

گزینه ۲

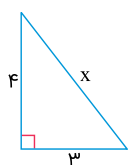
۱

گزینه ۲ صحیح است.

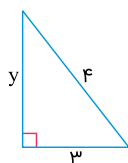
گزینه ۴

۲

می‌تواند دارای دو حالت باشد.



$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$$

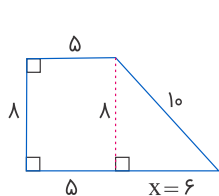


$$y^2 = 4^2 - 3^2 \Rightarrow y = \sqrt{7}$$

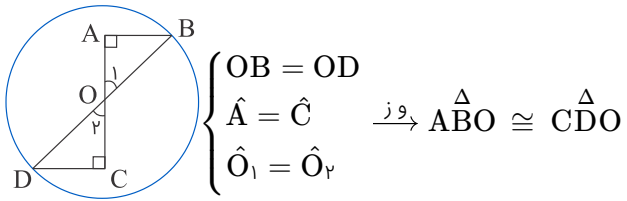
گزینه ۲

۳

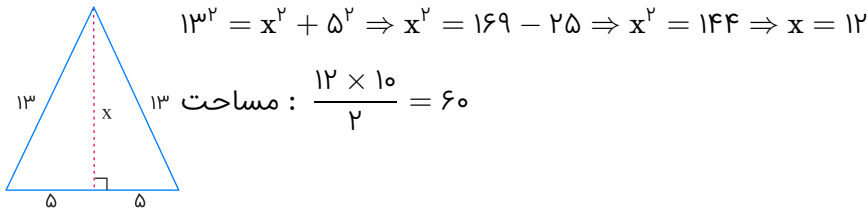
$$x^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow x = 6$$



$$\text{مساحت} : \frac{(5 + 11) \times 8}{2} = 16 \times 4 = 64$$



می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع عمودمنصف نیز است. ابتدا باید ارتفاع را به دست آوریم.



$$AC^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow AC^2 = 36 + 16 \Rightarrow AC = \sqrt{52}$$

$$CE^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2 \Rightarrow CE^2 = 9 + 3 \Rightarrow CE = \sqrt{12}$$

$$AE^2 = CE^2 + AC^2 \Rightarrow AE^2 = 12 + 52 \Rightarrow AE^2 = 64 \Rightarrow AE = 8$$

$$\begin{cases} AB = AC \\ AE = AF \\ \hat{A} = \hat{A} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \triangle ABE \cong \triangle ACF$$

$$\begin{cases} BC = AD \text{ (وتر)} \\ \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{ج.۱} \triangle BCM \cong \triangle ADN$$

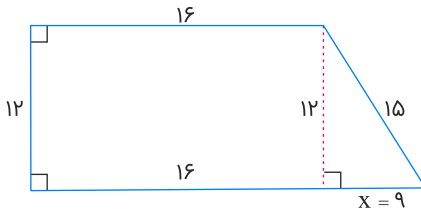
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$5^2 = 4^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 3 \Rightarrow AD = 6$$

$$ABC \text{ مثلث} : BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow BD^2 = 16 + 36 \Rightarrow BD = \sqrt{52}$$

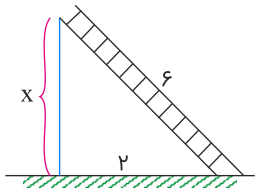
$$15^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow 225 - 144 = x^2 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{محیط: } 12 + 16 + 15 + 9 + 16 = 68$$



$$S = \frac{(AB + DC) \times AD}{2} = \frac{(6 + DC) \times 3}{2} = 21 \Rightarrow 6 + DC = 14 \Rightarrow DC = 8$$

$$BC^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow BC = \sqrt{13}$$



$$6^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow 36 - 4 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{32}$$

$$(2x)^2 + x^2 = (\sqrt{20})^2 \Rightarrow 4x^2 + x^2 = 20 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

محیط این شکل دارای ۱۰ ضلع مربع است.

$$\text{محیط: } 2 \times 10 = 20$$

چون دو مثلث همنهشت می‌باشند، پس:

$$\hat{A} = \hat{E} \Rightarrow 2y + 30 = 70 \Rightarrow 2y = 40 \Rightarrow y = 20$$

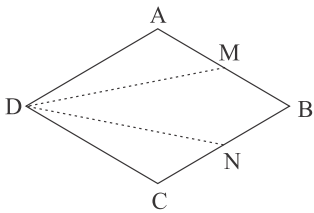
$$BC = FD \Rightarrow 3x - 1 = x + 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$x - y = 3 - 20 = -17$$

هر سه حالت گفته شده با توجه به مستطیل بودن چهار ضلعی در مورد دو مثلث صدق می‌کند، پس گزینه ۴ صحیح است.

فقط در گزینه "۲" مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$(\sqrt{13})^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow 13 = 4 + 9 \Rightarrow 13 = 13$$



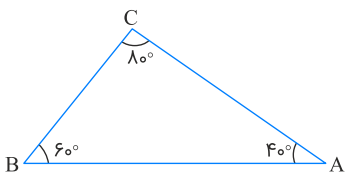
$$\begin{cases} AD = DC \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AM = CN \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AMD \cong \triangle CNB$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 3^2 + 2^2 \Rightarrow y = \sqrt{13} \\ z^2 &= \sqrt{13}^2 + 1^2 \Rightarrow z = \sqrt{14} \\ w^2 &= \sqrt{14}^2 + 1^2 \Rightarrow w = \sqrt{15} \\ x^2 &= \sqrt{15}^2 + 1^2 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

محیط: $3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 12$

چون دو مثلث همنهشت می‌باشند، پس:

$$\hat{D} = \hat{B} = 60^\circ, \hat{E} = \hat{C} = 80^\circ, \hat{A} = \hat{F} = 40^\circ$$



پس ضلع BC با DE برابر است و a می‌شود.

گزینه ۳

۲۰

گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۴

۲۱

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{A} \hat{O} B = \hat{C} \hat{O} D \xrightarrow{\text{ضض}} \triangle ABO \cong \triangle CDO \\ AO = CO \end{cases}$$

گزینه ۲

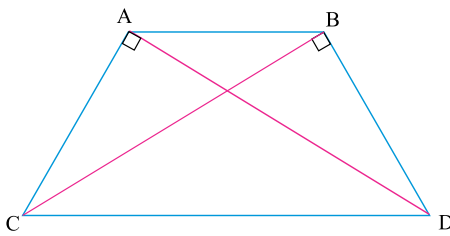
۲۲

چون دو مثلث همنهشت می‌باشند و نسبت به یک خط افقی متقارن هستند، پس:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{F} \\ \hat{B} = \hat{D} \Rightarrow \hat{F} = ۳۲^\circ \\ \hat{C} = \hat{E} \\ AB = DF \\ BC = DE \Rightarrow DE = ۴/۵ \\ AC = EF \end{cases}$$

گزینه ۴

۲۳

با در نظر گرفتن مثلث‌های $\triangle ACD$ و $\triangle BCD$ می‌بینیم که:

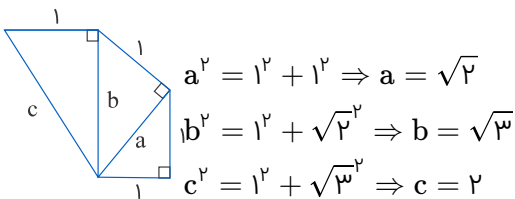
$$\begin{cases} CD = CD \text{ ضلع مشترک} \\ AC = BD \text{ ساق‌های دوزنقه متساوی‌الساقین} \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{وض}} \triangle ACD \cong \triangle BCD$$

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} \\ CD = CD \\ AC = BD \end{cases} \xrightarrow{\text{ضض}} \triangle ACD \cong \triangle BCD$$

$$\begin{cases} CD = CD \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{وز}} \triangle ACD \cong \triangle BCD$$

گزینه ۳

۲۴

محیط شکل: $1+1+1+1+2=6$

$$۱۳^۲ = ۵^۲ + AC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow AC = ۱۲$$

$$DC^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ \Rightarrow DC^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow DC = ۱۰$$

$$\text{محیط} : ۵ + ۱۳ + ۱۲ + ۸ + ۶ + ۱۰ = ۵۴$$

$$\begin{aligned} \triangle ABO : AB^۲ &= OA^۲ + OB^۲ \Rightarrow \sqrt{۱۳^۲} = ۳^۲ + OB^۲ \\ \Rightarrow OB^۲ &= ۴ \Rightarrow OB = ۲ \Rightarrow OC = ۴ \end{aligned}$$

$$\triangle OAC : AC^۲ = OA^۲ + OC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow AC = ۵$$

باید رابطه فیثاغورس برای گزینه‌ها را چک کنیم.

$$۱) ۵^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow ۲۵ = ۲۵$$

$$۲) \sqrt{۳^۲} = \sqrt{۲^۲} + ۱^۲ \Rightarrow ۳ = ۳$$

$$۳) \sqrt{۷^۲} = \sqrt{۳^۲} + ۲^۲ \Rightarrow ۷ = ۷$$

$$۴) \sqrt{۷^۲} = \sqrt{۵^۲} + ۲^۲ \Rightarrow ۷ = ۹ \times$$

فقط گزینه ۴ صدق نمی‌کند.

رابطه فیثاغورس بین اضلاع برقرار است.

$$(x+1)^۲ = x^۲ + ۷^۲ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = x^۲ + ۴۹ \Rightarrow ۲x = ۴۸ \Rightarrow x = ۲۴$$

توجه:

$$(x+1)^۲ = (x+1)(x+1) = x^۲ + x + x + ۱ = x^۲ + ۲x + ۱$$

اطلاعاتی که داریم را ابتدا می‌نویسیم:

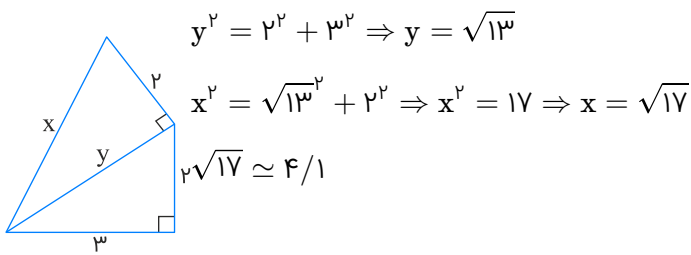
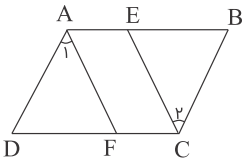
$$\hat{D} = \hat{B}$$

$$AD = BC$$

پس دارای دو حالت است.
که شرط دوم در گزینه ۳ می‌باشد.

$$۱) \hat{A}_1 = \hat{C}_1$$

$$۲) DF = BE$$



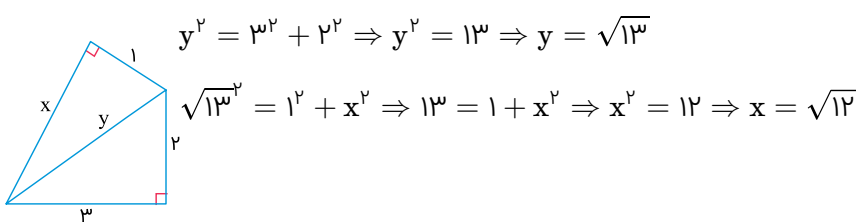
مثلثی قائم‌الزاویه است که رابطه فیثاغورس در آن صدق می‌کند.

$$۱) 3^2 = 2^2 + 1^2 \times$$

$$۲) \sqrt{7}^2 = \sqrt{5}^2 + 2^2 \times$$

$$۳) 3^2 = 2^2 + \sqrt{5}^2 \checkmark$$

$$۴) \sqrt{14}^2 = \sqrt{10}^2 + 4^2 \times$$



$$\left. \begin{array}{l} AD = AB \text{ (وتر اضلاع لوزی)} \\ \widehat{H} = \widehat{H'} = 90^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{D} \text{ (زوایای مقابل لوزی)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{و.ز}} \triangle ADH \cong \triangle ABH'$$

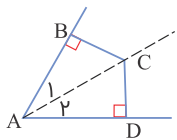
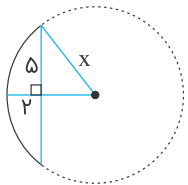
$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{D} = \widehat{A} \text{ فرض مسئله} \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \text{ متقابل به رأس} \\ OA = OD \text{ شعاع دایره} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ز.ض.ز}} \triangle ABO \cong \triangle CDO$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AC^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2} \\ AB^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow AB = \sqrt{5} \\ BC = 3 \end{array} \right.$$

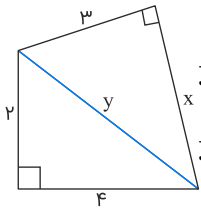
$$\Rightarrow AB + AC + BC = \sqrt{2} + \sqrt{5} + 3$$

$$x^2 = (x-2)^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 + 25$$

$$\Rightarrow 4x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{4} = 7\frac{1}{4}$$



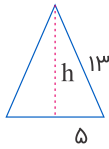
$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ AC \text{ مشترک} \\ \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{و.ز}} \triangle ABC \cong \triangle ACD \Rightarrow BC = CD$$



$$y^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow y^2 = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20}$$

$$y^2 = 3^2 + x^2 \xrightarrow{y=\sqrt{20}} \sqrt{20}^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 20 - 9 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{11}$$

ابتدا ارتفاع مثلث را به دست می‌آوریم.



$$13^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow 169 = 25 + h^2$$

$$\Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$$

$$\text{مساحت: } \frac{12 \times 10}{2} = 60$$

براساس اندازه‌ها، داریم:

$$AB = CD \quad \widehat{A} = \widehat{D}$$

$$AC = BD \quad \widehat{B}_1 = \widehat{C}_2$$

$$BC = BC \quad \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1$$

پس $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ نادرست است.

چون دو شکل هم‌نهشت هستند، پس اضلاع آن‌ها دوبره‌دو برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 1 = x + 4 \Rightarrow x = 3 \\ 2y - 1 = y + 3 \Rightarrow y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - 4 = -1$$

چون دو شکل هم‌نهشت هستند، پس تمامی اضلاع و زاویه‌ها دوبره‌دو برابرند.

$$3b + 10 = 130 \Rightarrow 3b = 120 \Rightarrow b = 40$$

$$3a - 1 = a + 3 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{b}{a} = \frac{40}{2} = 20$$

در شکل‌های هم‌نهشت زاویه‌ها و اضلاع دوجه‌دو باهم برابرند.

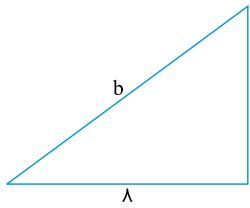
$$2x - 4 = 8 \Rightarrow x = 6$$

$$30 + 70 = 100 \Rightarrow 4y + 40 = 100 \Rightarrow 4y = 60 \Rightarrow y = 15$$

$$x + y = 6 + 10 = 16$$

چون باید اضلاع دوجه‌دو برابر باشند، پس:

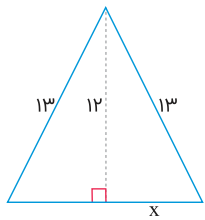
$$a - 2 = 6 \Rightarrow a = 8$$



$$b^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow b = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{F} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} AC = DE \Rightarrow 2y - 3 = y + 2 \Rightarrow y = 5 \\ AB = FD \Rightarrow 2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$x - y = 3 - 5 = -2$$



$$13^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{محیط: } 13 + 13 + 5 + 5 = 36$$

$$\text{مساحت: } \frac{12 \times 10}{2} = 60$$

$$\text{اختلاف: } 60 - 36 = 24$$

براساس زاویه‌های داده‌شده متوجه می‌شویم که:

$$AC = DE \Rightarrow 3x - 1 = x + 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$AB = DF \Rightarrow 2y - 1 = 7 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

$$x + y = 6$$

$$\begin{aligned} \triangle ABH \text{ مثلث} : 15^2 &= 9^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = 225 - 81 \\ &\Rightarrow BH = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle AHC \text{ مثلث} : \sqrt{181}^2 &= 9^2 + CH^2 \\ &\Rightarrow CH^2 = 181 - 81 \Rightarrow CH = 10 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ارتفاع} = 9 \\ \text{قاعده} = 10 + 12 = 22 \end{array} \right. \Rightarrow S = \frac{9 \times 22}{2} = 99$$

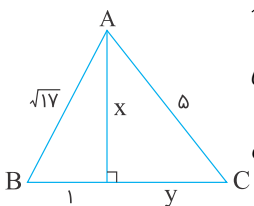
$$\left\{ \begin{array}{l} BC = DC \text{ وتر} \\ H = H' = 90^\circ \text{ زو} \rightarrow \triangle BCH \cong \triangle DCH' \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right.$$

باید هر گزینه را در رابطه فیثاغورس امتحان کنیم:

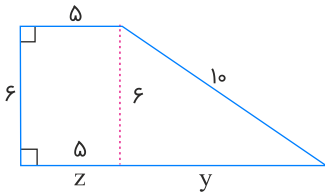
$$\begin{aligned} 1) \sqrt{5}^2 &= \sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 \Rightarrow 5 = 3 + 2 \Rightarrow 5 = 5 \\ 2) 26^2 &= 24^2 + 10^2 \Rightarrow 676 = 576 + 100 \Rightarrow 676 = 676 \\ 3) 3^2 &= 2^2 + 1^2 \Rightarrow 9 = 4 + 1 \Rightarrow 9 = 5 \times \\ 4) 4^2 &= 3^2 + \sqrt{7}^2 \Rightarrow 16 = 9 + 7 \Rightarrow 16 = 16 \end{aligned}$$

مثلثی قائم‌الزاویه است که رابطه فیثاغورس برای آن صدق کند.

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{7}^2 &= 3^2 + 2^2 \Rightarrow 7 = 13 \quad \times \\ 2) \sqrt{7}^2 &= \sqrt{5}^2 + 2^2 \Rightarrow 7 = 9 \quad \times \\ 3) 8^2 &= 5^2 + 3^2 \Rightarrow 64 = 34 \quad \times \\ 4) \sqrt{20}^2 &= 4^2 + 2^2 \Rightarrow 20 = 20 \quad \checkmark \end{aligned}$$



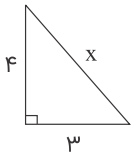
$$\begin{aligned} \sqrt{17}^2 &= 1^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 17 - 1 \Rightarrow x = 4 \\ 5^2 &= 4^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow y = 3 \\ \text{مساحت مثلث} : \frac{4 \times 4}{2} &= 8 \end{aligned}$$



$$10^2 = 6^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 100 - 36 \Rightarrow y = 8$$

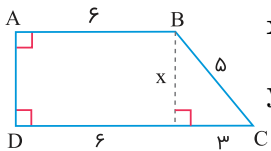
$$x = z + y = 8 + 5 = 13$$

$$3^2 + 4^2 = x^2 \Rightarrow 9 + 16 = x^2 \Rightarrow 25 = x^2 \Rightarrow \sqrt{25} = x \Rightarrow x = 5$$



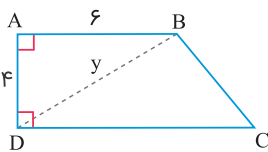
توجه: از اعداد فیثاغورسی ۳ و ۴ و ۵ هستند که می‌توان بدون محاسبه هم وتر را ۵ به دست آورد.

ابتدا ارتفاع دوزنقه را رسم کرده و اندازه آن را به دست می‌آوریم.

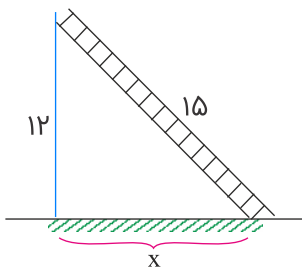


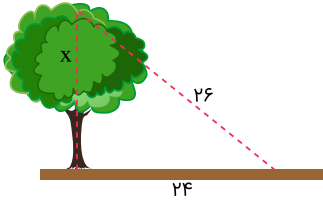
$$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x = 4$$

$$y^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow y^2 = 52 \Rightarrow y = \sqrt{52}$$

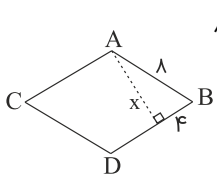


$$15^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow 225 - 144 \Rightarrow x = 9$$





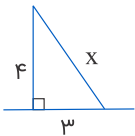
$$26^2 = x^2 + 24^2 \Rightarrow x^2 = 676 - 576 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$



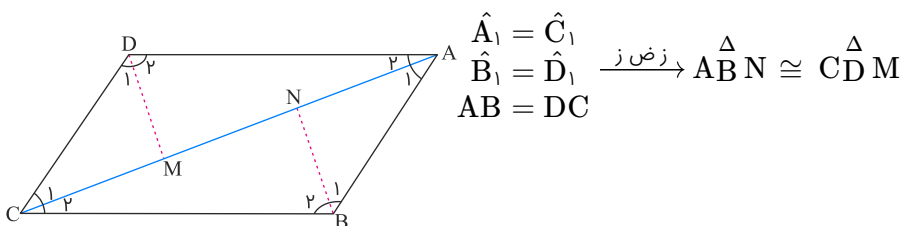
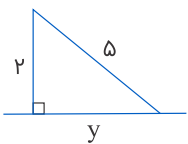
$$\begin{aligned} \lambda^2 &= x^2 + 4^2 \Rightarrow 64 - 16 = x^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 4\lambda \Rightarrow x = \sqrt{4\lambda} \Rightarrow x \simeq \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

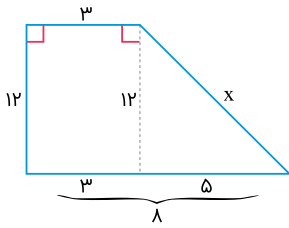
در حالت برابری دو زاویه و یک ضلع، باید حتماً ضلع موردنظر در میان دو زاویه باشد، یعنی به صورت (ز ض ز).

$$\text{حالت اول: } x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$$



$$\text{حالت دوم: } 5^2 = 2^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{21}$$





$$x^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 = 144 + 25$$

$$\Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13$$

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ متقابل به رأس} \\ OA = OD \text{ (وتر شعاع دایره)} \\ \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{از}} \triangle ABO \cong \triangle CDO$$

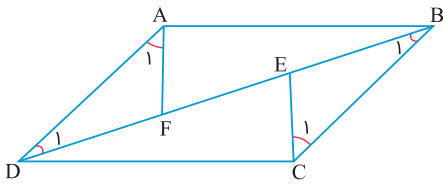
اعدادی قابل قبول هستند که در رابطه فیثاغورس صدق کنند.

- ۱) $3^2 = 2^2 + 1^2 \times$
- ۲) $3^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{2}^2 \times$
- ۳) $4^2 = 2^2 + \sqrt{12}^2$
- ۴) $\sqrt{5}^2 = \sqrt{4}^2 + \sqrt{3}^2 \times$

$$\text{محیط} = 6 \Rightarrow 1 + 1 + 1 + AD = 6 \Rightarrow AD = 3$$

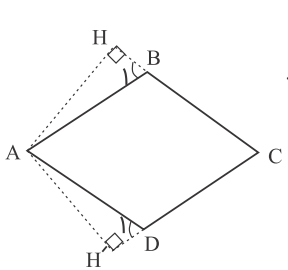
$$\triangle ACD : AD^2 = CD^2 + AC^2 \Rightarrow 3^2 = 1^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 8 \Rightarrow AC = \sqrt{8}$$

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{B} = \hat{C} \\ OA = OD \end{cases} \xrightarrow{\text{از}} \triangle ABO \cong \triangle CDO$$



$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 & \text{فرض مسئله} \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 & (\text{مورب } BD, AD \parallel BC) \\ AD = BC & \text{اضلاع مقابل متوازی الاضلاع} \end{cases}$$

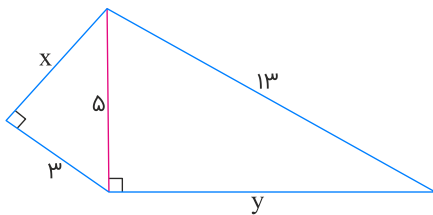
زض ز $\rightarrow \triangle ADF \cong \triangle BCE$



$$\begin{cases} AB = AD \\ \hat{H} = \hat{H}' \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{وز}} \triangle ABH \cong \triangle ADH'$$

چون دو شکل هم‌نهشت می‌باشند:

$$\begin{aligned} \hat{A} = \hat{E} &= 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{F} &= 134^\circ \\ \hat{C} = \hat{G} &= 58^\circ \\ \hat{D} = \hat{H} &=? \end{aligned} \Rightarrow \hat{D} = 360 - (90 + 134 + 58) = 78^\circ$$



$$\text{مثلث سمت چپ} : 5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

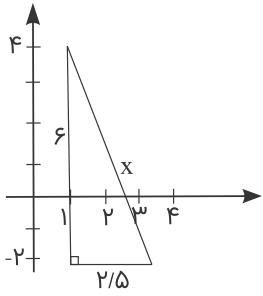
$$\text{مثلث سمت راست} : 13^2 = 5^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 144 \Rightarrow y = 12$$

$$\text{مساحت مثلث سمت چپ} : \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$\text{مساحت مثلث سمت راست} : \frac{5 \times 12}{2} = 30$$

$$\Rightarrow 6 + 30 = 36$$

$$x^2 = 6^2 + 2/5^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 6/25 \Rightarrow x^2 = 42/25 \Rightarrow x = 6/5$$



$$\text{فیثاغورس: } x^2 + 13^2 = 15^2 \Rightarrow x^2 = 225 - 169 \Rightarrow x^2 = 56 \\ \Rightarrow x = \sqrt{56} \approx 7/5$$