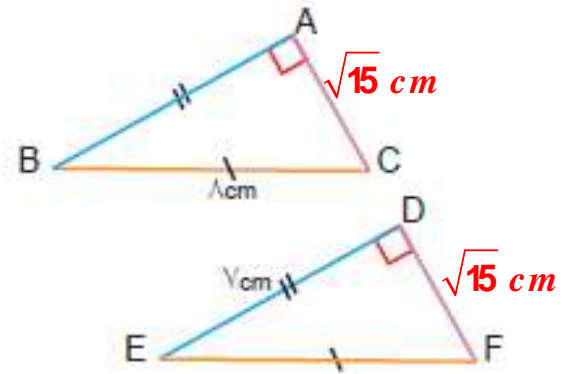
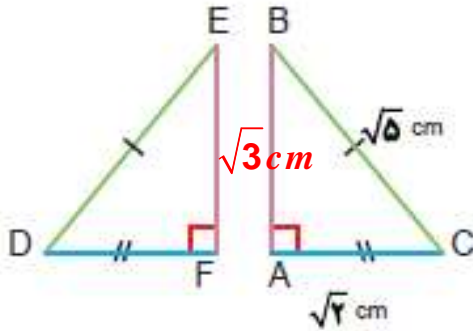
قائم‌الزاویه  
صفحات 96 تا 100

## هم نهستی مثلث‌های قائم الزاویه

### فعالیت



۱- در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



اندازه ضلع سوم هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF مساوی است؟ **بل**

آیا این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟ **بلی حالت (ض ض ض) و**

۲- می‌دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه

دیگری برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید.

**بلی زیرا به کمک رابطه فیثاغورس می‌توان حالت سه ضلع یا ض ض را به وجود آورد.**

## کاردر کلاس



۱- پاره خط  $AH$ ، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین  $ABC$  است.

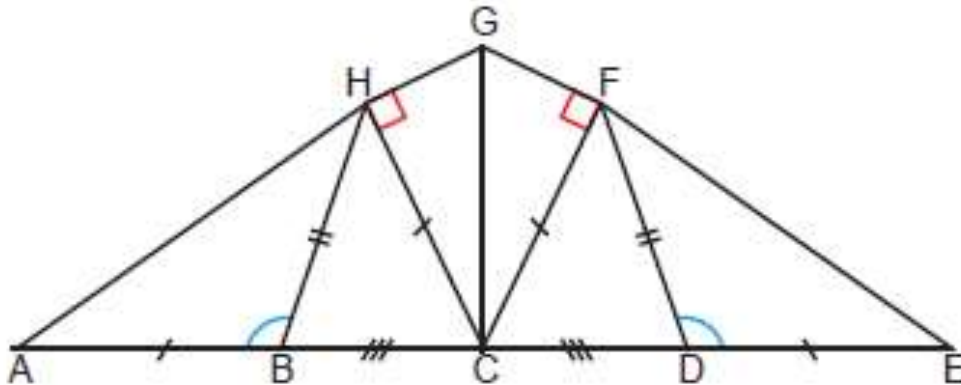
چرا مثلث‌های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشت‌اند؟

چون مثلث  $ABC$  متساوی الساقین است پس  $AB=AC$

$AH$  ضلع مشترک پس دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع هم نهشت‌اند

۲- با توجه به علامت‌های شکل زیر، مثلث‌های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت

هم نهشتی هر جفت مثلث را بیان کنید.



$$\triangle ABH = \triangle EDF \text{ ض ض ض}$$

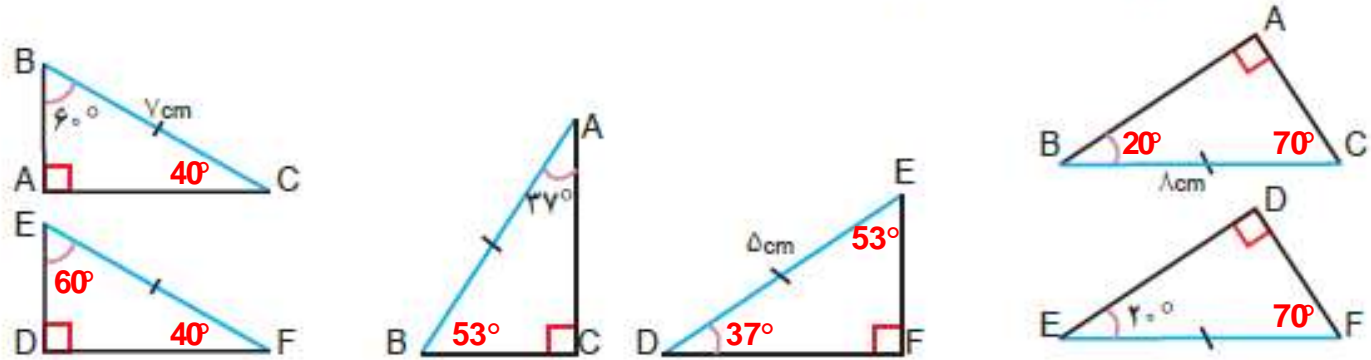
$$\triangle BHC = \triangle DFC \text{ ض ض ض}$$

$$\triangle CHG = \triangle CFG \text{ ض و}$$

$$\triangle ACH = \triangle ECF \text{ ض و}$$



۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



زاویه دیگر هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟ **بله** **ض** **ز**

۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید. **بله**

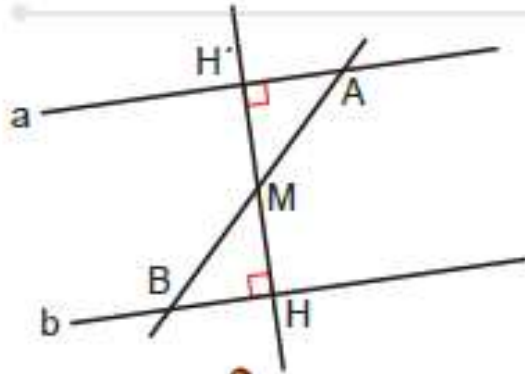
دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه :

• برابری وتر و یک زاویه تند  
یا به اختصار (وز)

• برابری وتر و یک ضلع  
یا به اختصار (وض)

زیرا زاویه تند دیگر هم مساوی شده بنابراین دو مثلث به حالت **ض ز** هم نهشت‌اند

## کار در کلاس



۱- از نقطه  $M$ ، وسط پاره خط  $AB$ ، بر دو خط موازی  $a$  و  $b$  عمود رسم کرده ایم.

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت اند؟

(و)

۲- در شکل روبه‌رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم مساوی و هشت پاره خط آبی نیز با هم مساوی اند.

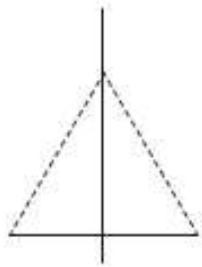
شانزده مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم نهشت اند؟

(و)

(ز)



شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می کردند که به این جمله برخوردند :



«هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط

از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید : «چرا این جمله درست است؟»

شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او پاره خطی کشید و عمود منصف آن را رسم کرد. نقطه ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله

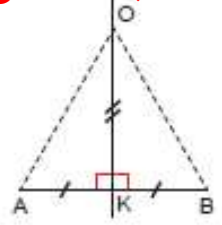
آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله ها مساوی بود.

(یادآوری : فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می کند.)

خییر  
زیرا با مثال حالت کلی  
شاید نمی شود .

فکر می کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟

۲- مهتاب گفت : «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمود منصف درست است؟»



شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

شکل رو به رو علامت گذاری کرد و گفت : «برای همه نقاط روی عمود منصف AB، مانند نقطه

O، زاویه K زاویه ای قائمه است. (چرا؟) زیرا عمود منصف پاره خط بر آن پاره

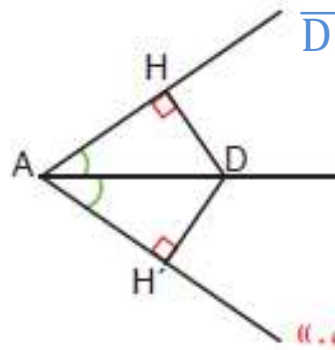
همچنین  $AK=KB$  (چرا؟)  $OK$  هم ضلع مشترک دو مثلث است. پس  $\triangle AOK \cong \triangle BOK$  (در

چه حالتی؟) زیرا عمود منصف پاره خط آن پاره در حالت ض

خط را نصف می کند چون اجزای متناظر دو ض

مثلث مساوی اند فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟ بل





۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید: باید نشان  $\overline{DH} = \overline{DH'}$

پاره خط  $AD$  وتر مشترک دوهیئت است

چون  $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$  نیمساز است

بنابراین  $\triangle ADH = \triangle ADH'$  به حالت

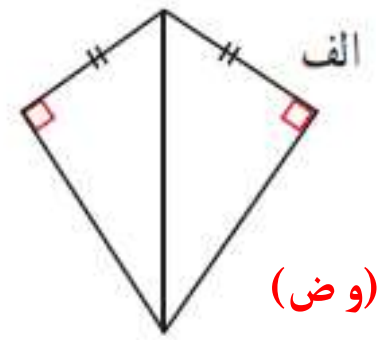
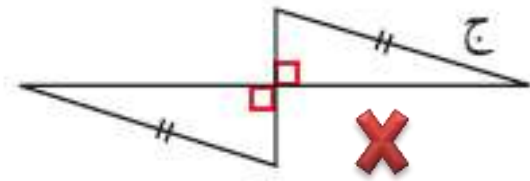
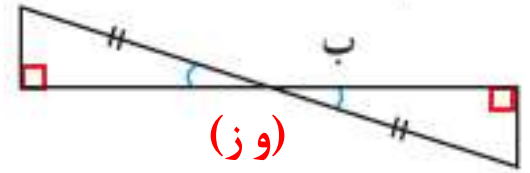
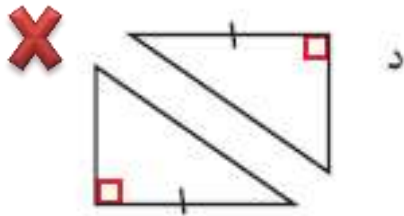
مستقیم طبق اجزای (  $\overline{DH} = \overline{DH'}$  )

«همانطور که می‌بینیم: زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

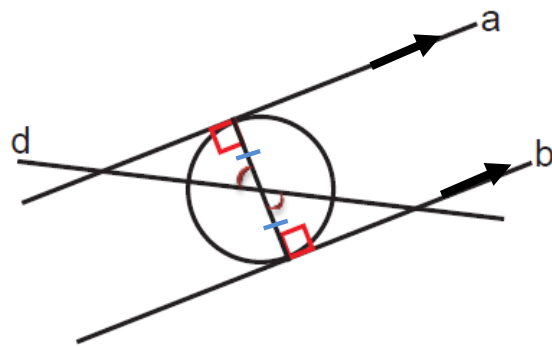
(یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌شود.)



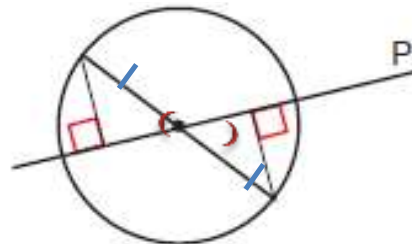
۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهستی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم نهست‌اند.



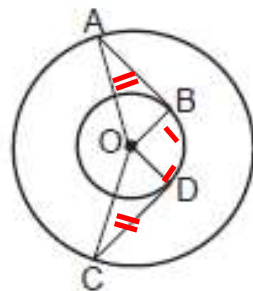
۲- در هر شکل، از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم‌نهشته، دو مثلث، یا نه‌سند.



الف) خط  $d$  از مرکز دایره می‌گذرد و دو خط  $a$  و  $b$  بر قطر دایره عمودند. (رض ز)



ب) خط  $p$  از مرکز دایره گذشته است. (وز)



ج) نقطه  $O$  مرکز مشترک دو دایره و پاره‌خط‌های  $AB$  و  $CD$  بر دایره کوچک مماس می‌باشند. (وض)

۳- در هر یک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید یک مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث

دیگر منطبق کرد. شکل الف : با

دوران  $180$  درجه

شکل ب : با دوران

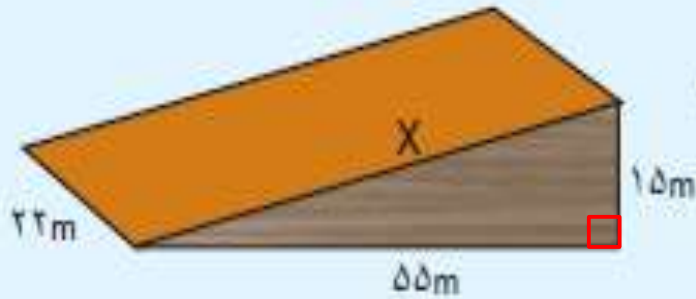
$180$

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- رابطه فیثاغورس
- اجزای متناظر
- هم‌نهستی مثلث‌های قائم‌الزاویه
- حالت‌های هم‌نهستی دو مثلث
- در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن ضلع مجهول مثلث قائم‌الزاویه
- بررسی قائم‌الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن
- نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم‌نهشت
- هم‌نهستی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین
- هم‌نهستی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع
- حل مسئله‌های مربوط به هم‌نهستی مثلث‌ها به کمک حالت‌های بالا

در نقشه‌های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های مجهول، از هم‌نهستی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می‌کنیم.



۱- در شکل روبه رو سطح شیب داری را می بینید.  
طول این سطح شیب دار را به دست آورید.

۲- الگوی زیر با مثلث های هم نهشت ساخته می شود.

$$x^2 = 15^2 + 55^2 = 225 + 3025 = 3250$$

$$x^2 = 3250 \rightarrow x = \sqrt{3250} = 57/008$$

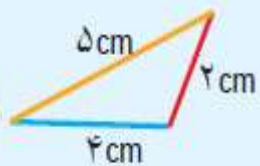
الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می شود؟

د) محیط شکل شماره ۷ چقدر؟

شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
محیط	۱۱	۱۸	۱۹	۲۶	۲۷	۳۴	۳۵
		+7	+1	+7	+1	+7	+1



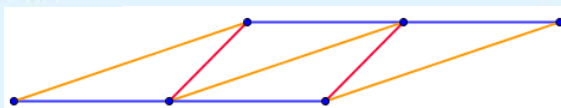
شکل شماره ۱



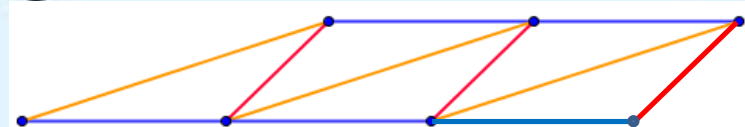
شکل شماره ۲



شکل شماره ۳



شکل



شکل