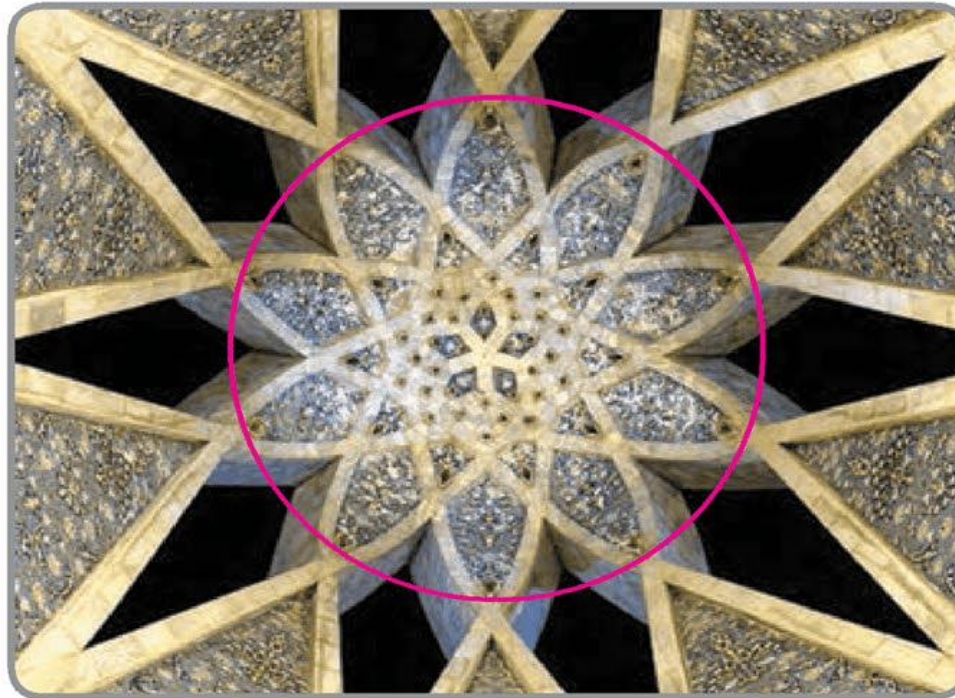


# دایره

## فصل ۹



زاویه‌های محاطی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان‌ها در دایره، کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرش‌ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.

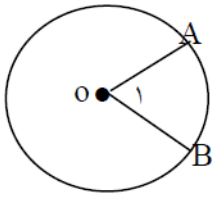
در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می‌کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و رباعی‌سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته‌ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجه نظام الملک در دوره سلجوقی است.

## درس دوم

### زاویه مرکزی



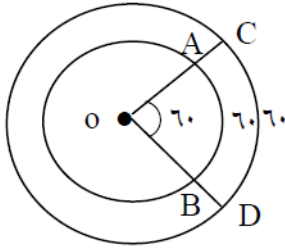
**زاویه مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند.



$$\widehat{O}_1 = \widehat{AB}$$

اندازه زاویه مرکزی برابر است با اندازه کمان روبروی آن.

یک رابطه مهم:



$$\frac{\widehat{AB} \text{ کمان}}{360} = \frac{\widehat{AB} \text{ طول کمان}}{\text{محیط دایره}}$$

**مثال 1)** اگر  $\overline{OB} = 1 \text{ cm}$  باشد، طول کمان  $\widehat{AB}$  چقدر است؟

$$\Rightarrow \text{محیط دایره} = 2\pi r = 1 \times 2 \times \pi = 2\pi$$

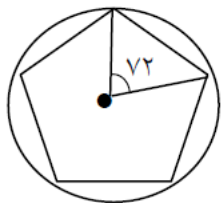
$$\frac{60}{360} = \frac{x}{2\pi} \quad \rightarrow \quad x = \frac{60 \times 2\pi}{360} = \frac{\pi}{3}$$

**مثال 2)** اگر  $\overline{OD} = 2 \text{ cm}$  باشد، طول کمان  $\widehat{CD}$  چقدر است؟

$$\Rightarrow \text{محیط دایره} = 2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

$$\frac{60}{360} = \frac{x}{4\pi} \quad \rightarrow \quad x = \frac{60 \times 4\pi}{360} = \frac{2\pi}{3}$$

**طریقه رسم پنج ضلعی منتظم:** ابتدا  $360^\circ$  را تقسیم بر ۵ کرده و اندازه زاویه مرکزی ۵

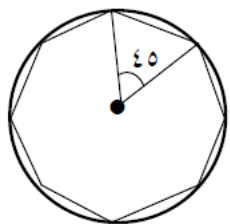


ضلعی منتظم را به دست می آوریم.  $\left(\frac{360}{5} = 72\right)$  حال زاویه مرکزی  $72^\circ$  درجه را رسم

می کنیم. دهانه پرگار را به اندازه کمان  $72^\circ$  درجه باز کرده و سوزن پرگار را روی یکی از نقاط برخورد

اضلاع زاویه با محیط دایره قرار داده و کمان های پی در پی می زنیم. حال نقاط ایجاد شده را به هم وصل

**طریقه رسم هشت ضلعی منتظم:** ابتدا  $360^\circ$  را بر ۸ تقسیم کرده و اندازه زاویه مرکزی

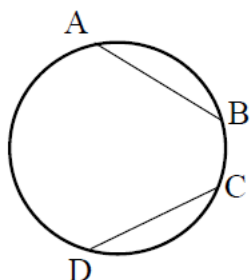


۸ ضلعی منتظم را به دست می آوریم  $\left(\frac{360}{8} = 45\right)$ . دهانه پرگار را به اندازه کمان  $45^\circ$

درجه باز کرده و از یک نقطه دلخواه کمان های پی در پی می زنیم. حال نقاط ایجاد شده را به هم وصل می -  
کنیم.

**نکته ۱:** برای رسم هر  $n$  ضلعی منتظم مشابه روش های بالا عمل می کنیم.

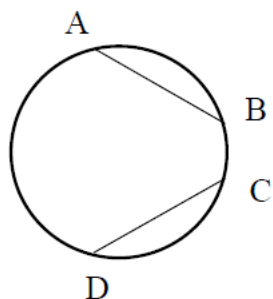
**نکته ۲:** وترهای نظیر کمان‌های مساوی با یکدیگر برابر می‌باشند.



$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

**نکته ۳:** کمان‌های نظیر وترهای مساوی با یکدیگر برابر هستند.

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$



**نکته ۴:** قطر دایره، دایره را به دو کمان  $180^\circ$  درجه تقسیم می‌کند.

**نکته ۵:** محیط دایره، برابر  $360^\circ$  درجه است.

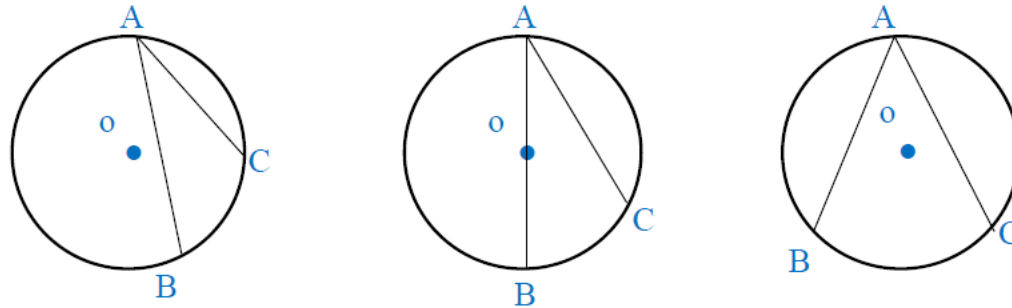
درس سوم

زاویه محاطی



**زاویه محاطی:** به زاویه‌ای گفته می‌شود که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهای دایره باشند.

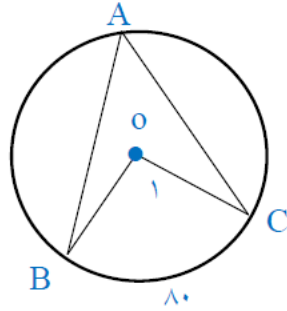
با توجه به مرکز دایره و وضعیت قرارگرفتن وترها نسبت به مرکز دایره، سه نوع زاویه محاطی می‌توانیم ایجاد کنیم.



$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

↔

✓ اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبروی آن است.

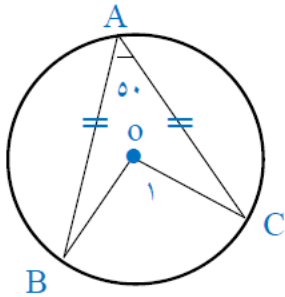


سوال 1) در شکل مقابل اندازه زاویه‌های خواسته شده را به دست آورید.

$$\hat{A} = 40^\circ$$

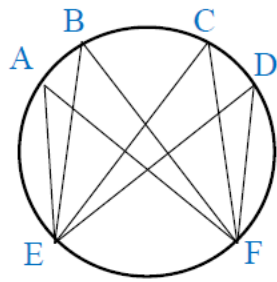
$$\hat{O}_1 = 80^\circ$$

سوال 2) در شکل مقابل اندازه زاویه‌های خواسته شده را به دست آورید.



$$\hat{O}_1 = 100^\circ \quad \widehat{AB} = 130^\circ \quad \widehat{BC} = 100^\circ$$



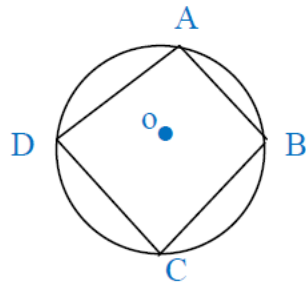


**نکته ۱:** بی‌شمار زاویه محاطی رو به روی یک کمان وجود دارد.

**نکته ۲:** زوایای محاطی رو به روی یک کمان با هم برابرند.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{EF}}{2}, \quad \hat{B} = \frac{\widehat{EF}}{2}, \quad \hat{C} = \frac{\widehat{EF}}{2}, \quad \hat{D} = \frac{\widehat{EF}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$$

**نکته ۳:** به چهارضلعی که چهار رأس آن روی محیط دایره باشد، چهارضلعی محاطی گفته می‌شود.

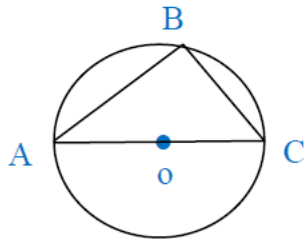


شود. و زاویه‌های روبرو در این چهارضلعی مکمل یکدیگرند.

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

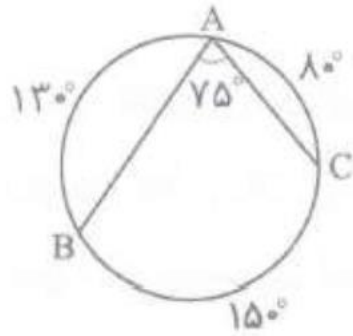
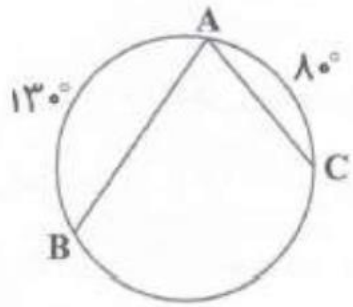
$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

**نکته ۴:** زاویه محاطی رو به روی قطر ۹۰ درجه است.

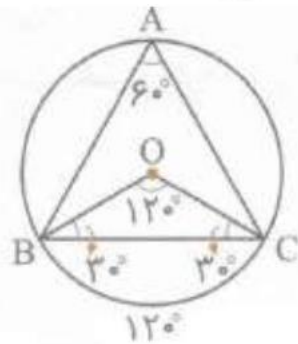
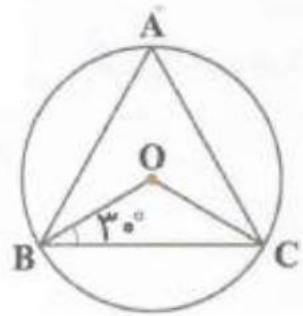


$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

مثال) در شکل های زیر اندازه زاویه A را محاسبه کنید؟



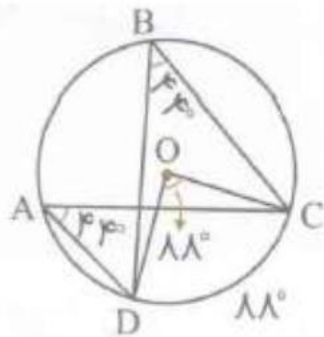
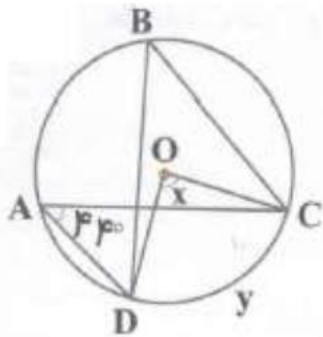
جمع کمان های دایره  $360^\circ$  است، پس کمان BC باید  $150^\circ$  باشد.  
 $\Rightarrow A = 150^\circ \div 2 = 75^\circ$



مثلث OBC متساوی الساقین است، پس زاویه C هم برابر با  $30^\circ$  و زاویه O برابر با  $120^\circ$  است. کمان BC روبروی زاویه مرکزی O است، پس آن هم  $120^\circ$  است.

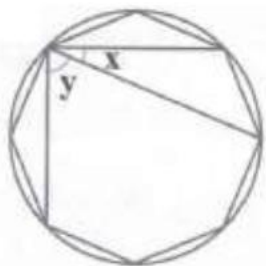
$$\hat{A} = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$$

در شکل زیر اندازه زاویه و کمان مجهول را محاسبه کنید؟



در این شکل، زاویه های A و B روبروی کمان DC هستند، پس این دو زاویه با هم برابرند ( $\hat{A} = \hat{B} = 44^\circ$ )، بنابراین  $\widehat{DC}$  دو برابر این زاویه ها یعنی،  $88^\circ$  است و زاویه مرکزی O که روبروی این کمان است هم،  $88^\circ$  است.

مثال ۸ ضلعی زیر منتظم است. اندازه زاویه های  $x$  و  $y$  را محاسبه کنید؟

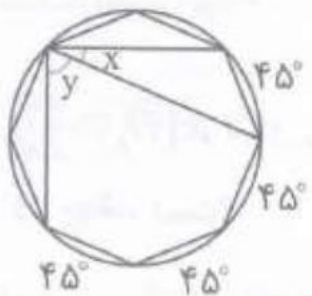


۸ ضلعی منتظم، دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم می کند، پس اندازه هر کمان کوچک  $360^\circ \div 8 = 45^\circ$

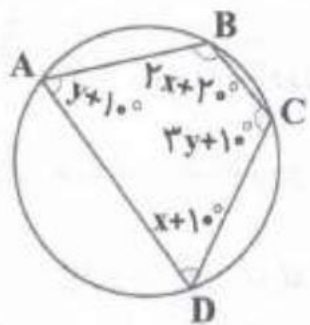
است. روبه روی زاویه  $x$ ، یک کمان  $45^\circ$  و روبه روی زاویه  $y$ ، سه کمان  $45^\circ$  قرار دارد.

$$\hat{x} = 45^\circ \div 2 = 22.5^\circ$$

$$\hat{y} = 135^\circ \div 2 = 67.5^\circ$$



مثال در شکل زیر مقدار  $x$  و  $y$  را پیدا کنید؟



زاویه های  $A$  و  $C$  روبه روی هم هستند، پس جمع آن ها  $180^\circ$  است.

$$y + 10^\circ + 3y + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow y + 3y = 180^\circ - 10^\circ - 10^\circ \Rightarrow 4y = 160^\circ \Rightarrow y = \frac{160^\circ}{4} = 40^\circ$$

زاویه های  $B$  و  $D$ ، روبه روی هم هستند، پس جمع آن ها  $180^\circ$  است.

$$2x + 20^\circ + x + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x + x = 180^\circ - 20^\circ - 10^\circ \Rightarrow 3x = 150^\circ \Rightarrow x = \frac{150^\circ}{3} = 50^\circ$$